Научные труды ИвГУ. Математика. 1999. Выпуск 2

УДК 512.543

# АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНЫМИ $p$-ГРУППАМИ

АЗАРОВ Д.Н., МОЛДАВАНСКИЙ Д.И.

Доказано, что если сверхразрешимая группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами для некоторого нечетного простого числа $p$, то группа $G$ нильпотентна. Сверхразрешимая группа $G$ аппроксимируется конечными 2-группами тогда и только тогда, когда все элементы конечного порядка группы $G$ являются 2-элементами.

Напомним, что группа $G$ называется полициклической, если она обладает субнормальным рядом с циклическими факторами, и сверхразрешимой, если у нее есть нормальный ряд с циклическими факторами. По известной теореме Гирша (см. напр. [1]) произвольная полициклическая группа является финитно аппроксимируемой. С другой стороны, К.Сексенбаев [2] доказал, что если полициклическая группа аппроксимируема конечными $p$-группами для каждого числа $p$ из произвольного бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна. Для сверхразрешимых групп аппроксимируемость конечными $p$-группами оказывается еще более жестким ограничением:

**Теорема 1.** *Если сверхразрешимая группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами для некоторого нечетного простого числа $p$, то группа $G$ нильпотентна.*

В самом деле, если группа $G$ конечна, то утверждение очевидно. Если $G$ бесконечна, то нетрудно показать, что она содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу $A$, порождаемую элементом $a$. Для любого элемента $x \in G$ мы должны иметь $x^{-1}ax = a^{\pm 1}$. Если предположить, что для некоторого элемента $x$ выполнено равенство $x^{-1}ax = a^{-1}$, то для любого числа $k > 0$ будет иметь место равенство $x^{-k}ax^k = a^{(-1)^k}$. Отсюда и из нечетности числа $p$ следует, что по модулю произвольной нормальной подгруппы конечного $p$-индекса группы $G$ будем иметь $a = a^{-1}$, т.е. $a = 1$. Таким образом, подгруппа $A$ содержится в центре $Z$ группы $G$, и так как фактор-группа $G/Z$ также аппроксимируема конечными $p$-группами, индукция по рангу Гирша дает нильпотентность группы $G/Z$ , а потому — и группы $G$.

Существуют сверхразрешимые ненильпотентные группы, аппроксимируемые конечными 2-группами; простым примером такой группы является свободное произведение двух циклических групп порядка 2. Более того, легко получить описание всех таких групп: следующая теорема утверждает, что очевидное необходимое условие аппроксимируемости конечными 2-группами для сверхразрешимых групп является и достаточным.

**Теорема 2.** *Сверхразрешимая группа $G$ аппроксимируема конечными 2-группами тогда и только тогда, когда все элементы конечного порядка группы $G$ являются 2-элементами.*

Поскольку произвольная сверхразрешимая группа почти нильпотентна и почти вся без кручения, группа $G$ содержит максимальную нормальную подгруппу $H$ конечного индекса, являющуюся нильпотентной группой без кручения. Так как по теореме Грюнберга [1] конечно порожденные нильпотентные группы без кручения аппроксимируются конечными $p$-группами при любом $p$, остается понять, что фактор-группа $G/H$ является 2-группой. Если это не так и если $p > 2$ — наибольшее простое число, делящее порядок группы $G/H$, то существует нормальная подгруппа $K$ группы $G$ такая, что $H \leq K$ и фактор-группа $K/H$ имеет порядок $p$. Тогда группа $K$ аппроксимируется конечными $p$-группами и в силу теоремы 1 является нильпотентной. Так как при этом $K$ не имеет кручения, это противоречит максимальности подгруппы $H$.

## Список использованной литературы

1. *Grunberg K.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29 – 62.

2. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. Вып. 3. С. 79 – 83.