Оценка погрешности классических методов Рунге-Кутта (предварительная версия, окончательная – см. Журнал вычислительной математики и математической физики. – М., 2014.– вып. 54(5). с.24-32, DOI:10.7868/S0044466914050172),

Хашин С.И.
Ивановский государственный университет
e-mail: khash2@gmail.com

24 апреля 2014 г.

Аннотация

Как известно, для 4-стадийных методов Рунге-Кутта (РК) порядка 4 невозможно построить вложенные методы 5-го порядка для оценки погрешности. В работе для таких методов предлагается способ оценки погрешности без дополнительных вычислений правой части системы уравнений. Это оценка основана на данных метода за три последовательных шага и имеет пятый порядок точности.

Основной результат: формулы (16), (17) для нахождения локальной погрешности по 2 и 3 шагам метода РК.

Основной вывод: для автоматического управления длиной шага не обязательно искать вложенные методы. Это можно делать для произвольного метода РК.

Ключевые слова: методы Рунге-Кутта, оценка локальной погрешности.

1 Введение

Для численного решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ важнейшими методами являются методы Рунге-Кутта (РК). Классическими называются 4-стадийные методы 4-го порядка. Сегодня известно (см., например, [1, 7]) много методов более высоких порядков дающих большую точность или туже самую точность за существенно меньшее время. Тем не менее, классические методы до сих пор остаются наиболее употребительными.

Важнейшая черта современных методов РК – автоматическая оценка локальной погрешности, получаемая с помощью вложенных методов РК (RK pairs). Вложенный метод РК дает возможность достаточно точно найти локальную погрешность вычислений, причем не требуя дополнительных вычислений функции $f(x, y)$. Значительная часть работ по методам РК за последнее время касается именно вложенных методов ([4, 6], обзоры в [1, 3, 7] и др.).

В отсутствии такой оценки точность приходится брать с большим запасом, то есть устанавливать величину шага существенно меньше, чем реально требуется. Это приводит к росту объема вычислений. При наличии автоматической оценки погрешности величину шага можно не только выбрать без излишнего запаса, но и корректировать на каждом участке расчетов.

К сожалению, для наиболее употребительных, классических методов оказывается невозможно построить вложенные методы. В настоящей работе предлагается способ обойти это ограничение.

Методы, предложенные в работе в значительной степени являются развитием методов, рассмотренных в [2]. Некоторые аналогичные подходы намечены в [5].

С практической точки зрения, наиболее важными в работе являются оценки погрешности, даваемые формулами (6), (16), (17) по одному, двум и трем шагам соответственно. Первая из них (ранее известная) дает оценку погрешности с точностью до порядка, вторая – с точностью до умножения на константу, третья же оценка уже является достаточно точной. Первые две оценки из-за своей недостаточной точности (подробнее, см. ниже) могут использоваться лишь во вспомогательных целях. Оценка погрешности по трем шагам уже может реально использоваться для автоматического выбора величины шага. Надо только не забывать, что для применения этой оценки требуются три одинаковых по величине шага.

2 Классические методы

Пусть дано ОДУ $y' = f(t, y)$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ и начальное условие $y(t_0) = y_0$. Выбираем некоторый малый шаг h и находим вектор $y_1 = y(t_1) = y(t_0 + h)$ по 4-стадийным формулам:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, && y_0)\,, \\
k_2 &= hf(t_0 + c_2 h, && y_0 + a_{21}k_1)\,, \\
k_3 &= hf(t_0 + c_3 h, && y_0 + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)\,, \\
k_4 &= hf(t_0 + c_4 h, && y_0 + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)\,, \\
y_1 &= && y_0 + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4,
\end{aligned} \tag{1}$$

Все коэффициенты метода обычно записываются в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|cccc}
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

при этом должны быть выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
c_2 &= a_{21}\,, \\
c_3 &= a_{31} + a_{32}\,, \\
c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43}\,, \\
1 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4\,.
\end{aligned}$$

