УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА В НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП

Для обобщенного свободного произведения двух групп в том случае, когда объединяемая подгруппа лежит в центре одного из свободных множителей, а ее подгруппы конечного индекса в этом множителе финитно отделимы, указан критерий финитной аппроксимируемости и найдено пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса.

For generalized free product of two groups the criterion to be residually finite is given and the intersection of all normal finite index subgroups is found provided the amalgamated subgroup is contained in the center of one of free factors and any finite index subgroup of amalgamated subgroup is finitely separable in this factor.

Ключевые слова: свободное произведение групп с объединенными подгруппами, HNN-расширение групп, финитно аппроксимируемая группа, финитно отделимая подгруппа.

Введение. Формулировка результатов

Пусть $\sigma(G)$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Очевидно, что совпадение $\sigma(G)$ с единичной подгруппой равносильно финитной аппроксимируемости группы G; более того, $\sigma(G)$ является, как легко видеть, наименьшей из нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым финитно аппроксимируемы.

В исследованиях по финитной аппроксимируемости групп обычно рассматривается проблема выделения в некотором семействе групп тех из них, которые являются финитно аппроксимируемыми. Задачу описания подгруппы $\sigma(G)$ произвольной группы G этого семейства можно рассматривать как более общую постановку этой проблемы, а в случае ее решения — как некоторое дополнительное объяснение того, почему одни группы семейства финитно аппроксимируемы, а другие нет. При этом в ряде случаев установленный критерий финитной аппроксимируемости помогает решить и эту более общую задачу. Примером, когда такое обобщение получается достаточно просто, может служить семейство групп, построенных при помощи конструкции нисходящего HNN-расширения.

Напомним, что если G — некоторая группа и φ — ее инъективный гомоморфизм, то нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим этому автоморфизму, называется группа $G(\varphi) = \bigl(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\,(g \in G)\bigr)$, полученная присоединением к порождающим группы G элемента t, а к определяющим соотношениям группы G — всевозможных соотношений вида $t^{-1}gt = g\varphi$, где $g \in G$.

Подгруппу H группы G будем называть здесь φ-совместимой, если выполнено равенство $H\varphi = G\varphi \cap H$. Нетрудно видеть, что для нормальной подгруппы H группы G условие φ-совместимости равносильно тому, что в фактор-группе $\overline{G} = G/H$ отображение φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ (действующий по правилу $(gH)\overline{\varphi} = (g\varphi)H$), и потому можно построить нисходящее HNN-расширение $\overline{G}(\overline{\varphi}) = \bigl(\overline{G}, t;\ t^{-1}(gH)t = (gH)\overline{\varphi}\ (gH \in \overline{G})\bigr)$ группы $\overline{G}$. Непосредственно проверяется также, что для любой нормальной подгруппы N группы $G(\varphi)$ подгруппа $H = G \cap N$ является φ-совместимой.

В работе [1] было доказано, что группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой. С помощью этого результата нетрудно показать, что подгруппа $\sigma(G(\varphi))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(\varphi)$ пересечения H всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G.

Действительно, легко видеть, что если N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы $G(\varphi)$, то $G \cap N$ является нормальной φ-совместимой подгруппой конечного индекса группы G. Следовательно, подгруппа H содержится в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы $G(\varphi)$, и это делает включение нормального замыкания H в подгруппу $\sigma(G(\varphi))$ очевидным. Для доказательства противоположного включения достаточно установить финитную аппроксимируемость фактор-группы группы $G(\varphi)$ по этому нормальному замыканию.

Так как подгруппа H является φ-совместимой, фактор-группа группы $G(\varphi)$ по нормальному замыканию подгруппы H изоморфна нисходящему HNN-расширению $\overline{G}(\overline{\varphi}) = \bigl(\overline{G}, t;\ t^{-1}(gH)t = (gH)\overline{\varphi}\ (gH \in \overline{G})\bigr)$ фактор-группы $\overline{G} = G/H$. В силу приведенного выше результата из [1] финитная аппроксимируемость группы $\overline{G}(\overline{\varphi})$ будет установлена, как только мы покажем, что пересечение всех $\overline{\varphi}$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $\overline{G}$ совпадает с единичной подгруппой.

