Д. И. Молдаванский

УДК 512.543

Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп

Аннотация

Получен критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения в случае, когда связанные подгруппы лежат в центре базовой группы и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям финитной отделимости. С его помощью установлено, в частности, что если HNN-расширение почти полициклической группы с собственными центральными связанными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой, то все циклические подгруппы этой группы финитно отделимы.

Abstract

The criterion of residual finiteness of the HNN-extension is obtained in the case when associated subgroups are situated in the center of base group and satisfy some further conditions of finite separability. By means of this result it is proved that if the HNN-extension of polycyclic-by-finite group with proper central associated subgroups is residually finite then all cyclic subgroups of it are finitely separable.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Стандартная методика получения результатов о финитной аппроксимируемости HNN-расширений групп основана на использовании понятия совместимой подгруппы, которое аналогично понятию пары совместимых подгрупп свободных сомножителей свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами (см. [4]). Если G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G, $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм и

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$$

— HNN-расширение (базовой) группы G с проходной буквой t и связанными (относительно φ) подгруппами A и B, то условия финитной аппроксимируемости группы G^* могут быть выражены как некоторые свойства семейства всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса базовой группы G (точные определения и формулировки см. ниже в $\S\,2$). Несмотря на весьма общий характер этих условий, а также наличие существенного пробела между необходимыми и достаточными условиями, в ряде случаев они позволяют получать конкретные критерии финитной аппроксимируемости группы G^*. Так, в случае, когда G является абелевой группой с конечным числом порождающих, соответствующий критерий указан в работе [2]. Основным результатом данной статьи является получение критерия финитной аппроксимируемости группы G^* при более слабых предположениях относительно базовой группы G, а именно здесь будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе AB и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы. Построим две последовательности U_k и V_k подгрупп группы G, полагая $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.*

Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$.

Заметим далее, что финитная аппроксимируемость группы G^* почти обеспечивается следующим свойством базовой группы G:

каждая нормальная подгруппа конечного индекса содержит некоторую (A, B, φ)-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса.

Действительно, если при этом подгруппы A и B группы G являются финитно отделимыми, то будет выполняться упомянутое выше общее достаточное условие финитной аппроксимируемости группы G^* (см. предложение 1 из $\S\,2$). Оказывается, что при ограничениях, накладываемых в теореме 1 на группу G и ее подгруппы A и B, это условие является и необходимым для финитной аппроксимируемости группы G^*:

Теорема 2. *Пусть группа G и ее подгруппы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Если группа G^* финитно аппроксимируема, то в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы*

G содержится некоторая (A, B, φ)-совместимая нормальная подгруппа, имеющая в G конечный индекс.

Напомним, что группа G называется π_c-группой, если все ее циклические подгруппы финитно отделимы. Очевидно, что произвольная π_c-группа является финитно аппроксимируемой. Обратное, вообще говоря, не имеет места; простейшим контрпримером, как известно, является группа Баумслага – Солитэра вида $\langle a, t;\ t^{-1}at = a^k\rangle$, где $|k| > 1$. Эта группа является HNN-расширением бесконечной циклической группы, и единственное условие из формулировки теоремы 1, которому она не удовлетворяет, состоит в совпадении с базовой группой одной из связанных подгрупп. С другой стороны, легко показать (см., напр., [6]), что если группа G является π_c-группой, подгруппы A и B финитно отделимы и каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит некоторую (A, B, φ)-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса, то группа G^* является π_c-группой. Поэтому из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Пусть группа G и ее подгруппы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1, и пусть, кроме того, G является π_c-группой. Группа G^* является π_c-группой тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

В самом деле, если группа G^* финитно аппроксимируема, то поскольку $A \neq G$ и $B \neq G$, из предложения 1 (ниже) следует, что подгруппы A и B финитно отделимы.