Коэффициенты метода не произвольны, они должны удовлетворять некоторой системе полиномиальных уравнений (условия порядка). Для классических методов это система из 8 уравнений от 10 переменных. Эта система легко решается. Основное многообразие ее решений может быть представлено параметрически. Пусть c_2, c_3 – свободные параметры, причем

$$c_2 \neq 1/2, \quad c_2 \neq 1 \quad c_3 \neq 0, \quad c_3 \neq c_2, \quad c_3 \neq 1, \quad 3 - 4c_2 - 4c_3 + 6c_2 c_3 \neq 0.$$

Тогда остальные коэффициенты выражаются через них по формулам ([1, 7]):

$$\begin{aligned}
a_{21} &= c_2, \\
a_{31} &= c_3 - a_{32}, \\
a_{32} &= \tfrac{c_3(c_3-c_2)}{2c_2(1-2c_2)}, \\
a_{41} &= c_4 - a_{42} - a_{43}, \\
a_{42} &= \tfrac{(c_2-1)(2-c_2-5c_3+4c_3^2)}{2c_2(c_3-c_2)(3-4c_2-4c_3+6c_2c_3)} \\
a_{43} &= \tfrac{(1-2c_2)(c_3-1)(c_2-1)}{c_3(c_3-c_2)(3-4c_2-4c_3+6c_2c_3)} \\
b_1 &= 1 - b_2 - b_3 - b_4 \\
b_2 &= \tfrac{1-2c_3}{12c_2(c_2-1)(c_3-c_2)} \\
b_3 &= \tfrac{2c_2-1}{12c_3(c_3-1)(c_3-c_2)} \\
b_4 &= \tfrac{3-4c_2-4c_3+6c_2c_3}{12(c_2-1)(c_3-1)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Например, при $c_2 = 1/3, c_3 = 2/3$ (правило "3/8") таблица Бутчера получится такая:

$$\begin{array}{c|cccc}
1/3 & 1/3 & & & \\
2/3 & -1/3 & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array} .$$

Наиболее популярным является метод с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cccc}
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array} , \tag{3}$$

правда, он не входит в семейство (2). Есть и другие аналогичные решения, все они образуют лишь одномерное многообразие.

3 Одношаговая оценка погрешности

Отсутствие вложенных формул порядка 5 для классических методов не означает, что погрешность вообще невозможно оценить, просто оценки получаются весьма грубые. Оказывается, что можно построить вложенный метод порядка 3 ([1, 7]). Для нахождения такой оценки к формулам (1) добавим еще одну:

$$k_5 = f(x_0 + c_5 h, y_1) \ . \tag{4}$$

Отметим, что для нахождения k_5 не требуется дополнительное вычисление функции f (при $c_5 = 1$), так как следующий шаг метода РК начинается как раз с вычисления вектора $f(x_0 + c_5 h, y_1)$, то есть k_5 в любом случае придется вычислять.

Для грубой оценки вектора погрешности можно применить выражение

$$err \approx Ch^2(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \beta_4 k_4 + \beta_5 k_5) \tag{5}$$

для некоторой константы C, зависящей от решаемой системы и

$$\begin{aligned}
\beta_1 = &\ \frac{(2c_3-1)(2c_2-1)}{2c_2c_3} \\
\beta_2 = &\ \frac{(2c_3-1)(2c_2-1)}{2c_2(c_2-1)(c_3-c_2)} \\
\beta_3 = &\ \frac{(2c_3-1)(2c_2-1)}{2c_3(c_3-1)(c_2-c_3)} \\
\beta_4 = &\ \frac{(-3+4c_2+4c_3-6c_2c_3)}{2(c_2-1)(c_3-1)} \\
\beta_5 = &\ 1
\end{aligned}$$

