С. И. Хашин

ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ И КОНФИГУРАЦИИ ПРЯМЫХ

1. Действие группы S_{k+1} на множестве графов с k вершинами.

1.1. Для графа Γ с множеством вершин $(0, 1, \dots, k)$ положим

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ соединены ребром,} \\ +1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этих обозначениях множество $\mathrm{Gr}(k+1)$ графов с вершинами $(0, 1, \dots, k)$ является $k(k+1)/2$-мерным векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Группа подстановок S_{k+1} множества вершин естественным образом действует на этом векторном пространстве. В обозначениях книги [4] это представление изоморфно $M^{k-1,2}$.

Инверсией графа Γ с *центром* в вершине l назовем граф Γ', такой, что

$$\Gamma'_{ij} = \begin{cases} -\Gamma_{lj}, & \text{если } i = l, \\ \Gamma_{ij} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Графы Γ и Γ'' назовем *эквивалентными* ($\Gamma \sim \Gamma''$), если Γ'' получен из Γ с помощью конечного числа инверсий (в [5, с. 14] граф Γ'' назван "двоюродным братом" графа Γ). Множество классов эквивалентных графов с $k+1$ вершинами $(0, 1, \dots, k)$ обозначим через $\mathrm{PGr}(k+1)$. Имеем естественную проекцию

$$\mathrm{Gr}(k+1) \to \mathrm{PGr}(k+1),$$

напоминающую отображение $\mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}P^k$, что позволяет назвать элементы из $\mathrm{PGr}(k+1)$ *проективными графами*.

1.2. Теорема [5]. *В каждом классе эквивалентных графов из* $\mathrm{Gr}(k+1)$ *существует единственный граф* Γ^0 *такой, что* $\Gamma^0_{i,k+1} = 1$ *для* $i = 0, 1, \dots, k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета РФ по высшему образованию (шифр проекта 94-1.1-144) .

Доказательство. Для произвольного графа $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k+1)$ произведем инверсии с центрами в тех вершинах $i \in (0, 1, \ldots, k)$, для которых $\Gamma_{ik} = -1$. Полученный граф удовлетворяет условию теоремы. Его единственность очевидна. •

1.3. Для каждого графа Γ можно определить тройные индексы Γ_{ijl} следующим образом:

$$\Gamma_{ijl} = \Gamma_{ij}\Gamma_{il}\Gamma_{jl}.$$

При инволюции графа Γ с любым центром тройные индексы не изменяются, т.е. они являются проективными инвариантами графа. Для графа Γ^0 из теоремы 1.2 имеем $\Gamma^0_{ijl} = \Gamma^0_{ij}$, т.е. тройные индексы однозначно определяют проективный граф.

Из теоремы 1.2 следует, что

$$\mathrm{PGr}(k+1) \cong \mathrm{Gr}(k).$$

Так как симметрическая группа S_{k+1} действует на множестве $\mathrm{PGr}(k+1)$, то это действие можно перенести и на $\mathrm{Gr}(k)$. Более подробно, это действие выглядит так. Если подстановка $\sigma \in S_{k+1}$ оставляет последнюю вершину k на месте, то σ просто переставляет вершины графа. В случае транспозиции $\sigma = (l, k)$, меняющей местами вершины l и k, имеем

$$\sigma_*(\Gamma)_{li} = \Gamma_{li}, \quad \sigma_*(\Gamma)_{ij} = \Gamma_{ij}\Gamma_{li}\Gamma_{lj}$$

при $i, j \neq l$. Произвольную же подстановку из S_{k+1} можно представить в виде произведения транспозиции вида (l, k) и подстановки из S_k. Легко проверить, что полученное представление группы S_{k+1} является модулем Шпехта $S^{k-1,2}$ (см. [4]) размерности $k(k-1)/2$ над полем $\mathbb{F}_2$.

1.4. В дальнейшем нам потребуется полное описание множеств $\mathrm{Gr}(k)$ и $\mathrm{PGr}(k+1)$) при малых k.

Множество $\mathrm{Gr}(1) = \mathrm{PGr}(2)$ соответствует графам с одной вершиной и состоит из одного элемента, который мы будем обозначать Γ_0.

Множество $\mathrm{Gr}(2) = \mathrm{PGr}(3)$ соответствует графам с двумя вершинами и состоит из двух элементов, которые мы будем обозначать так: Γ_+ – две вершины, не соединенные ребром и Γ_- – две вершины, соединенные ребром.

