

УДК 512.543

Е. А. Иванова, Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Доказано, что для любого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел конечно порожденная нильпотентная группа аппроксимируема относительно сопряженности конечными π -группами тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π -группой, а фактор-группа по периодической части абелева.

It is proved that for any non-empty proper subset π of the set of all primes a finitely generated nilpotent group is conjugacy separable in the class of finite π -groups if and only if the torsion subgroup of it is a finite π -group and the quotient group by the torsion subgroup is abelian.

1. Напомним, что если \mathcal{K} — некоторый класс групп, то группа G называется \mathcal{K} -аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a этой группы найдется гомоморфизм группы G на некоторую группу X , принадлежащую классу \mathcal{K} (или, короче, \mathcal{K} -группу), при котором образ элемента a отличен от единицы. Группа G называется \mathcal{K} -аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на некоторую \mathcal{K} -группу X , образы элементов a и b относительно которого не сопряжены в X .

Очевидно, что произвольная группа, \mathcal{K} -аппроксимируемая относительно сопряженности, является \mathcal{K} -аппроксимируемой. Поскольку обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, представляет интерес нахождение классов групп, \mathcal{K} -аппроксимируемость которых влечет их \mathcal{K} -аппроксимируемость относительно сопряженности. Наиболее изученным (и хронологически первым) здесь является случай, когда \mathcal{K} совпадает с классом \mathcal{F} всех конечных групп; в этом случае говорят о финитной аппроксимируемости и о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Так, К. Грюнберг

[4] показал, что конечно порожденные нильпотентные группы финитно аппроксимируемы, а затем Н. Блэкберн [5] установил их финитную аппроксимируемость относительно сопряженности. С другой стороны, известная теорема Ф. Холла утверждает финитную аппроксимируемость любой конечно порожденной метабелевой группы, но существует построенный М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко [1] пример конечно порожденной метабелевой группы, не являющейся финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

В тех случаях, когда для некоторого класса групп доказана \mathcal{F} -аппроксимируемость или \mathcal{F} -аппроксимируемость относительно сопряженности, естественно возникает вопрос, будут ли эти группы \mathcal{K} -аппроксимируемыми или \mathcal{K} -аппроксимируемыми относительно сопряженности для некоторого подкласса \mathcal{K} класса \mathcal{F} . Наиболее часто с этой точки зрения рассматривается класс \mathcal{F}_p всех конечных p -групп. Например, финитная аппроксимируемость произвольных свободных групп установлена в работе А. И. Мальцева [2]. К. Грюнберг [4] доказал, что для любого простого числа p каждая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является \mathcal{F}_p -аппроксимируемой. Отсюда и из известной теоремы В. Магнуса об \mathcal{N} -аппроксимируемости свободных групп, где \mathcal{N} — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, следует, что для любого простого числа p произвольная свободная группа является \mathcal{F}_p -аппроксимируемой, а \mathcal{F}_p -аппроксимируемость относительно сопряженности всех свободных групп доказана в статье [3].

Как только что отмечалось, произвольная конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является \mathcal{F}_p -аппроксимируемой для любого простого числа p . Оказывается, тем не менее, что для произвольного простого числа p конечно порожденная нильпотентная группа без кручения является \mathcal{F}_p -аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она абелева. В действительности, имеет место следующее более общее утверждение.

Теорема. Пусть π — собственное (непустое) подмножество множества всех простых чисел. Конечно порожденная нильпотентная группа G \mathcal{F}_π -аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является \mathcal{F}_π -группой, а фактор-группа $G/\tau(G)$ абелева.

(Через \mathcal{F}_π здесь обозначается класс всех конечных π -групп, т. е.

всех конечных групп, порядки которых делятся лишь на простые числа, принадлежащие множеству π .)

2. Доказательство теоремы начнем с одного замечания общего характера.

Пусть \mathcal{K} — некоторый класс групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется \mathcal{K} -отделимой, если для любого элемента a этой группы, не принадлежащего подгруппе H , найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую \mathcal{K} -группу такой, что $a\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно, что если класс \mathcal{K} гомоморфно замкнут, то для любой нормальной подгруппы N группы G \mathcal{K} -аппроксимируемость фактор-группы G/N равносильна \mathcal{K} -отделимости подгруппы N . Отсюда следует, что если класс \mathcal{K} гомоморфно замкнут, наследственен и замкнут относительно прямых произведений конечного числа сомножителей, то фактор-группа \mathcal{K} -аппроксимируемой группы по любой ее конечной нормальной подгруппе \mathcal{K} -аппроксимируема.