В случае $c_2 = 1/3,\ c_3 = 2/3$ (правило 3/8) общий алгоритм расчета выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
k_1 = &\ f(x_0, y_0)\ , \\
k_2 = &\ f(x_0 + h/3, y_0 + hk_1/3)\ , \\
k_3 = &\ f(x_0 + 2h/3, y_0 + h(-k_1/3 + k_2))\ , \\
k_4 = &\ f(x_0 + h, y_0 + h(k_1 - k_2 + k_3))\ , \\
y_1 = &\ y_0 + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8\ , \\
k_5 = &\ f(x_0 + h, y_1)\ ,
\end{aligned}$$

и для грубой оценки вектора погрешности можно применить выражение

$$err \approx Ch^2(-k_1 + 3k_2 - 3k_3 - 3k_4 + 4k_5)/4. \tag{6}$$

Для метода (3) аналогичная формула получается совсем простой:

$$err \approx Ch^2(k_5 - k_4). \tag{7}$$

Замечание. Численные эксперименты показывают, что величина константы C обычно лежит в пределах от 10 до 250.

Этим способом мы можем оценить локальную погрешность с точностью до порядка. Более точные оценки таким путем получить невозможно. Но даже такая оценка позволит избежать грубых ошибок при выборе шага интегрирования.

4 Оценка погрешности по двум шагам

Если не удается построить вложенную формулу, это еще не означает, что для данного метода не существует простых и достаточно точных способов оценки погрешности. Например, формула численного дифференцирования

$$y'(0) = \frac{1}{12h}(8(y_1 - y_{-1}) - (y_2 - y_{-2})) + O(h^4).$$

позволяет получить неплохой способ оценки погрешности. Правда, для более-менее точной оценки, придется взять довольно много последовательных значений y_i.

Попробуем сократить требуемое количество шагов, используя не только y_i, но и промежуточные величины k_j с каждого шага метода РК.

Делая несколько шагов метода РК, мы последовательно вычисляем:

$$\begin{array}{c|cccc} y_0 & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} \\ y_1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ y_2 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & \dots \end{array}$$

Пусть таблицы Бутчера 4-стадийного метода имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccc} c_2 & a_{21} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \tag{8}$$

и ее коэффициенты найдены по формулам (2) для некоторых c_2, c_3.

Два шага этого метода вместе с дополнительным "вложенным" шагом можно рассматривать как один 9-стадийный метод с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccccccccc} c_2 & a_{21} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} \\ c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1+c_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & a_{21} \\ 1+c_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & a_{31} & a_{32} \\ 1+c_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ 2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline & b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 & b'_6 & b'_7 & b'_8 & b'_9 \end{array} \tag{9}$$

Для получения настоящего "вложенного" метода надо подобрать коэффициенты b'_i так, чтобы эта таблица давала метод 5-го порядка, то есть ее коэффициенты должны удовлетворять 17-ти уравнениям Бутчера. Но расчеты показывают, что это невозможно ни при каком выборе исходного метода (a_{ij}, b_i, c_i). Однако, оказывается возможным подобрать коэффициенты b'_i так, чтобы получился метод 4-го порядка, но отличный от исходного, дающегося коэффициентами b_i.

Как предложено в работе [2], будем искать b'_i в виде $b'_i = b_i + \beta_i$. Условия порядка оказываются однородны относительно β_i. Получающаяся система уравнений имеет два линейно независимых решения.