Укажем на более конкретное применение полученных результатов. Из теоремы 6 работы [1] следует, что в произвольной полициклической группе все подгруппы являются финитно отделимыми. Так как свойство финитной отделимости всех подгрупп сохраняется при конечных расширениях, имеем

Следствие 2. *Пусть группа G является конечным расширением полициклической группы и A и B — собственные центральные подгруппы группы G. Пусть последовательности U_k и V_k подгрупп группы G определены как в теореме 1. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$;*
(2) *группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ является финитно аппроксимируемой;*

(3) *группа G^* является π_c-группой.*

В том случае, когда группа G является конечно порожденной абелевой, равносильность утверждений (2) и (3) вытекает из результатов работ [2] и [7]. Равносильность утверждений (1) и (2) дает в этом случае критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения, отличный от упомянутого выше критерия из работы [2]. Можно предположить, что в ряде случаев применение критерия, указанного здесь, оказывается более предпочтительным.

Например, пусть G — свободная абелева группа с базой $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ее подгруппы A и B порождаются системами элементов

$$a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, \ldots a_r^{p_r} \qquad \text{и} \qquad a_1^{q_1}, a_2^{q_2}, \ldots a_r^{q_r}$$

соответственно, где p_i и q_i — ненулевые целые числа и $r \leqslant n$, и изоморфизм φ подгруппы A на подгруппу B определяется отображением $a_i^{p_i} \mapsto a_i^{q_i} (i = 1, 2, \ldots, r)$. Предположим еще, что $A \neq G$ и $B \neq G$ (т. е. при $r = n$ для некоторых i и j выполнены неравенства $|p_i| > 1$ и $|q_j| > 1$). Следствие 3 из работы [2] утверждает, что группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, 2, \ldots, r$ $|p_i| = |q_i|$.

Для вывода этого результата из указанного здесь критерия запишем числа p_i и q_i в виде $p_i = u_i d_i$ и $q_i = v_i d_i$, где d_i — наибольший общий делитель чисел p_i и q_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Непосредственная индукция показывает, что для любого $k \geqslant 0$ подгруппы U_k и V_k порождаются системами элементов

$$a_1^{u_1 v_1^k d_1}, a_2^{u_2 v_2^k d_2}, \ldots a_r^{u_r v_r^k d_r} \qquad \text{и} \qquad a_1^{v_1^{k+1} d_1}, a_2^{v_2^{k+1} d_2}, \ldots a_r^{v_r^{k+1} d_r}$$

соответственно. Поэтому равенство $U_n = V_n$ равносильно системе равенств $|u_i v_i^n d_i| = |v_i^{n+1} d_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, что и дает требуемое утверждение.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на предлагаемом здесь методе, который можно назвать методом спуска и подъема совместимых подгрупп. Суть этого метода состоит в том, что если G — некоторая группа с подгруппами A и B и изоморфизмом $\varphi : A \to B$ и если $U = A \cap B$ и $V = U\varphi$, то интересующие нас свойства семейства всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G наследуются семейством всех (U, V, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы B, а при некоторых дополнительных предположениях можно доказать и обратное. Детали изложены в § 3.

§ 2. Предварительные замечания

В этом параграфе напоминаются основные понятия, лежащие в основе методики, упоминавшейся в § 1, и приводятся некоторые предварительные результаты.

Пусть G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Подгруппа H группы G называется (A, B, φ)-совместимой, если $(A \cap H)\varphi = B \cap H$. Легко видеть, что если H — нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение $\varphi_{H} : AH/H \to BH/H$, (корректно) определяемое правилом $(aH)\varphi_{H} = (a\varphi)H$ (где $a \in A$), является изоморфизмом подгруппы AH/H фактор-группы G/H на ее подгруппу BH/H. Поэтому наряду с HNN-расширением $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$ группы G можно построить HNN-расширение

$$G_H^* = (G/H, t;\ t^{-1}AH/H\,t = BH/H,\ \varphi_{H})$$

группы G/H. Очевидно, что естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H может быть продолжен до гомоморфизма ρ_{H} группы G^* на группу G_H^* (переводящего t в t).

Напомним еще, что семейство $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называется фильтрацией, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если A — подгруппа группы G, то фильтрация $\mathcal{N}$ называется A-фильтрацией, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе A, найдется подгруппа $N \in \mathcal{N}$ такая, что $g \notin AN$. Если A и B — две подгруппы группы G, то фильтрацию $\mathcal{N}$ будем называть (A, B)-фильтрацией, если она одновременно является и A-фильтрацией, и B-фильтрацией.

