ISSN 0025-567X

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 33
ВЫПУСК 3
МАРТ
1983

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 33, № 3 (1983)

ОБ ИРРЕГУЛЯРНОСТИ ДВОЙНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

С.И. Хашин

В 1904 году Де-Франчисом была доказана теорема [1]: пусть $\pi: X \to S$ — двойное накрытие гладкой рациональной поверхности S над $\mathbf{C}$ с гладким дивизором ветвления, и пусть $qX > 0$. Тогда существует гиперэллиптическая кривая C и морфизмы $f_X: X \to C$, $f_S: S \to \mathbf{P}^1$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_X} & C \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ S & \xrightarrow{f_S} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

коммутативная и дивизор ветвления на S содержится в слоях f_S. Здесь $\rho: C \to \mathbf{P}^1$ — естественное отображение. В 1908 году Комесатти доказал аналог этой теоремы для циклических накрытий степени 3.

Циклическое накрытие $\pi: X \to S$ гладких проективных поверхностей с дивизором ветвления $D \subset X$ будем называть расслаивающимся, если существует циклическое накрытие $\rho: C \to Z$ гладких проективных кривых и морфизмы $f_X: X \to C$, $f_S: S \to Z$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_X} & C \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ S & \xrightarrow{f_S} & Z \end{array}$$

коммутативна, D содержится в слоях f_X и $q(X) - q(S) = g(C) - g(Z)$.

Обозначим через τ образующую группы Галуа $G = \mathrm{Gal}(X/S) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\tau: X \to X$, $\tau^n = \mathrm{id}_X$. τ индуцирует отображение $\tau_*: A(X) \to A(X)$, где $A(X)$ — многообразие Альбанезе для X. Обозначим через $A_-(X)$ абелево многообразие $\mathrm{Ker}(\tau_* + \ldots + \tau_*^n) = \mathrm{Im}(\tau_* - 1)$. При этом $A_-(X) \oplus \pi^* A(S)$ изогенно $A(X)$ и $\dim A_-(X) = q(X) - q(S)$. Если циклическое накрытие $\pi: X \to S$ расслаивается, то $A_-(X) \simeq A_-(C)$ и $A_-(X)$ является обобщенным примианом.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $p_g(S) = 0$. Тогда всякое циклическое накрытие $\pi: X \to S$ степени 2 с гладким дивизором ветвления $D \subset X$ и с $q(X) > q(S)$ расслаивается.*

Доказательство. Так как $q(X) > q(S)$, существует $\omega \in H^0(\Omega_X^1)$ такая, что $\tau^*\omega = -\omega$. Если ω_1, ω_2 — две такие формы, то $\tau^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 \in H^0(\Omega_X^2)$. Но 2-формы инвариантные относительно τ — это те, которые поднимаются с S с помощью π^*. Следовательно, $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Так как $A_-(X) = \mathrm{Im}(\tau_* - 1)$, существует $g: X \to A_-(X)$, причем $g(X)$ порождает $A_-(X)$. По [2 с. 555] равенство нулю внешнего произведения антиинвариантных относительно τ 1-форм влечет, что $C = g(X)$ — гладкая проективная кривая. По τ индуцирует автоморфизм $\tau_*: A_-(X) \to A_-(X)$ и $\tau': C \to C$. Поверхность S естественно отображается в $Z = c/\tau'$. Теорема доказана.

Пусть $n > 2$ — простое число. Назовем наименьшим n-тором комплексный тор размерности $(n-1)/2$, который строится следующим образом. Возьмем Λ_0 — свободную абелеву группу с базисом $e_1, \ldots, e_{n-1}$ и определим отображение $\tau: \Lambda_0 \to \Lambda_0$ по формуле $e_1 \to e_2 \to \ldots \to e_{n-1} \to e_1 - \ldots - e_{n-1}$. Тогда $\tau^n = \mathrm{Id}_{\Lambda_0}$. τ продолжается до автоморфизма векторного пространства $W_{\mathbf{C}} = \Lambda_0 \otimes \mathbf{C}$. При этом $W_{\mathbf{C}}$ разлагается в прямую сумму $\bigoplus\limits_{k=1}^{n-1} W_k$ одномерных инвариантных относительно τ подпространств, $\tau v_k = \alpha^k v_k$ для $v_k \in W_k$ и $\alpha = e^{2\pi i/n}$. Кроме того, $W_{n-k} = \overline{W}_k$. Из каждой пары (W_k, W_{n-k}) выберем по подпространству и обозначим через W прямую сумму выбранных подпространств. Тогда $W_{\mathbf{C}} = W \oplus \overline{W}$ и образ Λ_0 в W является решеткой полного ранга. Соответствующий тор является простым абелевым многообразием.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $p_g(S) = 0$ и $\pi: X \to S$ — нерасслаивающееся циклическое накрытие простой степени $n > 2$. Тогда $A_-(X)$ изогенно A_0^k, где A_0 — некоторый наименьший n-тор.*