Первое решение:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{(c_2-1)(c_3-1)(6c_2c_3-2c_2-2c_3+1)}{c_2c_3}\,,\\
\beta_2 &= \frac{(4c_2-1)(c_3-1)(2c_3-1)}{c_2(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_3 &= \frac{(2c_2-1)(c_2-1)(4c_3-1)}{c_3(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_4 &= -3\beta_8\,,\\
\beta_5 &= \frac{3(c_2-1)(c_3-1)(2c_2c_3+2c_2+2c_3-1)}{c_2c_3}\,,\\
\beta_6 &= \frac{(4c_2-3)(c_3-1)(2c_3-1)}{c_2(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_7 &= \frac{(c_2-1)(2c_2-1)(4c_3-3)}{c_3(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_8 &= 6c_2c_3-4c_2-4c_3+3\,,\\
\beta_9 &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Второе решение:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 1\,,\\
\beta_2 &= \frac{2c_3-1}{(c_2-1)(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_3 &= \frac{2c_2-1}{(c_3-1)(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_4 &= \frac{6c_2c_3-4c_2-4c_3+3}{(c_2-1)(c_3-1)}\,,\\
\beta_5 &= \frac{4c_2c_3+2c_2+2c_3-1}{c_2c_3}\,,\\
\beta_6 &= \frac{2c_3-1}{c_2(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_7 &= \frac{2c_2-1}{c_3(c_2-c_3)}\,,\\
\beta_8 &= 0\,,\\
\beta_9 &= 1\,,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Для случая $c_2 = 1/3, c_3 = 2/3$ (“правило 3/8“) два решения можно взять следующими

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9\\
1 & -1 & -5 & -3 & 13 & -5 & -1 & 1 & 0\\
1 & -2 & -1 & 0 & 4 & -1 & -2 & -1 & 2
\end{array}
\tag{12}
$$

Для схемы (3) коэффициенты будут такие:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9\\
1 & -2 & -2 & -3 & 9 & -2 & -2 & 1 & 0\\
1 & -2 & -2 & -2 & 8 & -2 & -2 & 0 & 1
\end{array}
\tag{13}
$$

Выпишем по этим данным общий алгоритм вычислений. Рассмотрим два шага метода РК с таблицей Бутчера (8):

$$\begin{array}{llll}
Y_1 = & y_0, & k_1 = & f(x_0, Y_1)\ , \\
Y_2 = & y_0 + ha_{21}k_1 & k_2 = & f(x_0 + c_2h, Y_2)\ , \\
Y_3 = & y_0 + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)\ , & k_3 = & f(x_0 + c_3h, Y_3)\ , \\
Y_4 = & y_0 + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)\ , & k_4 = & f(x_0 + c_4h, Y_4)\ , \\
Y_5 = & y_0 + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4)\ , & k_5 = & f(x_0 + h, Y_4), \\
x_1 = & x_0 + h,\ y_1 = Y_5 & & \\
Y_6 = & y_1 + ha_{21}k_5 & k_6 = & f(x_1 + c_2h, Y_6)\ , \\
Y_7 = & y_1 + h(a_{31}k_5 + a_{32}k_6)\ , & k_7 = & f(x_1 + c_3h, Y_7)\ , \\
Y_8 = & y_1 + h(a_{41}k_5 + a_{42}k_6 + a_{43}k_7)\ , & k_8 = & f(x_1 + c_4h, Y_8)\ , \\
Y_9 = & y_1 + h(b_1k_5 + b_2k_6 + b_3k_7 + b_4k_8)\ , & k_9 = & f(x_1 + h, Y_9), \\
x_2 = & x_1 + h,\ y_2 = Y_9 & &
\end{array} \tag{14}$$

Для оценки погрешности мы имеем формулу:

$$err \approx Ch\ (\beta_1 k_1 + \cdots + \beta_9 k_9)\,, \tag{15}$$

где для вектора $(\beta_1, \ldots, \beta_9)$ мы имеем два значения, указанные выше, (10, 11) для общего случая, (12) для “правила 3/8“ и (13) для метода (8).

Две эти формулы дают два вектора погрешности err_1 и err_2, причем величина погрешности каждой из них имеет тот же порядок, что и искомая погрешности метода, то есть $O(h^5)$. Поэтому для повышения надежности лучше брать не одну из этих величин, а сразу обе. Численные эксперименты показывают, что в качестве общей оценки локальной погрешности можно использовать величину

$$\frac{|err_1| + |err_2|}{20}\,. \tag{16}$$

Такая оценка получается существенно более точной, чем (6, 7).