Пусть $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [3, 5]):

Предложение 1. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть*

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$$

— *HNN-расширение группы G. Тогда*

1. *если группа G^* финитно аппроксимируема, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией;*
2. *если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* финитно аппроксимируема;*
3. *если A и B — собственные центральные подгруппы группы G, то группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Нам понадобятся еще два утверждения, связанные со свойствами семейства $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$.

Предложение 2. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Если подгруппа A содержится в подгруппе B и семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является A-фильтрацией, то $A = B$.*

В самом деле, рассуждая от противного, предположим существование элемента $b \in B$, не принадлежащего подгруппе A. По условию найдется такая подгруппа $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$, что $b \notin AH$, и потому элемент bH фактор-группы G/H принадлежит подгруппе BH/H и не принадлежит подгруппе AH/H. С другой стороны, поскольку подгруппы AH/H и BH/H конечны и изоморфны и $AH/H \leqslant BH/H$, мы должны иметь $AH/H = BH/H$.

Если попрежнему A и B — подгруппы некоторой группы G и φ — изоморфизм между ними, символом $H_G(A, B, \varphi)$ будем обозначать наибольшую из подгрупп H группы G таких, что $H\varphi = H$. (Существование такой подгруппы следует из леммы Цорна, но может быть установлено (см. [2]) и непосредственным построением.)

Предложение 3. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Если обе подгруппы A и B имеют конечный индекс в группе G и семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то индекс подгруппы $H_G(A, B, \varphi)$ в группе G также конечен.*

Действительно, по условию для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе A или подгруппе B, найдется подгруппа $M \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ такая, что $g \notin AM$ или $g \notin BM$ соответственно.

Это означает, что смежный класс gA или смежный класс gB не имеет общих элементов с подгруппой M. Поскольку подгруппы A и B имеют конечный индекс в группе G и семейство $\mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ замкнуто относительно конечных пересечений, отсюда следует существование такой подгруппы $M \in \mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$, которая не имеет общих элементов с каждым смежным классом по подгруппе A, отличным от A, и с каждым смежным классом по подгруппе B, отличным от B, и потому лежит в пересечении $A \cap B$. Следовательно, $M\varphi = (A \cap M)\varphi = B \cap M = M$, так что подгруппа $H_G(A,B,\varphi)$ содержит M и потому имеет конечный индекс в группе G.

§ 3. Спуск и подъем совместимых подгрупп

Пусть, как и выше, G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $U = A \cap B$ и $V = U\varphi$. Таким образом, U и V — подгруппы группы B, и φ — изоморфизм подгруппы U на подгруппу V (здесь и ниже ограничение отображения φ на произвольную подгруппу группы A обозначается тем же символом φ). В этом параграфе будет показано, что при определенных ограничениях семейства $\mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ и $\mathcal{F}_B(U,V,\varphi)$ некоторыми свойствами обладают одновременно. В самом общем случае имеет место

Предложение 4. *Для любой подгруппы $H \in \mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ подгруппа $D = B \cap H$ принадлежит семейству $\mathcal{F}_B(U,V,\varphi)$.*

Если семейство $\mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ является фильтрацией ((A,B)-фильтрацией), то семейство $\mathcal{F}_B(U,V,\varphi)$ также является фильтрацией (соответственно, (U,V)-фильтрацией).

Доказательство. Покажем сначала, что если подгруппа H группы G принадлежит семейству $\mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$, то подгруппа $D = B \cap H$ лежит в семействе $\mathcal{F}_B(U,V,\varphi)$. Действительно, поскольку

$$U \cap D = U \cap (B \cap H) = U \cap H = U \cap (A \cap H),$$

то используя инъективность отображения φ и равенство $(A \cap H)\varphi = B \cap H$, получаем

$$(U \cap D)\varphi = (U \cap (A \cap H))\varphi = U\varphi \cap (A \cap H)\varphi = V \cap (B \cap H) = V \cap D.$$

Если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией, то для любого элемента $b \in B$, отличного от 1, найдется подгруппа $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$, не содержащая этого элемента. Тогда элемент b не входит и в подгруппу $D = B \cap H$, принадлежащую семейству $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, так что это семейство также является фильтрацией.