Действительно, если элемент gH группы $\overline{G}$ отличен от единицы, то $g \notin H$ и потому $g \notin M$ для некоторой φ-совместимой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G. Тогда элемент gH не входит в подгруппу $\overline{M} = M/H$ группы $\overline{G}$. Поскольку подгруппа $\overline{M}$ является, как легко проверить, $\overline{\varphi}$-совместимой, требуемое утверждение доказано.

Основное содержание данной статьи направлено на решение аналогичной задачи для семейства групп, разложимых в обобщенное свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп, где объединяемая подгруппа лежит в центре одного из свободных множителей, а ее подгруппы конечного индекса в этом множителе финитно отделимы. Здесь будут доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$ *— свободное произведение групп* A *и* B *с подгруппами* $H < A$ *и* $K < B$*, объединенными в соответствии с изоморфизмом* $\varphi : H \to K$*. Предположим, что группы* A *и* B *финитно аппроксимируемы,* K *является центральной подгруппой группы* B *и в группе* B *финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в* K *и имеющие в* K *конечный индекс. Тогда группа* G *финитно аппроксимируема в том и только в том случае, когда в группе* A *подгруппа* H *финитно отделима.*

Теорема 2. *Пусть* $G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$ *— свободное произведение групп* A *и* B *с подгруппами* $H < A$ *и* $K < B$*, объединенными в соответствии с изоморфизмом* $\varphi : H \to K$*. Предположим, что группы* A *и* B *финитно аппроксимируемы,* K *является центральной подгруппой группы* B *и в группе* B *финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в* K *и имеющие в* K *конечный индекс. Пусть также* H_1 *— проконечное замыкание в группе* A *подгруппы* H*. Тогда подгруппа* $\sigma(G)$ *совпадает с нормальным замыканием в группе* G *взаимного коммутанта* $\bigl[H_1, B\bigr]$ *подгрупп* H_1 *и* B*.*

Напомним, что проконечным замыканием в группе Y подгруппы X называется пересечение всех подгрупп конечного индекса группы Y, содержащих подгруппу X, т. е. наименьшая подгруппа группы Y, содержащая подгруппу X и являющаяся финитно отделимой. Легко видеть, что в группе G взаимный коммутант $\bigl[H_1, B\bigr]$ подгрупп H_1 и B совпадает с единичной подгруппой тогда и только тогда, когда выполнено равенство $H_1 = H$, т. е. тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группе A. Таким образом, теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 2. Тем не менее приводимое ниже доказательство теоремы 2 использует утверждение теоремы 1, и потому здесь будет дано прямое доказательство этой теоремы.

§ 1. Предварительные замечания

В этом параграфе будут приведены необходимые нам понятия и некоторые предварительные результаты. Напомним, прежде всего, достаточное условие финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений из работы Г. Баумслага [2].

Если A и B — некоторые группы, $H \leqslant A$, $K \leqslant B$ и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, то подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ называются (H, K, φ)-совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$.

Договоримся также, следуя Г. Баумслагу, семейство $\mathcal{X}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называть фильтрацией, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если A — подгруппа группы G, то фильтрация $\mathcal{X}$ называется A-фильтрацией, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе A, найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}$ такая, что $g \notin AN$. Если A и B — две подгруппы

группы G, то фильтрацию $\mathcal{X}$ будем называть (A, B)-фильтрацией, если она одновременно является и A-фильтрацией, и B-фильтрацией.

Имеет место следующее утверждение (предложение 2 из работы [2]):

Предложение 1. *Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A, K — подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B и пусть*

$$G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.

Нам понадобится также конструкция обобщенного прямого произведения групп (см., напр., [3]).

Пусть A и B — некоторые группы, H — центральная подгруппа группы A, K — центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется фактор-группа $\overline{C}$ прямого произведения $C = A\times B$ групп A и B по подгруппе N, состоящей из всех элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$.

Непосредственно проверяется, что в группе C выполнены равенства $A\cap N = B\cap N = 1$ и $AN\cap BN = HN = KN$. Следовательно, отображение $\alpha : a \mapsto aN$ является изоморфизмом группы A на подгруппу $\overline{A} = AN/N$ группы $\overline{C}$, отображение $\beta : b \mapsto bN$ является изоморфизмом группы B на подгруппу $\overline{B} = BN/N$, подгруппы $\overline{H} = HN/N$ и $\overline{K} = KN/N$ совпадают и $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{H}$.