Множество $\mathrm{Gr}(3) = \mathrm{PGr}(4)$ соответствует графам с тремя вершинами и состоит из восьми элементов, которые мы будем обозначать $\Gamma_{\pm\pm\pm}$, где $+$ или $-$ соответствует наличию или отсутствию ребра.

Множество $\mathrm{Gr}(4) = \mathrm{PGr}(5)$ соответствует графам с четырьмя вершинами и состоит из $2^6 = 64$ элементов.

1.5. Следствие. а) *Множество неупорядоченных графов с одной вершиной с точностью до проективной эквивалентности состоит из одного элемента.*

б) *Множество неупорядоченных графов с двумя вершинами с точностью до проективной эквивалентности состоит из двух элементов.*

в) *Множество неупорядоченных графов с тремя вершинами с точностью до проективной эквивалентности состоит из трех элементов, представленных, в обозначениях предыдущей теоремы, графами* Γ_{+++}, Γ_{++-} *и* Γ_{--}.

г) *Множество неупорядоченных графов с четырьмя вершинами с точностью до проективной эквивалентности состоит из семи элементов, представленных графами*

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

при этом зеркальная симметрия переводит друг в друга пары (1,7), (2,6), (3,5). *Тип* (4) *переходит сам в себя.*

2. Цепные комплексы и топологические пространства графов

2.1. Введем на множестве графов операторы взятия граней следующим образом. Если $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k+1)$, то при $i = 0, 1, \ldots, k$ через $d_i\Gamma$ обозначим граф, полученный из Γ выбрасыванием вершины i (и всех ребер, к ней ведущих). Через CGr обозначим свободную абелеву группу

$$\mathrm{CGr} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{CGr}^k = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(k+1)].$$

Для графа $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k+1)$ через $d(\Gamma)$ обозначим сумму

$$d(\Gamma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i(\Gamma) \in \mathrm{CGr}^{k-1} = \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(k)].$$

При этом, очевидно, $d(d(\Gamma)) = 0$.

2.2. При малых k цепной комплекс (CGr, d) можно полностью описать. При этом мы будем использовать обозначения п. 1.3. Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CGr}^0 &= \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(1)] = \mathbb{Z}[\Gamma_0], \quad d(\Gamma_0) = 0;\\
\mathrm{CGr}^1 &= \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(2)] = \mathbb{Z}[\Gamma_+, \Gamma_-], \quad d(\Gamma_+) = d(\Gamma_-) = 0;\\
\mathrm{CGr}^2 &= \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(3)] = \mathbb{Z}[\Gamma_{+++},\ \Gamma_{++-},\ \Gamma_{+-+},\ \Gamma_{+--},\\
&\qquad \Gamma_{-++},\ \Gamma_{-+-},\ \Gamma_{--+},\ \Gamma_{--}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\Gamma_{+++}) &= \Gamma_+, & d(\Gamma_{++-}) &= 2\Gamma_+ - \Gamma_-,\\
d(\Gamma_{+-+}) &= \Gamma_-, & d(\Gamma_{+--}) &= \Gamma_+,\\
d(\Gamma_{-+-}) &= \Gamma_+, & d(\Gamma_{-++}) &= 2\Gamma_+ - \Gamma_-,\\
d(\Gamma_{--}) &= \Gamma_-, & d(\Gamma_{--+}) &= 2\Gamma_- - \Gamma_+.
\end{aligned}$$

2.3. Теорема. *Цепной комплекс* (CGr, d) *гомотопически тривиален (т.е. существует цепная гомотопия, стягивающая его в нуль).*

Доказательство. Для графа $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k+1)$ через $D(\Gamma)$ обозначим граф, полученный из исходного добавлением еще одной вершины $(k+1)$, которая не соединена ребрами ни с одной из вершин, т.е. $D(\Gamma)_{ij} = \Gamma_{ij}$, при $i, j \leqslant k$ и $D\Gamma_{i,k+1} = 1$. Непосредственная проверка показывает, что $(Dd)\Gamma - (dD)\Gamma = \Gamma$. •

2.4. Следствие. *Цепной комплекс* (CGr, d) *ацикличен, т.е.*

$$H_i(\mathrm{CGr}, d) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } i = 0,\\ 0, & \text{если } i > 0. \end{cases}$$

2.5. Рассмотрим следующую симплициальную схему. В качестве множества всех k-мерных симплексов возьмем множество $\mathrm{Gr}(k+1)$, в качестве операторов вырождения – отображения $d_i\colon \mathrm{Gr}(k+1) \to \mathrm{Gr}(k)$. Геометрическую реализацию этой схемы обозначим через AGr. Другими словами, точка в пространстве AGr задается парой (Γ, ε), где $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k+1)$, а ε – точка из стандартного k-мерного симплекса T^k:

$$T^k = \{(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \varepsilon_j \geqslant 0, \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_k = 1\}.$$

Такое представление не однозначно, однако для каждой точки из AGr существует единственное представление в указанном виде, в котором $\varepsilon_i \neq 0$ при всех i.