Пусть, наконец, семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией и элемент $b \in B$ не принадлежит подгруппе U. Тогда элемент b не входит в подгруппу A, и потому для подходящей подгруппы $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ подгруппа AH не содержит b. Если снова $D = B \cap H$, то b не входит в подгруппу UD, поскольку $UD \leqslant AH$. Если элемент b не принадлежит подгруппе V и $b = a\varphi$, где $a \in A$, то $a \notin U$ и потому $a \notin B$. Выберем подгруппу $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ так, чтобы $a \notin BH$. Так как для $D = B \cap H$ имеем

$$(VD)\varphi^{-1} = V\varphi^{-1} \cdot (B \cap H)\varphi^{-1} = U \cdot (A \cap H) \subseteq BH,$$

мы видим, что $b \notin VD$. Таким образом, семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией, и предложение 4 доказано.

Покажем далее, что при определенных ограничениях на группу G и ее подгруппы A и B справедливо и обратное утверждение. Здесь удобно ввести следующее понятие.

Подгруппу H группы G будем называть *подъемом подгруппы* $D \in \mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, если H входит в семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ и $B \cap H = D$.

Предложение 5. *Пусть подгруппы A и B лежат в центре группы G и пусть все подгруппы группы G, принадлежащие подгруппе $K = AB$ и имеющие в K конечный индекс, финитно отделимы в G. Тогда*

(1) *для любой подгруппы из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ существует подъем;*

(2) *если каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы B содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, то и каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$.*

Доказательство. Пусть D — произвольная подгруппа группы B, принадлежащая семейству $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$; таким образом, D имеет конечный индекс в B и $(U \cap D)\varphi = V \cap D$. Тогда $C = D\varphi^{-1}$ является подгруппой конечного индекса группы A, и потому, как легко видеть, подгруппа CD имеет конечный индекс в группе $K = AB$. Утверждается, что

$$A \cap CD = C \quad \text{и} \quad B \cap CD = D.$$

Действительно, поскольку подгруппы U и C лежат в подгруппе A, имеем $(U \cap C)\varphi = U\varphi \cap C\varphi = V \cap D = (U \cap D)\varphi$, откуда ввиду инъективности φ следует, что $U \cap C = U \cap D$. Если теперь элемент g группы G принадлежит подгруппе $A \cap CD$, то $g = xy$, где $x \in C$, $y \in D$. Так как элементы g и x лежат в подгруппе A, то элемент y принадлежит подгруппе

$$A \cap D = A \cap B \cap D = U \cap D = U \cap C,$$

и потому $g \in C$, так что $A \cap CD \subseteq C$. Включение $B \cap CD \subseteq D$ доказывается аналогично, и так как противоположные включения очевидны, требуемые равенства доказаны.

Так как по предположению подгруппа CD финитно отделима в группе G, фактор-группа G/CD является финитно аппроксимируемой. Ее подгруппа K/CD конечна, и потому в группе G/CD существует нормальная подгруппа конечного индекса H/CD, пересечение которой с подгруппой K/CD тривиально. Следовательно, H — такая подгруппа конечного индекса группы G, что $H \cap K = CD$. Поскольку тогда $A \cap H = A \cap K \cap H = A \cap CD = C$, $B \cap H = B \cap K \cap H = B \cap CD = D$ и $C\varphi = D$, подгруппа H входит в семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ и, таким образом, является искомым подъемом подгруппы D.