Предложение 2. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы, H — центральная подгруппа группы A, K — центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Пусть $\overline{C}$ — обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Предположим также, что в группе B финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в K и имеющие в K конечный индекс. Тогда группа $\overline{C}$ финитно аппроксимируема и каждая подгруппа, лежащая в подгруппе $\overline{A}$ и имеющая в $\overline{A}$ конечный индекс, финитно отделима в $\overline{C}$.*

Доказательство. Поскольку группа $\overline{C}$ является фактор-группой группы $C = A \times B$ по подгруппе $N = \bigl\{h(h\varphi)^{-1} \bigm| h \in H\bigr\}$, для доказательства финитной аппроксимируемости группы $\overline{C}$ достаточно показать, что подгруппа N финитно отделима в C.

Пусть элемент $g \in C$, $g = ab$, где $a \in A$ и $b \in B$, не принадлежит подгруппе N. Покажем, что тогда элемент g не входит в некоторую подгруппу конечного индекса группы C, содержащую подгруппу N.

Если элемент элемент b не принадлежит подгрупе K, то ввиду финитной отделимости этой подгруппы в группе B элемент b не входит в некоторую подгруппу L конечного индекса группы B, содержащую подгруппу K. Тогда подгруппа AL имеет конечный индекс в группе C, содержит подгруппу N и не содержит элемента g.

Предположим, что $b \in K$ и потому $b = c\varphi$ для некоторого элемента $c \in H$. Так как элемент g в подгруппу N не входит, $a \neq c^{-1}$, т. е. ac — неединичный элемент группы A. Поскольку группа A финитно аппроксимируема, элемент ac не принадлежит некоторой нормальной подгруппе R конечного индекса группы A. Тогда $U = H \cap R$ — подгруппа конечного индекса группы H и $V = U\varphi$ — подгруппа конечного индекса группы K. Так как подгруппа V нормальна и финитно отделима в B, в группе B найдется нормальная подгруппа S конечного индекса такая, что $K \cap S = V$. Тогда подгруппа $L = NRS$, имеющая, очевидно, конечный индекс в группе C, не содержит элемента g. В самом деле, если $g \in L$, то $g = h(h\varphi)^{-1} \cdot r \cdot s$ для некоторых $h \in H$, $r \in R$ и $s \in S$. Поэтому $a = hr$ и $b = (h\varphi)^{-1}s$. Так как $b \in K$, $s \in K$, т. е. $s \in V$, и потому $s = u\varphi$ для некоторого $u \in U$. Следовательно, $c = h^{-1}u$, откуда $ac = ru \in R$, что противоречит выбору подгруппы R.

Таким образом, финитная аппроксимируемость группы $\overline{C}$ доказана.

Пусть теперь $\overline{D}$ — подгруппа конечного индекса группы $\overline{A} = AN/N$. Запишем эту подгруппу в виде $\overline{D} = D/N$, где D — подгруппа конечного индекса подгруппы AN, содержащая N. Так как N — центральная подгруппа группы C и $A \cap N = 1$, имеем $AN = A \times N$, и потому $D = A_1N$, где $A_1 = D \cap A$ — подгруппа конечного индекса группы A.

Для доказательства финитной отделимости в группе $\overline{C}$ подгруппы $\overline{D}$ покажем, что для произвольного элемента $\overline{g} = gN$ группы $\overline{C}$, не принадлежащего подгруппе $\overline{D}$, существует подгруппа конечного индекса группы $\overline{C}$, не содержащая элемента $\overline{g}$. Для этого, в свою очередь, достаточно указать подгруппу конечного индекса группы C, содержащую подгруппу D и не содержащую элемента g.

Пусть $g = ab$, где $a \in A$ и $b \in B$. Если элемент элемент b не принадлежит подгруппе K, то, как и выше, выберем некоторую подгруппу L конечного индекса группы B, содержащую подгруппу K и не содержащую элемента b. Тогда подгруппа AL имеет конечный индекс в группе C, содержит подгруппу D и не содержит элемента g.

Пусть $b \in K$ и потому $b = c\varphi$ для некоторого элемента $c \in H$. Так как элемент g не принадлежит подгруппе $D = A_1N$, элемент ac группы A не входит в подгруппу A_1. Пусть R — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, лежащая в A_1. Снова полагая $U = H \cap R$ и $V = U\varphi$, найдем нормальную подгруппу S конечного индекса группы B такую, что

$K \cap S = V$. Тогда подгруппа DS конечного индекса группы C не содержит элемента g. В самом деле, в противном случае для подходящих элементов $a_1 \in A_1$, $h \in H$ и $s \in S$ мы имели бы $g = a_1 \cdot h(h\varphi)^{-1} \cdot s$. Отсюда $a = a_1 h$ и $b = (h\varphi)^{-1}s$. Из второго равенства следует, что $s \in V$, и потому $s = r\varphi$ для некоторого $r \in U$. Поэтому $c = h^{-1}r$ и элемент $ac = a_1 r$ принадлежит подгруппе A_1, что неверно. Предложение 2 доказано.

