Научные труды ИвГУ. Математика. Выпуск 4 (2001)

УДК 512.543

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ ГРУППАХ С ОДИНАКОВЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ КОНЕЧНЫХ ГОМОМОРФНЫХ ОБРАЗОВ

МОЛДАВАНСКИЙ Д.И.

Доказано, что семейства конечных гомоморфных образов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы и ее фактор-группы по неединичной нормальной подгруппе различны. С использованием этого результата показано, что конечно порожденная группа, являющаяся конечным расширением свободной группы и имеющая те же конечные гомоморфные образы, что и некоторая свободная группа,сама является свободной группой.

1. Пусть $\mathcal{F}(G)$ обозначает семейство всех конечных гомоморфных образов группы G. Очевидно, что равенство $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$ далеко не всегда означает, что группы G и H изоморфны. Более того, нетрудно видеть, что для любой группы G можно указать не изоморфную ей группу H такую, что имеет место равенство $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$; очевидным примером может служить прямое произведение $H = G \times K$, где K — бесконечная простая группа, не изоморфная никакой подгруппе группы G. Поэтому при формулировке вопроса об однозначной (с точностью до изоморфизма) определяемости группы G семейством $\mathcal{F}(G)$ следует ограничиваться группами того или иного класса. Так как любая конечная группа G среди всех конечных групп семейством $\mathcal{F}(G)$ определяется однозначно, весьма перспективным с этой точки

зрения представляется класс конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп.

Тем не менее, хорошо известно, что и для групп этого класса рассматриваемый вопрос в общем случае решается отрицательно. В. Н. Ремесленников [2] привел пример двух неизоморфных 2-порожденных 4-ступенно нильпотентных групп с одинаковыми конечными гомоморфными образами. В работе Г. Баумслага [3] указана серия пар неизоморфных метациклических групп, также имеющих одни и те же конечные гомоморфные образы. С другой стороны, существует не так уж много результатов противоположного характера. Уместно напомнить, в частности, что до сих пор неизвестен ответ на вопрос В. Н. Ремесленникова, будут ли изоморфными две конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов, если одна из них — свободная или свободная разрешимая (см.: [1, вопрос 5.48]).

Как пример результата положительного характера упомянем доказанное в [5] утверждение о том, что группа $G_k = (a, b;\ a^{-1}ba = b^k)$ $(k \neq 0)$ однозначно определяется семейством своих конечных гомоморфных образов в классе всех финитно аппроксимируемых групп с одним определяющим соотношением. Целью данной работы является доказательство еще двух утверждений аналогичного направления.

Теорема 1. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и N — нормальная подгруппа группы G. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, то $N = 1$.*

Этот результат можно рассматривать как некоторое обобщение известной теоремы А. И. Мальцева о хопфовости любой финитно аппроксимируемой группы с конечным числом порождающих. Теорема 1 используется в доказательстве следующего утверждения, возможно, представляющего некоторый интерес в связи с упомянутым вопросом В. Н. Ремесленникова:

Теорема 2. *Пусть конечно порожденная группа G является конечным расширением свободной группы. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$ для некоторой свободной группы H, то группы G и H изоморфны.*

2. Докажем теорему 1. Для произвольного множества слов V и любой группы G, как обычно, $V(G)$ обозначает вербальную подгруппу группы G, соответствующую множеству V. Легко видеть, что для любых двух групп G и H из равенства $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$ следует, что для произвольного множества V имеет место равенство $\mathcal{F}(G/V(G)) = \mathcal{F}(H/(V(H))$.

Действительно, если некоторая группа X принадлежит семейству $\mathcal{F}(G)$, то она является гомоморфным образом группы G, и потому существует гомоморфизм $\varphi : H \to X$. Так как все слова из множества V являются тождествами группы X, подгруппа $V(H)$ содержится в ядре φ, откуда и вытекает, что группа X является гомоморфным образом группы $H/V(H)$. Таким образом,

$$\mathcal{F}(G/V(G)) \subseteq \mathcal{F}(H/(V(H)),$$

и аналогично доказывается противоположное включение.

Пусть теперь G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и N — нормальная подгруппа группы такая, что $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$. Пусть R — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G и пусть V — множество всех тождеств фактор-группы G/R. Тогда имеет место включение $V(G) \subseteq R$. Кроме того, ввиду локальной конечности любого многообразия, порождаемого конечной группой, группы $G/(V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ конечны. Поскольку

$$\mathcal{F}(G/V(G)) = \mathcal{F}((G/N)/V(G/N)),$$

группы $G/(V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ изоморфны, и так как

$$V(G/N) = V(G)N/N,$$

группа $(G/N)/V(G/N)$ изоморфна группе $(G/N)/V(G)N)$. Поэтому подгруппы $V(G)$ и $V(G)N$ имеют в группе G равные конечные индексы, и, поскольку $V(G) \subseteq V(G)N$, отсюда следует, что $V(G) = V(G)N$. Это означает справедливость включения $N \subseteq V(G)$, а так как $V(G) \subseteq R$, мы видим, что подгруппа N содержится в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G. Равенство $N = 1$ следует теперь из финитной аппроксимируемости группы G.

3. Для доказательства теоремы 2 воспользуемся следующим результатом работы [4]. *Если конечно порожденная группа G является конечным расширением свободной группы, то G есть HNN-расширение с конечной системой проходных букв $t_1, t_2, \ldots, t_r$, базовая группа K которого является древесным произведением конечного семейства конечных групп (и потому содержит лишь конечное число попарно неизоморфных конечных подгрупп).*

Пусть N обозначает нормальное замыкание в группе G подгруппы K. Очевидно, что фактор-группа G/N является свободной группой с множеством свободных порождающих $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Очевидно также, что подгруппа N лежит в ядре любого гомоморфизма группы G на конечную группу X, порядок которой взаимно прост с порядком каждой конечной подгруппы группы K, и потому любая такая группа X, являющаяся гомоморфным образом группы G, является гомоморфным образом и группы G/N.

Пусть теперь H — такая свободная группа, что $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$. Очевидно, что ранг группы H должен быть конечным; обозначим его через s. Мы покажем, что $r = s$. Заметим тут же, что поскольку это будет означать, что группы G/N и H изоморфны, то утверждение теоремы 2 явится тогда непосредственным следствием теоремы 1.

Выберем такое простое число p, что порядок любой конечной подгруппы группы K не делится на p (напомним, что K содержит лишь конечное число попарно неизоморфных конечных подгрупп). Для натурального числа $n \geq 1$ пусть $A_n(p)$ обозначает прямое произведение n циклических групп порядка p. Так как группа $A_n(p)$ является линейным пространством над полем из p элементов, любая система ее порождающих должна содержать не менее n элементов. Группа $A_r(p)$, будучи гомоморфным образом группы G, должна быть гомоморфным образом и группы H, и потому $s \geq r$. Аналогично, группа $A_s(p)$должна быть гомоморфным образом группы G, а потому, как отмечено выше, — и группы G/N, откуда $r \geq s$. Таким образом, $r = s$, и теорема 2 доказана.

Список использованной литературы

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск, 1995.
2. *Ремесленников В. Н.* Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и Логика. 1967. Т. 6. Вып. 2. С. 61 - 75.
3. *Baumslag G.* Residually finite groups with the same finite images // Compos. Math. 1974. Vol. 29. № 3 P. 249 - 252.
4. *Karrass A., Pietrowski A.,Solitar D.* (1973). Finite and infinite cyclic extensions of free groups // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 16. P. 458 - 466.
5. *Moldavanski D., Sibyakova N.* On the finite images of some one-relator groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 123. P. 2017 - 2020