По построению, симплициальный цепной комплекс пространства AGr совпадает с цепным комплексом CGr, и, следовательно, $H_i(\mathrm{AGr}) \cong H_i(\mathrm{CGr}) \cong 0$ при $i > 0$.

Можно предположить, что пространство AGr гомотопически тривиально, однако доказательство я пока предложить не могу.

2.6. Вспомним, что каждый граф с k вершинами можно рассматривать как проективный граф с $k+1$ вершинами. Построим соответствующий цепной комплекс и топологическое пространство для проективных графов. Хотя множества $\mathrm{PGr}(k+1)$ и $\mathrm{Gr}(k)$ совпадают, мы будем использовать для них различные обозначения, чтобы не возникало путаницы с предыдущим построением.

2.7. При $\Gamma \in \mathrm{PGr}(k+1)$ и $i = 0, 1, \ldots, k+1$ через $d_i(\Gamma)$ обозначим граф, полученный из Γ выбрасыванием вершины i (и всех ребер, к ней ведущих). Каждому проективному графу из $\mathrm{PGr}(k+1)$ соответствует единственный обычный граф с вершинами $0, 1, \ldots, k-1$. Следовательно, для графа с k вершинами мы получаем еще один оператор вырождения d_k. Непосредственная проверка показывает, что $(d_k(\Gamma))_{ij} = \Gamma_{ij}\Gamma_{ik}\Gamma_{jk}$. При этом $d_{k-1}d_k(\Gamma) = d_{k-1}d_{k-1}(\Gamma)$, т.е. результат выбрасывания двух последних вершин не зависит от того, в каком порядке они выбрасываются (для остальных пар это очевидно). Это позволяет использовать операторы d_i для построения следующего цепного комплекса.

2.8. Рассмотрим свободную абелеву группу

$$\mathrm{CPGr} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{CPGr}^k = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(k)] = \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\mathrm{Gr}(k-1)].$$

Для $\Gamma \in \mathrm{PGr}(k+1)$ положим

$$\widehat{d}(\Gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i d_i(\Gamma) \in \mathrm{CPGr}(k) = \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(k)].$$

При этом $\widehat{d}(\widehat{d}(\Gamma)) = 0$.

Цепной комплекс CPGr очень похож на CGr, отличие – только в операторе дифференцирования: $\widehat{d}$ получается из d путем добавления еще одного слагаемого – $(-1)^{k+1}d_{k+1}(\Gamma)$ (что и приводит к сдвигу размерности).

2.9. Так же как и в предыдущем случае, в малых размерностях комплекс CPGr легко описать:

$$\mathrm{CPGr}^0 = \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(0)] = \mathbb{Z};$$

$$\mathrm{CPGr}^1 = \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(1)] = \mathbb{Z}[\Gamma_0], \quad \widehat{d}(\Gamma_0) = 0;$$

$$\mathrm{CPGr}^2 = \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(2)] = \mathbb{Z}[\Gamma_+, \Gamma_-], \quad \widehat{d}(\Gamma_+) = \widehat{d}(\Gamma_-) = \Gamma_0.$$

$$\mathrm{CPGr}^3 = \mathbb{Z}[\mathrm{PGr}(3)] = \mathbb{Z}[\Gamma_{+++}, \Gamma_{++-}, \Gamma_{+-+}, \Gamma_{+--}, \Gamma_{-++}, \Gamma_{-+-}, \Gamma_{--+}, \Gamma_{---}];$$

$$\widehat{d}(\Gamma_{+++}) = 0, \qquad \widehat{d}(\Gamma_{++-}) = 2\Gamma_+ - 2\Gamma_-,$$
$$\widehat{d}(\Gamma_{+-+}) = 0, \qquad \widehat{d}(\Gamma_{+--}) = 0,$$
$$\widehat{d}(\Gamma_{-++}) = 0, \qquad \widehat{d}(\Gamma_{-+-}) = 0,$$
$$\widehat{d}(\Gamma_{--}) = 0, \qquad \widehat{d}(\Gamma_{--+}) = 2\Gamma_- - 2\Gamma_+.$$

2.10. Следствие.

$$H_0(\mathrm{CPGr}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathrm{CPGr}) = 0, \quad H_2(\mathrm{CPGr}) = \mathbb{Z}_2.$$