Предположим теперь, что произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы B содержит хотя бы одну подгруппу из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$. Пусть M — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Полагаем $R = A \cap M$, $S = B \cap M$ и $T = S \cap R\varphi$. Тогда R — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, S и T — нормальные подгруппы конечного индекса группы B. По предположению найдется подгруппа $D \in \mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ такая, что $D \leqslant T$. Тогда подгруппа $C = D\varphi^{-1}$ содержится в подгруппе R и потому $CD \leqslant M$. Значит фактор-группа G/CD содержит нормальную подгруппу конечного индекса M/CD. Очевидно поэтому, что подгруппу H/CD конечного индекса группы G/CD, пересечение которой с подгруппой K/CD тривиально, можно выбрать так, чтобы $H/CD \leqslant M/CD$. Следовательно, подъем H подгруппы D содержится в M, и предложение полностью доказано.

Докажем теперь частичное обращение второго утверждения предложения 4.

Предложение 6. *Пусть подгруппы A и B лежат в центре группы G и пусть все подгруппы группы G, принадлежащие подгруппе $K = AB$ и имеющие в K конечный индекс, финитно отделимы в G. Тогда если семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Доказательство. Предположим, что семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что для любого неединичного элемента $g \in G$ можно найти подгруппу D из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ и такой ее подъем $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$, что $g \notin H$, а если элемент g не принадлежит подгруппе A или подгруппе B, то подгруппу D и ее подъем H можно выбрать так, чтобы g не входил в подгруппу AH или в подгруппу BH соответственно. Рассмотрим для этого следующие случаи.

Случай 1. Элемент g отличен от 1 и принадлежит подгруппе U. Поскольку семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является фильтрацией, в нем найдется не содержащая этого элемента подгруппа D. Очевидно, что произвольный подъем H этой подгруппы также не содержит элемента g.

Случай 2. Элемент g принадлежит подгруппе B и не входит в подгруппу A. Тогда $g \notin U$, и пользуясь тем, что семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является U-фильтрацией, выберем подгруппу D так, чтобы $g \notin UD$. Покажем, что если H — построенный в доказательстве предложения 5 подъем подгруппы D, то $g \notin AH$ (и тем более, $g \notin H$). Действительно, если $g = ax$, где $a \in A$ и $x \in H$, то элемент $x = a^{-1}g$ принадлежит подгруппе K, а потому и подгруппе $H \cap K = CD$ (где, как и выше, $C = D\varphi^{-1}$). Следовательно, $x = cd$, где $c \in C$ и $d \in D$, откуда $gd^{-1} = ac \in A$, и так как $gd^{-1} \in B$, получаем $gd^{-1} \in U$ и $g \in UD$, что противоречит выбору подгруппы D.

Случай 3. Элемент g принадлежит подгруппе A и не входит в подгруппу B. В этом случае снова $g \notin U$, и потому элемент $g\varphi$ группы B не входит в подгруппу V. Воспользовавшись тем, что семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является V-фильтрацией, выберем подгруппу D так, чтобы $g\varphi \notin VD$, а потому $g \notin UC$ (где опять $C = D\varphi^{-1}$). Тогда для построенного в предложении 5 подъема H подгруппы D будем иметь $g \notin BH$. Действительно, если $g = bx$, где $b \in B$ и $x \in H$, то элемент $x = gb^{-1}$ принадлежит подгруппе K, а потому и подгруппе CD. Следовательно, $x = cd$, где $c \in C$ и $d \in D$, откуда $gc^{-1} = bd \in U$ и $g = (bd)c \in UC$, — противоречие.

Случай 4. Элемент g принадлежит подгруппе $K = AB$, но не входит ни в подгруппу A, ни в подгруппу B. Тогда $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$ и оба эти элемента не принадлежат подгруппе U. Поскольку тогда в группе B элемент $a\varphi$ не входит в подгруппу V, и поскольку семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ замкнуто относительно конечных пересечений, подгруппу D из этого семейства можно выбрать так, чтобы $b \notin UD$ и $a\varphi \notin VD$, а потому $a \notin UC$ (где $C = D\varphi^{-1}$). Покажем, что тогда для построенного в предложении 5 подъема H подгруппы D ни одна из подгрупп AH и BH не содержит элемента g.