5 Оценка погрешности по трем шагам

Полученную оценку можно сделать еще более точной, если взять не два шага, а три. В этом случае мы имеем 13 векторов

$$\begin{array}{llll}
k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} \\
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\
k_{31} & & &
\end{array}.$$

Взяв их линейную комбинацию с подходящими коэффициентами мы можем получить оценку погрешности с точностью до $O(h^6)$. Формулы расчета аналогичны (14), то есть для оценки погрешности применяем формулу вида:

$$err \approx Ch(\beta_1 k_1 + \cdots + \beta_{13} k_{13})\,,$$

где коэффициенты β_i являются решением системы из 17-ти уравнений Бутчера (условий порядка). Эти уравнения линейны относительно переменных β_i и система имеет двумерное пространство решений. В качестве свободных переменных можно выбрать β_{12}, β_{13}, остальные линейно выражаются через них. Таким образом, в общем случае β_i будут линейно выражаются через β_{12}, β_{13}, причем коэффициенты будут довольно сложными рациональными функциями от c_2, c_3, общая степень – до 7. Приведем поэтому решение для "правила 3/8":

$$err \approx \frac{h}{80}(12k_1 - 28k_2 - 20k_3 - 4k_4 + 101k_5 - 49k_6 - 65k_7 - 27k_8 + 97k_9 - 13k_{10} - 5k_{11} + k_{12})\,. \quad (17)$$

и для таблицы Бутчера (3)

$$err \approx \frac{h}{60}(6k_1 - 16k_2 - 16k_3 - 4k_4 + 73k_5 - 38k_6 - 38k_7 - 27k_8 + 71k_9 - 6k_{10} - 6k_{11} + k_{12})\,. \quad (18)$$

Такое решение имеет два достоинства. Во-первых, коэффициенты β_i небольшие по абсолютной величине, а во-вторых для получения оценки не требуется вычислять $k_{13} = f(x_0 + h, y_3)$, то есть неверно выбранный шаг можно будет заметить чуть раньше, чем при другом выборе коэффициентов.

Погрешность для классических методов РК имеет порядок $O(h^5)$, а предложенная выше формула находит ее с точностью до $O(h^6)$. Таким образом, формула (17) дает практически точное значение погрешности.

6 Пример вычислений

Приведем более детальный пример практических вычислений на примере задачи "Брюсселятор" [7]. Она задается уравнениями относительно переменных y_1, y_2:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2 + y_1^2 y_2 - 9.533 y_1, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= 8.533 y_1 - y_1^2 y_2, & y_2(0) &= 4.2665. \end{aligned}$$

Одношаговая оценка погрешности. Для правила "3/8" вектор ошибки за один шаг метода при малом h будет равен

$$e_0 \approx (3.75, -3.22) \cdot h^5,$$

Эта формула выполняется для достаточно малых h, вплоть до $h = 0.01$, когда ее погрешность доходит до 5%. Поэтому для этого уравнения при $h > 0.01$ не стоит ожидать точности и от остальных формул.

При этом

$$e_1 = h^2(-k_1 + 3k_2 - 3k_3 - 3k_4 + 4k_5)/4 \approx (-8.68, 7.69) \cdot h^5.$$

Реальная величина локальной ошибки примерно равна $0.9{\cdot}|e_1|$ при $h < 0.1$.

Для метода (3) вектор ошибки будет равен

$$e_0 \approx (3.95, -3.79) \cdot h^5,$$

при этом

$$e_1 = h^2(k_5 - k_4) \approx (4.33, -1.87) \cdot h^5.$$

Реальная величина локальной ошибки примерно равна $0.3{\cdot}|e_1|$ при $h < 0.1$.