2.11. Замечание. Аналогичные, но более длинные выкладки показывают, что

$$H_3(\mathrm{CPGr}) = \mathbb{Z}_2.$$

2.12. Так же, как и для аффинного случая, мы можем определить топологическое пространство PGr, как геометрическую реализацию симплициальной схемы, построенной с помощью проективных графов. В отличие от пространства AGr, пространство PGr заведомо гомотопически нетривиально,– его группы гомологий совпадают с гомологиями цепного комплекса CPGr, младшие из которых выписаны выше. Кроме того, исходя из естественной проекции $\mathrm{Gr}(k) \to \mathrm{PGr}(k)$ мы получаем непрерывное отображение $\mathrm{PGr} \to \mathrm{AGr}$ – аналог отображения $\mathbb{R}^{k+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^k$.

2.13. Для графа $\Gamma \in \mathrm{Gr}(k)$ через $\mathrm{CGr}(\Gamma)$ обозначим порожденный этим графом подкомплекс в CGr, состоящий из самого графа Γ и всех его подграфов. Геометрическую реализацию соответствующей симплициальной схемы обозначим через $\mathrm{AGr}(\Gamma)$. По построению, $\mathrm{AGr}(\Gamma) \subset \mathrm{AGr}$.

Через $\mathrm{CPGr}(\Gamma)$ обозначим порожденный графом Γ (и рассматриваемый как проективный граф) подкомплекс в CPGr, состоящий из самого графа Γ и всех его подграфов. Геометрическую реализацию соответствующей симплициальной схемы обозначим через $\mathrm{PGr}(\Gamma)$. По построению, $\mathrm{PGr}(\Gamma) \subset \mathrm{PGr}$.

3. Конфигурации половинной размерности

3.1. Определения [1, 2]. *Векторной конфигурацией типа* (n, k) будем называть упорядоченный набор

$$\{A_0, \dots, A_k \subset V\}$$

из $k+1$ линейных подпространств размерности n в пространстве $V \cong \mathbb{R}^{2n}$. Конфигурация называется *неособой*, если $A_i \cap A_j = \{0\}$ для всех $i \neq j$. В частности, конфигурация из k скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}P^3$ имеет тип $(2, k-1)$. В дальнейшем все конфигурации будут предполагаться неособыми. Две векторные конфигурации в пространстве V называются *жестко изотопными*, если они принадлежат одной компоненте связности множества неособых конфигураций в V. Класс жесткой изотопности конфигурации A будем обозначать $[A]$. Через $R(n,k)$ обозначим множество классов жесткой изотопности неособых конфигураций из $k+1$ n-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$. Симметрическая группа S_{k+1} действует в $R(n,k)$ естественным образом. Множество неупорядоченных конфигураций, т.е. орбит этого действия, обозначим $U(n,k)$.

Если на пространствах A_i и V задать некоторые ориентации, то коэффициент зацепления двух подпространств определяется так: $\mathrm{lk}(A_i, A_j) = +1$, если ориентация на V совпадает с ориентацией, индуцированной с $A_i \oplus A_j$, и $\mathrm{lk}(A_i, A_j) = -1$ в противном случае. При этом тройной коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(A_i, A_j, A_l) = \mathrm{lk}(A_i, A_j)\,\mathrm{lk}(A_j, A_l)\,\mathrm{lk}(A_l, A_i)$ не зависит от выбора ориентации на подпространствах A_i. Две конфигурации называются *гомологически эквивалентными*, если для любой тройки индексов коэффициенты зацепления соответствующих подпространств совпадают. В дальнейшем пространство V всегда будет предполагаться ориентированным.

3.2. Определения. Пусть $A = \{A_0, \dots, A_k \subset V\}$ и $B = \{B_0, \dots, B_k \subset W\}$ – конфигурации типа (n,k) и (m,k), соответственно. Рассмотрим конфигурацию

$$A \oplus B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A_0 \oplus B_0, \dots, A_k \oplus B_k \subset V \oplus W\}$$

типа $(n+m, k)$. Отметим, что если n или m четно, то конфигурация $A \oplus B$ жестко изотопна $B \oplus A$ и

$$\mathrm{lk}(A_i \oplus B_i, A_j \oplus B_j) = \mathrm{lk}(A_i, A_j) \cdot \mathrm{lk}(B_i, B_j).$$

при любых i, j.