Для формулировки аналогичных утверждений для свойства \mathcal{K} -аппроксимируемости относительно сопряженности будет служить следующее понятие.

Подмножество M группы G назовем сопряженно \mathcal{K} -отделимым, если для любого элемента a этой группы, не сопряженного ни с одним элементом из M , найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую \mathcal{K} -группу X такой, что в группе X элемент $a\varphi$ не сопряжен ни с одним элементом из $M\varphi$. Иначе говоря, подмножество M группы G является сопряженно \mathcal{K} -отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из M , найдется нормальная подгруппа H группы G такая, что фактор-группа G/H входит в \mathcal{K} и в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из множества MH .

Предложение 1. Пусть \mathcal{K} — гомоморфно замкнутый класс групп. Для любой группы G и произвольной ее нормальной подгруппы N фактор-группа G/N является \mathcal{K} -аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы G по подгруппе N сопряженно \mathcal{K} -отделим.

Доказательство. Покажем сначала, что если некоторый смежный класс группы G по подгруппе N не является сопряженно \mathcal{K} -отдели-

мым, то фактор-группа G/N не является \mathcal{K} -аппроксимируемой относительно сопряженности.

Действительно, если элемент a группы G не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN , то элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе. С другой стороны, если в каждом гомоморфном образе группы G , являющемся \mathcal{K} -группой, образ элемента a сопряжен с образом некоторого элемента из класса bN и если φ — гомоморфизм группы G/N на некоторую \mathcal{K} -группу X , то произведение естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \rightarrow G/N$ и гомоморфизма φ отображает группу G на группу X , и потому для некоторых элементов $g \in G$ и $c \in N$ имеет место равенство

$$(g(\varepsilon\varphi))^{-1}a(\varepsilon\varphi)g(\varepsilon\varphi) = (bc)(\varepsilon\varphi),$$

т. е. $((gN)\varphi)^{-1}(aN)\varphi(gN)\varphi = (bN)\varphi$. Следовательно, образы элементов aN и bN при любом гомоморфизме группы G/N на произвольную \mathcal{K} -группу оказываются сопряженными.

Обратно, пусть каждый смежный класс группы G по подгруппе N является сопряженно \mathcal{K} -отделимым. Если элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе, то в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN , и потому элемент a не сопряжен в группе G ни с одним элементом из смежного класса bNH для некоторой нормальной подгруппы H группы G , фактор-группа G/H по которой принадлежит классу \mathcal{K} . Это означает, что элементы aNH и bNH гомоморфного образа G/NH группы G/N не являются сопряженными. Остается заметить, что ввиду гомоморфной замкнутости класса \mathcal{K} фактор-группа $G/NH \simeq (G/H)/(NH/H)$ является \mathcal{K} -группой.

Непосредственно из предложения 1 следует

Предложение 2. *Пусть класс \mathcal{K} гомоморфно замкнут, наследствен и замкнут относительно прямых произведений конечного числа сомножителей. Если группа G \mathcal{K} -аппроксимируема относительно сопряженности, то и фактор-группа G/N группы G по любой ее конечной нормальной подгруппе N является \mathcal{K} -аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Действительно, из наследственности класса \mathcal{K} и его замкнутости относительно прямых произведений конечного числа сомножителей

следует, что в произвольной группе G семейство всех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат классу \mathcal{K} , замкнуто относительно конечных пересечений. Отсюда, в свою очередь, следует, что если группа G \mathcal{K} -аппроксимируема относительно сопряженности, то каждое ее конечное подмножество является сопряженно \mathcal{K} -отделимым.

Пусть теперь π — произвольное множество простых чисел и пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа, \mathcal{F}_π -аппроксимируемая относительно сопряженности. Так как тогда группа G является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой, то ее периодическая часть $\tau(G)$ должна быть \mathcal{F}_π -группой. Поскольку фактор-группа $G/\tau(G)$ не содержит элементов конечного порядка и ввиду предложения 2 является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности, для доказательства необходимости условий теоремы остается доказать

Предложение 3. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения и π — собственное подмножество множества всех простых чисел. Если группа G является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности, то она абелева.*

Доказательство. Пусть $1 = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_n = G$ — верхний центральный ряд группы G . Если предположить, рассуждая от противного, что группа G не является абелевой, то $n \geq 2$. Выберем в подгруппе Z_2 элемент a , не принадлежащий подгруппе Z_1 . Поскольку для любого элемента $g \in G$ коммутатор $[a, g]$ входит в Z_1 , имеем $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$. Так как элемент a не принадлежит центру Z_1 группы G , найдется элемент $b \in G$, неперестановочный с элементом a , так что $b^{-1}ab = ac$ для некоторого неединичного элемента $c \in Z_1$.