В самом деле, если $g = a_1x$, где $a_1 \in A$ и $x \in H$, то из равенства $ab = a_1x$ следует, что $x \in K$, и потому $x \in H \cap K = CD$. Поэтому $x = cd$, где $c \in C$ и $d \in D$, и из равенства $ab = a_1cd$ получаем $bd^{-1} = a^{-1}a_1c \in U$, откуда $b = (a^{-1}a_1c)d \in UD$, что противоречит выбору подгруппы D. Аналогично, если $g = b_1x$, где $b_1 \in B$ и $x \in H$, то снова имеем $x \in K = CD$, и используя те же обозначения, из равенства $ab = b_1cd$ получаем $c^{-1}a = b^{-1}b_1d \in U$ и $a = (b^{-1}b_1d)c \in UC$.

Случай 5. Элемент g не принадлежит подгруппе K. Выбрав произвольную подгруппу D из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, рассмотрим фактор-группу G/CD, где снова $C = D\varphi^{-1}$. Элемент $g(CD)$ этой фактор-группы не принадлежит ее конечной подгруппе K/CD, и так как группа G/CD финитно аппроксимируема, она обладает нормальной подгруппой конечного индекса H/CD, которая тривиально пересекается с подгруппой K/CD и по модулю которой элемент $g(CD)$ отличен от всех элементов этой подгруппы. Тогда H является подъемом подгруппы D и элемент g не принадлежит подгруппе KH, а потому и каждой из подгрупп AH и BH.

Очевидно, что утверждение, сформулированное в начале доказательства, следует из рассмотренных случаев, и предложение 6 доказано.

Естественный вопрос о возможности подъема фильтрации даже при ограничениях, накладываемых на группу G и ее подгруппы A и B условием предложения 6, решается отрицательно, как показывает следующий пример.

Пусть A и B — свободные абелевы группы со счетными базами $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ соответственно, и пусть φ — изоморфизм группы A на группу B такой, что $a_i\varphi = b_i$ $(i = 1, 2, \dots)$. Пусть U — подгруппа группы A, порожденная элементами $a_1 a_k^k$, где $k = 2, 3, \dots$, и V — подгруппа группы B, порожденная элементами $b_1 b_k^k$, где $k = 2, 3, \dots$. Обозначим через G обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами U и V, отождествляемыми относительно изоморфизма φ. Иначе говоря, группа G является фактор-группой прямого произведения $A \times B$ по подгруппе $N = \{u(u\varphi)^{-1} | u \in U\}$.

Группы A и B естественным образом вложимы в группу G, и мы можем считать их подгруппами этой группы. При этом $G = AB$ и $A \cap B = U = V$. Поскольку в произвольной группе все подгруппы конечного индекса финитно отделимы, для группы G и ее подгрупп A и B с изоморфизмом φ между ними выполнены все условия предложения 6.

Так как изоморфизм φ действует тождественно на подгруппе $U = A \cap B$, каждая подгруппа группы B является (U, V, φ)-совместимой, и из финитной аппроксимируемости группы B следует, что семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является фильтрацией. С другой стороны, ни одно семейство подгрупп конечного индекса группы G не может быть фильтрацией, так как эта группа не является финитно аппроксимируемой. В самом деле, для любого числа $k \geqslant 2$ в группе G выполнено равенство $a_1 a_k^k = b_1 b_k^k$. Значит из элемента $g = a_1 b_1^{-1}$ (отличного от 1, так как a_1 не входит в подгруппу U) извлекаются корни любой степени, так что этот элемент принадлежит каждой подгруппе конечного индекса группы G.

§ 4. Доказательство теорем

Пусть снова G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Полагаем $U_0 = A$, $V_0 = B$, и если для некоторого $k \geqslant 0$ подгруппы U_k и V_k уже определены, полагаем $U_{k+1} = U_k \cap V_k$ и $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.

Часть “только тогда”в формулировке теоремы 1 вытекает из предложения 1 и следующего утверждения:

Предложение 7. *Пусть подгруппы A и B являются конечно порожденными абелевыми. Если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является*

(A, B)-фильтрацией, то для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$.