Доказательство. Пусть $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n — простое число, τ — образующая G. Тогда G-модуль Λ_0 является неприводимым G-модулем и всякий G-модуль изоморфен прямой сумме некоторого количества Λ_0. Рассмотрим комплексное векторное пространство $H^0(\Omega_X^1) = V$ с вложенной решеткой $\Lambda = H^1(X, \mathbf{Z})$ (по модулю кручения). $\tau: X \to X$ индуцирует линейное отображение $\tau^*: V \to V$, сохраняющее решетку Λ. $V = \bigoplus_{j=1}^{n-1} V_j$ и $\tau|_{V_j} = \alpha^j$. Пусть $v \in V_j$, $v' \in V_{n-j}$. Тогда $\tau^*(v \wedge v') = \alpha^j \alpha^{n-j} v \wedge v' = v \wedge v'$. Так как $p_g(S) = h^0(\Omega_S^2) = 0$, отсюда следует, что $v \wedge v' = 0$. Поэтому в каждой паре (V_j, V_{n-j}) одно из подпространств нулевое. Представим Λ в виде Λ_0^k. Тогда $V_{\mathbf{C}} = \Lambda \otimes \mathbf{C} \simeq W_{\mathbf{C}}^k$, $V_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{j=1}^{n-1} V_j$, $\tau|_{V_j} = \alpha^j$, $V_j \simeq W_j^k$ и пространство V является прямой суммой некоторых из V_j, по одному из каждой пары (V_j, V_{n-j}). Разложению $V_{\mathbf{C}} = V \oplus \overline{V}$ соответствует некоторый комплексный тор. Он является прямой суммой k экземпляров некоторого наименьшего n-тора. Многообразие $A_-(X)$ двойственно этому тору и, следовательно, так же изоморфно A_0^k для некоторого наименьшего n-тора A_0.

Следствие. Так как при $n = 3$ существует единственный наименьший 3-тор — гладкая эллиптическая кривая $\mathbf{C}/\{1, \alpha\}$, где $\alpha = e^{2\pi i/3}$, то всякое нерасслаивающееся циклическое накрытие степени 3 с $m = q(X) - q(S) > 0$ обладает m различными морфизмами f_{Xj}, f_{Sj} такими, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_{Xj}} & C_0 \\ \pi\downarrow & & \downarrow\rho \\ S & \xrightarrow{f_{Sj}} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

коммутативна и дивизор ветвления на X содержится в слоях f_{Xj}, —отображение факторизации $C_0 \to C_0/\tau'$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\pi: X \to S$ — циклическое накрытие произвольной степени n с гладким дивизором ветвления $D_X \subset X$, $D_X = \Sigma D_j$ — разложение D_X на неприводимые компоненты. Тогда*

а) *если $D_j^2 > 0$ для некоторого j, то $q(X) = q(S)$,*

б) *если $q(X) > q(S)$ и $D_j^2 = 0$ для некоторого j, то накрытие $\pi: X \to S$ расслаивается.*

ЛЕММА. *Пусть g: $X \to Y$ — морфизм гладкой проективной поверхности X на проективную поверхность Y и D — неприводимая кривая на X такая, что $g(D) = P$ — точка на Y. Тогда $D^2 < 0$.*

Эта лемма доказывается аналогично [3, гл. V упр. 5.7].

Для доказательства теоремы рассмотрим отображение g: $X \to A_-(X)$. Как легко проверить в локальных координатах $g(D_j)$ — точка для всякого j. Если $\dim g(X) = 2$, то по лемме $D_j^2 < 0$ для каждого j. Если $\dim g(X) = 1$, то $D_j^2 \leqslant 0$. Из этого следуют утверждения теоремы.

Замечание. В характеристике $p > 0$ аналогичные результаты не верны. Следующий пример был сообщен В. А. Исковских И. Р. Шафаревичем. Пусть K — гладкая унирациональная куммерова поверхность над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bar{A} & \xleftarrow{g} & F \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ K & \xleftarrow{f} & S \end{array}$$

где $\bar{A}$ — абелево многообразие с раздутыми точками второго порядка и α — соответствующий морфизм степени 2 на его куммерову поверхность, f: $S \to K$ — морфизм неособой рациональной поверхности на K, существующий по предположению унирациональности K, $F = \bar{A} \times_K S$. Тогда π — морфизм степени 2. Так как $f \circ \pi = \alpha \circ g$, морфизм g сюръективен. Но он пропускается через отображение Альбанезе. Следовательно, образ F в $\mathrm{Alb}(F)$ не кривая.

Автор выражает благодарность В. А. Исковских за постановку задачи и внимание к работе

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.V.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] De Franchis, I piani doppi totali di due o piu differenziali totali di prima specie, Atti della Acc. dei Lincei, v. **13**, 1904, Rend V.

[2] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry. New York-Berlin-Toronto. J. Wiley & Son, 1978.

[3] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, М., «Мир», 1981.