Ориентированной конфигурации $A = \{A_0, \dots, A_k\}$ (с заданными ориентациями на A_j) следующим образом сопоставим граф $\Gamma(A)$ с вершинами $\{0, \dots, k+1\}$:

$$\Gamma_{ij}(A) = \mathrm{lk}(A_i, Aj).$$

Смене ориентации на пространстве A_i соответствует инверсия графа $\Gamma(A)$ с центром в вершине i. Таким образом, неориентированной конфигурации A типа (n,k) соответствует проективный граф из $\mathrm{PGr}(k+1)$ (см. п. 1.1).

3.3. Ориентации на пространствах A_j можно выбрать согласованно, а именно, выберем ориентацию на последнем пространстве A_k произвольным способом, а на пространствах A_j, $j = 0, \dots, k-1$, выберем ее так, чтобы $\mathrm{lk}(A_i, A_k) = +1$. Тогда

$$\mathrm{lk}(A_i, A_j, A_k) = \mathrm{lk}(A_i, A_j),$$

т.е. коэффициент зацепления двух подпространств однозначно определен. Таким образом, гомологический тип конфигурации однозначно определяется выбором попарных коэффициентов зацепления $\mathrm{lk}(A_i, A_j)$, $0 \le i \le j < k$. В обозначениях п. 1.2 такой выбор ориентаций соответствует графу Γ^0 в классе эквивалентных графов. Этот граф обозначим $\Gamma^0(A)$. Итак, если $A = \{A_0, \dots, A_k\}$ – конфигурация типа (n, k), то $\Gamma^0(A)$ – граф с вершинами $(0, \dots, k-1)$ такой, что

$$\Gamma^0(A)_{ij} = \mathrm{lk}(A_i, Aj, A_k).$$

Из сказанного выше следует, что граф $\Gamma^0(A)$ однозначно определяет гомологический тип конфигурации A.

3.4. Замечание. Множество $U(\infty, k)$ гомологических типов неупорядоченных конфигураций совпадает с множеством неориентированных графов с k вершиной с точностью до действия группы S_{k+1}. При этом "зеркальная симметрия" [1] соответствует умножению всех чисел Γ_{ij} на -1.

3.5. Определение. Конфигурация $A = \{A_0, \dots, A_k \subset V\}$ называется *тривиальной*, если $\dim A_j = \dim V/2$ есть четное число и существует квадратичная форма $q \in S^2V^*$, такая, что ее ограничение на каждое из A_j равно нулю.

3.6. Предложение [3]. *Пусть n – четное натуральное число, V – ориентированное пространство размерности $2n$, $q \in S^2V^*$ – неособая квадратичная форма сигнатуры (n, n). На квадрике $q(v) = 0$ имеются два семейства n-мерных линейных подпространств. Коэффициент зацепления любых трех попарно непересекающихся подпространств из одного семейства равен $+1$ (при фиксированной ориентации V), для подпространств из другого он равен -1. Первое семейство будем обозначать A_+, второе – A_-. Пусть $e_+(n, k)$ (соответственно $e_-(n, k)$) – конфигурация, состоящая из k попарно непересекающихся подпространств семейства A_+ (соответственно A_-). Тогда*

а) *Конфигурации $e_+(n, k)$ и $e_-(n, k)$ не изотопны.*

б) *Всякая тривиальная конфигурация из k подпространств в V жестко изотопна $e_+(n, k)$ или $e_-(n, k)$.*

Таким образом, существует ровно два класса жесткой изотопности тривиальных конфигураций,– мы будем обозначать эти классы $E_+(n,k)$ и $E_-(n,k)$. Конфигурацию, жестко изотопную тривиальной, в дальнейшем также будем называть *тривиальной*. В графе $\Gamma^0(e_+)$ нет ни одного ребра, в графе $\Gamma^0(e_-)$ каждая пара вершин соединена ребром.

3.7. Определение. *Надстройкой* над конфигурацией A типа (n,k) называется конфигурация $\Sigma A = A \oplus e_+(2,k)$.

3.8. Теорема [2]. *При $n \geqslant k$ отображение надстройки*

$$\Sigma\colon R(n,k) \to R(n+2,k)$$

взаимно однозначно .

3.9. Следствие. *Рассмотрим цепочку отображений надстройки:*

$$R(2,k) \to R(4,k) \to R(6,k) \to \dots$$

Инъективный предел этой последовательности совпадает с $\mathrm{Gr}(k-1) \cong \mathrm{PGr}(k) \cong R(\infty,k)$. *Другими словами (см.* [3]*), стабильная эквивалентность конфигураций половиной размерности совпадает с гомологической эквивалентностью.*

Так как конфигурации не более пяти прямых однозначно определяются своим гомологическим типом [1], то множества $R(n,k)$ совпадают с множествами $\mathrm{PGr}(k+1) = \mathrm{Gr}(k)$ при $k \leqslant 3$ и при всех n. Описание множеств $\mathrm{PGr}(k+1) = \mathrm{Gr}(k)$ приведено в п. 1.4.