Фиксируем теперь некоторое простое число q , не принадлежащее множеству π . Так как Z_1 является свободной абелевой группой и ее элемент c отличен от 1, то для некоторого целого числа $n \geq 1$ уравнение $x^{q^n} = c$ не имеет решений в группе Z_1 . Утверждается, что тогда элементы a^{q^n} и $a^{q^n}c$ не сопряжены в группе G .

В самом деле, пусть для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $g^{-1}a^{q^n}g = a^{q^n}c$. Так как $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$, получаем тогда

$$a^{q^n}c = (g^{-1}ag)^{q^n} = a^{q^n}z^{q^n},$$

откуда $c = z^{q^n}$, что невозможно.

Покажем, с другой стороны, что образы элементов a^{q^n} и $a^{q^n}c$ при любом гомоморфизме группы G на произвольную \mathcal{F}_π -группу являются сопряженными.

Действительно, пусть N — такая нормальная подгруппа группы G , что $c^m \equiv 1 \pmod{N}$ для некоторого π -числа $m > 0$. Так как числа q^n и m взаимно просты, существует целое число k такое, что $q^n k \equiv 1 \pmod{m}$. Поскольку элемент c является центральным, то из равенства $b^{-1}ab = ac$ следует равенство $b^{-k}ab^k = ac^k$ и

$$a^{q^n}c \equiv a^{q^n}c^{q^{nk}} = (ac^k)^{q^n} = b^{-k}a^{q^n}b^k \pmod{N}.$$

Таким образом, группа G оказалась не \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности, и предложение 3 доказано.

Переходя к доказательству достаточности, заметим, что если периодическая часть $\tau(G)$ конечно порожденной нильпотентной группы G является \mathcal{F}_π -группой, то ввиду [4] группа G \mathcal{F}_π -аппроксимируема, и требуемое нам утверждение содержится в следующем несколько более общем результате:

Предложение 4. *Пусть π — произвольное множество простых чисел и пусть группа G является расширением конечной группы при помощи конечно порожденной абелевой группы. Если группа G \mathcal{F}_π -аппроксимируема, то она является и \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Доказательство. Пусть F — конечная нормальная подгруппа группы G , фактор-группа G/F по которой является конечно порожденной абелевой группой. Ввиду замечания, сделанного в начале этого пункта, из \mathcal{F}_π -аппроксимируемости группы G следует \mathcal{F}_π -аппроксимируемость фактор-группы G/F . Поэтому если для не сопряженных в группе G элементов a и b смежные классы aF и bF различны, то различными (и, следовательно, несопряженными) будут и их образы при подходящем гомоморфизме группы G/F на некоторую \mathcal{F}_π -группу.

Предположим, что $aF = bF$, т. е. $b = af$ для некоторого элемента $f \in F$. Из \mathcal{F}_π -аппроксимируемости группы G следует существование в ней такой нормальной подгруппы N конечного π -индекса, что $N \cap$

$F = 1$. Утверждается, что в фактор-группе G/N элементы aN и bN не являются сопряженными.

Действительно, в противном случае для некоторого элемента $g \in G$ должно выполняться сравнение $g^{-1}ag \equiv b \pmod{N}$. Поскольку фактор-группа G/F абелева, $g^{-1}ag = ax$ для некоторого $x \in F$. Таким образом, мы получаем сравнение $x \equiv f \pmod{N}$, из которого ввиду того, что $N \cap F = 1$, следует равенство $x = f$. Но это равенство означает сопряженность в группе G элементов a и b , что невозможно. Предложение 4 доказано.

Библиографический список

1. *Каргаполов М. И., Тимошенко Е. И.* К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп // IV-ый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Новосибирск, 5 - 9 февраля 1973 г.). Тезисы докладов. Новосибирск: 1973. С. 86 - 88.
2. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб., 1940, Т. 8, С. 405-422.
3. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж., 1971, Т. 12, С. 1085-1099.
4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29-62.
5. *Blackburn N.* Conjugacy in nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1965, Vol. 16, N1, P. 143-148.