Двухшаговая оценка погрешности. При тех же исходных данных, для правила "3/8" вектор ошибки за два шага будет равен

$$e_0 \approx (7.51, -6.45) \cdot h^5.$$

Два вектора ошибки, даваемые формулой (15) будут следующие:

$$e_1 \approx (-61, 103) \cdot h^5,$$

$$e_2 \approx (-214, 206) \cdot h^5.$$

Для данного уравнения можно полагать

$$|e_0| \approx 0.025 \cdot (|e_1| + |e_2|). \tag{19}$$

при $h < 0.01$.

Выпишем эти же вектора для метода (3) в тех же условиях:

$$\begin{array}{ll} e_0 \approx (\ 7.88, & -7.54 \ ) \cdot h^5, \\ e_1 \approx (\ -100, & 140 \ ) \cdot h^5, \\ e_2 \approx (\ -166, & 189 \ ) \cdot h^5. \end{array}$$

Соотношение (19) также будет выполняться и для этого метода опять же при $h < 0.01$.

Особо отметим, что для одношаговых и двухшаговых формул нет никакого разумного правила нахождения констант C из формул (6), (7) и (15). В различных же реальных задачах они различаются в сотни раз. А значит эти формулы можно использовать лишь для самой грубой, приблизительной оценки погрешности.

Трехшаговая оценка погрешности. Для обоих вариантов рассматриваемых методов, "правило 3/8" и (3), формулы (17) и (18) соответственно дают верное значение вектора ошибки. Относительная погрешность формул составляет 5% при $h = 0.01$, 0.3% при $h = 0.001$ и быстро уменьшается с уменьшением h.

7 Заключение

В последнее время, по крайней мере с начала 1990-х годов при разработке методов РК особое внимание уделялось вложенным методам (RK pairs) (см. например [1, 3, 4] и многие другие). Однако, таких методов гораздо меньше, чем обычных методов РК, и их нахождение оказывается гораздо более трудным, чем поиск обычных методов. В результате на сегодняшний день вложенных методов известно крайне мало, да и те далеко не всегда достаточно эффективны.

Способы оценки погрешности, предложенные в настоящей работе показывают, что для автоматического управления длиной шага нет необходимости искать вложенные методы. Для каждого метода РК можно предложить достаточно точный способ нахождения погрешности, не требующий дополнительных вычислений правой части системы уравнений. В работе это сделано для наиболее употребительных, классических методов РК, но нет сомнений, что это можно сделать и для всех остальных. Следует отметить, что для применения предложенной оценки требуется три одинаковых по величине шага, что делает процедуру смены шага несколько громоздкой.

С другой стороны, есть основания считать, что аналогичную оценку можно сделать и для случая трех последовательных шагов метода с различным шагом. Эту оценку планируется получить в ближайшее время.

В целом, если удастся продвинуться в указанных направлениях, то для вычислений с автоматическим выбором шага оказывается возможным применять наиболее эффективные методы РК, не ограничиваясь лишь теми, для которых имеются вложенные.

Список литературы

[1] *Butcher J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations (2nd ed.), John Wiley & Sons, 2008.

[2] *Butcher J. C., Chan T.M.H.* Multi-step zero approximations for stepsize control// Appl. Numer. Math., 34:167–177, 2000.

[3] *Jackiewicz Z.* General Linear Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons., 2009.

[4] *Jackiewicz Z., Verner J. H.* Derivation and implementation of two-step Runge–Kutta pairs.// Japan J. Indus. Appl. Math., 19:227–248, 2002.

[5] *Shampine L.F., Watts H. A.* Comparing Error Estimators for Runge-Kutta methods.// Math. Comp., 25:445–455, 1971.

[6] *Verner J.H.* Numerically optimal Runge-Kutta pairs with interpolants. //Numerical Algorithms, 53:383–396, 2010.

[7] *Wanner G., Hairer E., Nørsett S.P.* Solving ordinary differential equations I. Nonstiff Problems. 2Ed. Springer-Verlag, 2000.