4. Матричные конфигурации

4.1. Определения [3]. *Неособой матричной конфигурацией типа* (n,k) будем называть упорядоченный набор $\{m_0,\dots,m_{k-1} \in M_n\}$ из k матриц, таких, что $\det(m_i - m_j) \neq 0 \quad \forall i,j,\ i \neq j$. Две конфигурации

$$\{m_0,\dots,m_{k-1} \in M_n\} \quad \text{и} \quad \{m'_0,\dots,m'_{k-1} \in M_n\}$$

называются *изотопными*, если они принадлежат одной компоненте связности множества неособых матричных конфигураций, *эквивалентными*, если существуют матрицы $P,Q,R \in M_n$, такие, что $\det(P) > 0$, $\det(Q) > 0$ и

$$m'_i = P\,m_i\,Q + R,$$

и *гомологически эквивалентными*, если

$$\operatorname{sign}\left(\det(m_i - m_j)\right) = \operatorname{sign}\left(\det(m'_i - m'_j)\right) \quad \forall i,j.$$

Очевидны импликации

$$(\text{эквивалентность}) \Rightarrow (\text{изотопность}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{гомологическая эквивалентность}).$$

4.2. Каждой векторной конфигурации $A = \{A_0, \dots, A_k\}$ типа (n, k) можно поставить в соответствие матричную конфигурацию того же типа. Для этого выберем в пространстве $V \cong \mathbb{R}^{2n}$ подпространство B размерности n такое, что $B \oplus A_k \cong V$. Тогда каждое из подпространств A_i, $i = 0, \dots, k-1$ может быть представлено в виде графика некоторого линейного отображения $\varphi_i \colon B \to A_k$. Условие неособости конфигурации равносильно невырожденности отображений $\varphi_i - \varphi_j$, $i, j = 0, \dots, n$. Зафиксируем ориентации пространств V и A_k и выберем на B ориентацию так, чтобы $\mathrm{lk}(B, A_k) = 1$. Матрицы m_i отображений φ_i в базисах, согласованных с выбранными ориентациями, образуют неособую матричную конфигурацию, по которой однозначно восстанавливается исходная векторная конфигурация. При замене базиса в пространствах A_k и B (но с той же ориентацией), а также при другом выборе пространства B, матричная конфигурация заменяется на эквивалентную. При любой жесткой изотопии векторных конфигураций, с точностью до линейного преобразования можно считать, что последнее пространство A_k остается неподвижным. Поэтому жестко изотопным векторным конфигурациям соответствуют жестко изотопные матричные. Таким образом, имеет место

4.3. Теорема [3]. *Множество классов изотопности неособых матричных конфигураций типа (n, k) совпадает с множеством $R(n, k)$. При этом прямой сумме конфигураций соответствует прямая сумма матричных конфигураций, и матричные конфигурации гомологичны тогда и только тогда, когда гомологичны соответствующие векторные конфигурации.*

Нетрудно проверить, что граф Γ, построенный по векторной конфигурации $\{A_0, \dots, A_k\}$, соответствующей матричной конфигурации $\{m_0, \dots, m_{k-1}\}$, устроен так:

$$\Gamma_{ij} = \mathrm{sign}\left(\det(m_i - m_j)\right).$$

4.4. Теорема [3]. *Пусть $m \in M_n$, $\det(m) > 0$ и пусть $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ – произвольные попарно различные действительные числа. Тогда матрицы $\{\lambda_0 m, \dots, \lambda_k m\}$ образуют тривиальную матричную конфигурацию, т.е. соответствующая им конфигурация векторных подпространств принадлежит классу $E_+(n, k)$.*

4.5. На множестве векторных конфигураций типа (n, k) действует симметрическая группа S_{k+1}. Из сказанного выше следует, что это действие можно перенести и на множество классов эквивалентности неособых матричных конфигураций того же типа (n, k). Отметим, что S_{k+1} действует не на множестве самих матричных конфигураций, а на классах их эквивалентности. Если подстановка $\sigma \in S_{k+1}$ оставляет на месте число k, то действие σ_* очевидно:

$$\sigma_*\{m_0, \dots, m_{k-1}\} = \{m_{\sigma(0)}, \dots, m_{\sigma(k-1)}\}.$$

4.6. Теорема. *Пусть $\sigma = (i, k) \in S_{k+2}$ – транспозиция. Тогда для любой неособой матричной конфигурации $m = \{m_0, \dots, m_{k-1}\}$ типа (n, k) имеем*

$$\sigma_* m = \{(m_0 - m_i)^{-1}, \dots, (m_{i-1} - m_i)^{-1}, 0,$$
$$(m_{i+1} - m_i)^{-1}, \dots, (m_{k-1} - m_i)^{-1}\}.$$