Отметим также связь между обобщенным свободным произведением двух групп и обобщенным прямым произведением этих групп.

Предложение 3. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leqslant Z(A)$ и $K \leqslant Z(B)$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$. Фактор-группа группы G по нормальному замыканию взаимного коммутанта $\big[A, B\big]$ подгрупп A и B изоморфна обобщенному прямому произведению групп A и B с объединенными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами H и K.*

Действительно, поскольку указанные выше отображения α и β групп A и B в группу $\overline{C}$ согласованы с изоморфизмом φ (т. е. для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h\alpha = h(\varphi\beta)$), существует гомоморфизм ρ группы G на группу $\overline{C}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием α и β соответственно. Очевидно, что нормальное замыкание M взаимного коммутанта $\big[A, B\big]$ подгрупп A и B содержится в ядре гомоморфизма ρ. С другой стороны, произвольный элемент g группы G сравним по модулю M с элементом вида ab для подходящих $a \in A$ и $b \in B$. Так как $(ab)\rho = 1$, в группе $C = A \times B$ элемент ab принадлежит подгруппе N, и потому $a = h$ и $b = (h\varphi)^{-1}$ для некоторого $h \in H$. Поэтому ab является единичным элементом группы G, следовательно, $g \in M$ и ядро гомоморфизма ρ совпадает с подгруппой M.

Нам понадобится также следующее свойство обобщенного свободного произведения групп.

Предложение 4. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Пусть X — нормальная подгруппа группы B и Y — нормальное замыкание в группе G подгруппы X. Если $K \cap X = 1$, то фактор-группа G/Y изоморфна свободному произведению $\overline{G} = \big(A * B/X;\ H = KX/X, \varphi\nu\big)$ групп A и B/X с подгруппами H и KX/X, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\nu : H \to KX/X$, где ν — естественный гомоморфизм группы B на фактор-группу B/X.*

В самом деле, поскольку тождественное отображение группы A и гомоморфизм ν согласованы с изоморфизмом φ, существует продолжающий эти отображения гомоморфизм ρ группы G на группу $\overline{G}$. Ядро этого гомоморфизма содержит, очевидно, подгруппу Y, и утверждается, что в действительности оно совпадает с этой подгруппой. Если это не так, выберем в $\operatorname{Ker}\rho$ элемент g наименьшей длины, не принадлежащий Y. Если его длина больше 1, то, поскольку $g\rho = 1$, образ несократимой записи элемента g не может служить несократимой записью элемента $g\rho$. Так как действие отображения ρ на группе A инъективно, это означает, что для некоторого слога $b \in B$ несократимой записи элемента g должно выполняться включение $b \in KX$, т. е элемент b должен быть сравним по модулю X с некоторым элементом из подгруппы K. Это позволяет заменить элемент g сравнимым с ним по модулю Y элементом меньшей длины. Таким образом, элемент g или принадлежит подгруппе A и тогда он равен 1, или принадлежит подгруппе B и тогда он входит в X.

Приведем, наконец, следующее простое замечание.

Предложение 5. *В финитно аппроксимируемой группе проконечное замыкание абелевой подгруппы является абелевой группой.*

В самом деле, пусть X_1 — проконечное замыкание в финитно аппроксимируемой группе Y ее абелевой подгруппы X и пусть a и b — произвольные элементы из X_1. Если N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы Y, то элементы a и b принадлежат подгруппе XN, и так как фактор-группа XN/N абелева, коммутатор $[a, b]$ этих элементов принадлежит подгруппе N. Таким образом, $[a, b]$ входит в каждую нормальную подгруппу конечного индекса группы Y, откуда ввиду финитной аппроксимируемости этой группы и следует, что $[a, b] = 1$.