Доказательство. Пусть семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией. Из предложения 4 очевидной индукцией следует, что тогда для любого $k \geqslant 0$ семейство $\mathcal{F}_{V_k}(U_{k+1}, V_{k+1}, \varphi)$ является (U_{k+1}, V_{k+1})-фильтрацией.

Договоримся через $r(X)$ обозначать обычный ранг абелевой группы X. Заметим, что если Y — подгруппа конечно порожденной абелевой группы X, то $r(Y) \leqslant r(X)$ и $r(Y) = r(X)$ тогда и только тогда, когда индекс подгруппы Y в группе X конечен.

Поскольку последовательность подгрупп U_0, U_1, $\ldots$ конечно порожденной абелевой группы A является убывающей, то для некоторого номера m должно выполняться равенство $r(U_{m+1}) = r(U_m)$. Так как для всех $k \geqslant 0$ имеем $V_k = U_k\varphi$, отсюда следует, что $r(U_{m+1}) = r(V_m)$ и $r(V_{m+1}) = r(V_m)$, так что подгруппы U_{m+1} и V_{m+1} имеют конечный индекс в группе V_m.

Пусть $H = H_G(A, B, \varphi)$ — наибольшая подгруппа группы G такая, что $H\varphi = H$. Легко видеть, что для каждого $k \geqslant 0$ имеют место включения $H \leqslant U_k$ и $H \leqslant V_k$, и потому подгруппа $H_{V_k}(U_{k+1}, V_{k+1}, \varphi)$ совпадает с H. Из предложения 3 теперь следует, что подгруппа H имеет конечный индекс в группе V_m, а потому и в группе U_m. Так как для всех $k \geqslant m$ справедливы включения $H \leqslant U_k \leqslant U_m$, отсюда следует, что для некоторого $n \geqslant m$ должно выполняться равенство $U_{n+1} = U_n$. Поскольку $U_{n+1} = U_n \cap V_n$, это означает, что $U_n \leqslant V_n$, и из предложения 2 теперь следует, что $U_n = V_n$.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать

Предложение 8. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе AB и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы. Если для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Действительно, из равенства $U_n = V_n$ следует равенство $U_{n+1} = V_{n+1} = V_n$, так что отображение φ является автоморфизмом группы V_n, а семейство $\mathcal{F}_{V_n}(U_{n+1}, V_{n+1}, \varphi)$ совпадает с семейством всех подгрупп конечного индекса группы V_n, инвариантных относительно φ.

Так как группа V_n является абелевой с конечным числом порождающих, она финитно аппроксимируема и в каждой ее подгруппе конечного индекса содержится характеристическая подгруппа конечного индекса. Поэтому семейство $\mathcal{F}_{V_n}(U_{n+1}, V_{n+1}, \varphi)$ является фильтрацией и, очевидно, — (U_{n+1}, V_{n+1})-фильтрацией. Остается заметить, что если для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant n$, семейство $\mathcal{F}_{V_k}(U_{k+1}, V_{k+1}, \varphi)$ является (U_{k+1}, V_{k+1})-фильтрацией, то поскольку при $k \geqslant 1$ группа V_{k-1} абелева с конечным числом порождающих, в силу предложения 6 семейство $\mathcal{F}_{V_{k-1}}(U_k, V_k, \varphi)$ (где $V_{-1} = G$) является (U_k, V_k)-фильтрацией.

Доказательство теоремы 2 происходит по той же схеме, что и доказательство предложения 8. В силу теоремы 1 финитная аппроксимируемость группы G^* означает, что для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$. Как только что было отмечено, тогда каждая подгруппа конечного индекса группы V_n содержит некоторую $(U_{n+1}, V_{n+1}, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса. Остается воспользоваться вторым утверждением предложения 5.

Список использованной литературы

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
2. *Andreadakis S., Raptis E. and Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50. P. 495–501.
3. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions// Communs in Algebra. 1978. Vol. 6. P.179–194.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups.// Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P.193–209.
5. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma// J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232–234.
6. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. V. 30. P. 285–293.
7. *Wong P. C. and Tang C. K.* Cyclic subgroup separability of certain HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Rocky Mt. J. Math. 1999. V. 29. P. 347–356.