Доказательство. Предположив, что $\det(m_i) \neq 0$, непосредственным вычислением в координатах получим:

$$\sigma_* m = \{m_i(m_0 - m_i)^{-1}, \dots, m_i(m_{i-1} - m_i)^{-1}, 0,$$
$$m_i(m_{i+1} - m_i)^{-1}, \dots, m_i(m_{k-1} - m_i)^{-1}\},$$

а эта конфигурация эквивалентна требуемой. •

5. Цепные комплексы и симплициальные схемы

5.1. Определение. Пусть $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ и $b = (b_0, \dots, b_{l-1})$ – неособые матричные конфигурации типа (n, k) и (n, l), соответственно. Через ab обозначим матричную конфигурацию

$$c = (b_0 + \varepsilon a_0, \dots, b_0 + \varepsilon a_{k-1}, b_2, \dots, b_{l-1})$$

типа $(n, k + l - 1)$ с достаточно малым ε. Очевидно, что класс конфигурации c зависит только от классов конфигураций a и b.

5.2. Лемма. *Пусть a, b, c – неособые матричные конфигурации типов (n, k), (n, l), (n, m) соответственно. Знаком $\sim$ будем обозначать отношение изотопности. Тогда*

а) $(ab)c \sim a(bc)$.

б) *Если $ab \sim ac$, то $b \sim c$.*

в) *Если $ba \sim ca$, то $b \sim c$.*

г) *Если e – конфигурация типа $(n, 1)$, т.е. состоит из единственной матрицы, то $ea \sim ae \sim a$.*

д) *Если $c \sim ab$, то $\Sigma c \sim (\Sigma a)(\Sigma b)$.*

5.3. Следствие. *При натуральном n и при $n = \infty$ множество*

$$R(n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R(n,k)$$

относительно указанной операции образует полугруппу с сокращением и с единицей. Отображение надстройки $\Sigma\colon R(n) \to R(n+2)$ является гомоморфизмом полугрупп.

5.4. Определение. Через $\mathrm{Cnf}(n)$ обозначим полугрупповое кольцо полугруппы $R(n)$:

$$\mathrm{Cnf}(n) = \mathbb{Z}[R(n)] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Cnf}(n,k),$$

где

$$\mathrm{Cnf}(n,k) = \mathbb{Z}[R(n,k)].$$

Согласно доказанному выше, $\mathrm{Cnf}(n)$ – ассоциативное градуированное кольцо с единицей, и отображение надстройки

$$\Sigma\colon\ \mathrm{Cnf}(n) \to \mathrm{Cnf}(n+2)$$

является гомоморфизмом колец.

5.5. Определение. Пусть $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ – неособая матричная конфигурация типа (n,k).

(а) Через $d_i(a)$ обозначим матричную конфигурацию, получающуюся из a выбрасыванием матрицы a_i.

(б) Через $d(a)$ обозначим сумму

$$d(a) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i d_i(a) \in \mathrm{Cnf}(n, k-1) = \mathbb{Z}[R(n, k-1)].$$

При этом, очевидно, $d(d(a)) = 0$.

5.6. Теорема. *Цепной комплекс*

$$0 \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,0) \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,1) \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,2) \leftarrow \dots \qquad (*)$$

гомотопически тривиален.

Доказательство. Пусть $x = (0, E_n)$ – матричная конфигурация типа $(n,1)$, состоящая из нулевой и единичной матриц. Определим цепную гомотопию $D\colon \mathrm{Cnf}(n,k) \to \mathrm{Cnf}(n,k+1)$, $D(a) = a \cdot x$, т.е. для неособой матричной конфигурации $a = (a_0, \dots, a_k)$ типа (n,k) имеем $D(a) = (\varepsilon a_0, \dots, \varepsilon a_k, E_n)$ для достаточно малого ε. Поэтому $D(d(a)) + d(D(a)) = a$. •

5.7. Следствие. *Цепной комплекс* $\mathrm{Cnf}(n)$ *ацикличен, т.е.*

$$H_0(\mathrm{Cnf}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{если } i = 0, \\ 0, & \textit{если } i > 0. \end{cases}$$

5.8. Для данного четного натурального n определим симплициальную схему следующим образом. В качестве множества k-мерных симплексов возьмем множество $R(n,k)$, а в качестве операторов вырождения – отображения $d_i\colon R(n,k) \to R(n,k-1)$. Геометрическую реализацию этой схемы обозначим через $\mathrm{ACnf}(n)$. Другими словами, точка в пространстве $\mathrm{ACnf}(n)$ задается парой (a,ε), где $a \in R(n,k)$, $\varepsilon \in T^k$. Такое представление не однозначно, однако для каждой точки из $\mathrm{ACnf}(n)$ существует единственное представление в указанном виде, в котором $\varepsilon_i \neq 0$ при всех i. При этом отображения надстройки продолжаются до непрерывного отображения

$$\Sigma\colon \mathrm{ACnf}(n) \to \mathrm{ACnf}(n+2).$$

Таким образом, мы имеем цепочку пространств и непрерывных отображений

$$\mathrm{ACnf}(2) \to \mathrm{ACnf}(4) \to \mathrm{ACnf}(6) \to \dots,$$

инъективный предел которой – пространство $\mathrm{ACnf}(\infty)$, строящееся из множеств $R(\infty,k)$ аналогично $\mathrm{ACnf}(n)$.

По построению, симплициальный цепной комплекс пространства $\mathrm{ACnf}(n)$ совпадает с $\mathrm{Cnf}(n)$, и, следовательно,

$$H_i(\mathrm{Cnf}(n)) \cong H_i(\mathrm{TCnf}(n)) \cong 0 \text{ при } i > 0.$$

6. Проективный цепной комплекс и симплициальная схема

6.1. Исходя из конфигураций подпространств половинной размерности, в заключение можно построить еще один цепной комплекс и соответствующее топологическое пространство, которые связаны с комплексом $\mathrm{Cnf}(n)$ и пространством $\mathrm{ACnf}(n)$ примерно так же, как связано аффинное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с проективным $\mathbb{R}P^n$.

6.2. Определение. Пусть $l = (l_0, \dots, l_{k+1}) \in R(n,k)$ – неособая векторная конфигурация типа (n,k).

(a) Через $d_i(l)$ обозначим конфигурацию, получающуюся из l выбрасыванием матрицы l_i.

(б) Через $\widehat{d}(l)$ обозначим сумму

$$\widehat{d}(l) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i d_i(l) \in \mathrm{Cnf}(n, k-1) = \mathbb{Z}[R(n, k-1)].$$

При этом, очевидно, $\widehat{d}(\widehat{d}(a)) = 0$. Мы получили цепной комплекс

$$0 \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,0) \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,1) \leftarrow \mathrm{Cnf}(n,2) \leftarrow \dots \qquad (**)$$

Аналогично тому, как в предыдущем параграфе было построено пространство $\mathrm{ACnf}(n)$, теперь мы можем построить пространство $\mathrm{PCnf}(n)$.

Так как множество классов изотопности неособых матричных конфигураций типа (n,k) совпадает с множеством классов изотопности неособых векторных конфигураций типа (n,k), то новый цепной комплекс выглядит почти так же, как и предыдущий (аффинный). Отличие заключается в том, что для одного элемента $l \in R(n,k)$ количество слагаемых у оператора d равно $k+1$, а у оператора $\widehat{d}$ оно равно $k+2$. То есть если в пространстве $\mathrm{ACnf}(n)$ каждой конфигурации типа (n,k) соответствует k-мерный симплекс, то в пространстве $\mathrm{PCnf}(n)$ – $(k+1)$-мерный.

В соответствии с построением, мы имеем непрерывное отображение $\mathrm{ACnf}(n) \to \mathrm{PCnf}(n)$, при котором прообразом каждого симплекса $l \in \mathrm{PCnf}(n)$ являются всевозможные классы конфигураций, получающиеся добавлением к l еще одного подпространства.

Литература

1. О. Я. Виро, *Топологические задачи о прямых и точках трехмерного пространства.* — Докл. Акад. Наук СССР **284**, № 5 (1985), 1049–1052.
2. В. Ф. Мазуровский, *Неособые конфигурации k-мерных подпространств $(2k+1)$-мерного вещественного проективного пространства.* — Вестник ЛГУ. Сер.1. № 3 (1990), 21–26.
3. S. I. Hashin and V. F. Mazurovskiĭ, *Stable equivalence of real projective configurations.* (в печати).
4. Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп.* М., Мир, 1982.
5. H. Crapo and R. Penne, *Chirality and the isotopy classification of the skew lines in projective 3-space.* — Adv. in Math. **103** no. 1, 1–106.

Ивановский
государственный университет

Поступило 20 июня 1995г.