§ 2. Доказательство теорем

Всюду ниже предполагается, что A и B — финитно аппроксимируемые группы, H и K — изоморфные подгруппы групп A и B соответственно, причем $H \neq A$ $K \neq B$, и $G = \bigl(A * B;\ H = K, \varphi\bigr)$ — свободное произведение групп с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$. Предположим также, что K является центральной подгруппой группы B и в группе B финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в K и имеющие в K конечный индекс.

Обозначим через W нормальное замыкание в группе G взаимного коммутанта $\bigl[H_1, B\bigr]$ подгрупп H_1 и B, где H_1 — проконечное замыкание в группе A подгруппы H. Включение $W \subseteq \sigma(G)$ почти очевидно.

Действительно, пусть $a \in H_1$, $b \in B$ и N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Поскольку $H(G \cap N)$ является подгруппой конечного индекса группы A, содержащей H, $a \in H(G \cap N)$, и потому $a \equiv h \pmod N$ для некоторого $h \in H$. Поэтому $\bigl[a, b\bigr] \equiv \bigl[h, b\bigr]$ $(\operatorname{mod} N)$, и так как $h = h\varphi$ — элемент из центра группы B, имеем $\bigl[a, b\bigr] \in N$. Таким образом, взаимный коммутант $\bigl[H_1, B\bigr]$ содержится в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G, откуда и следует включение $W \subseteq \sigma(G)$.

Так как для любых элементов $a \in A \setminus H$ и $b \in B \setminus K$ запись коммутатора $\big[a, b\big] = a^{-1}b^{-1}ab$ является несократимой в группе G и потому он отличен от единицы, из доказанного включения следует необходимость условия в теореме 1. В силу предложения 1 для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — K-фильтрацией.

Пусть R — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Полагаем $U = H \cap R$ и $V = U\varphi$. Так как тогда V является подгруппой конечного индекса группы K, в группе B найдется нормальная подгруппа S конечного индекса такая, что $K \cap S = V$. Поскольку подгруппы R и S являются (H, K, φ)-совместимыми, подгруппа R принадлежит семейству $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Таким образом, семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с семейством всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A, и утверждение о том, что оно является H-фильтрацией, следует непосредственно из финитной аппроксимируемости группы A и финитной отделимости ее подгруппы H.

Покажем теперь, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией. Пусть b — произвольный неединичный элемент подгруппы B. Предположим сначала, что $b \notin K$. Возьмем произвольную нормальную подгруппу R конечного индекса группы A и определим подгруппы U и V, как в предыдущем абзаце. Так как фактор-группа B/V финитно аппроксимируема, а ее подгруппа K/V конечна и не содержит элемент bV, существует нормальная подгруппы S/V конечного индекса группы B/V, которая тривиально пересекается с подгруппой K/V и по модулю которой элемент bV не входит в эту подгруппу. Тогда S является такой нормальной подгруппой группы B, что $K \cap S = V$ и $b \notin KS$ (и, тем более, $b \notin S$). Пусть теперь $b \in K$ и пусть элемент $h \in H$ такой, что $h\varphi = b$. Тогда $h \neq 1$, и так как группа A финитно аппроксимируема, мы можем выбрать нормальную подгруппу R конечного индекса группы A так, чтобы $h \notin R$. Если для этой подгруппы U и V определены как выше, то $h \notin U$, $b \notin V$, и потому произвольная подгруппа S конечного индекса группы B такая, что $K \cap S = V$, не содержит элемента b и является (H, K, φ)-совместимой с R. Итак, для любого элемента $b \in B$, отличного от единицы, в семействе $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ существует подгруппа, не содержащая этого элемента, а если b не входит в подгруппу K, то он не входит и в KS для некоторой подгруппы S из этого семейства. Таким образом, семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является K-фильтрацией, и теорема 1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 2 напомним, что включение $W \subseteq \sigma(G)$ уже доказано. Для доказательства противоположного включения достаточно установить финитную аппроксимируемость фактор-группы G/W.

Обозначим через F подгруппу группы G, порожденную подгруппами H_1 и B. Так как подгруппа H содержится в подгруппе H_1, то по теореме Х. Нейман (см., напр., [3]) группа F является обобщенным свободным произведением вида $F = \big(H_1 * B;\ H = K, \varphi\big)$, и легко видеть, что группа G является свободным произведением подгрупп A и F с объединенной подгруппой H_1. Обозначим через X нормальное замыкание в группе F взаимного коммутанта $\big[H_1, B\big]$ подгрупп H_1 и B. Поскольку в силу предложения 5 группа H_1 абелева и потому обе объединяемые подгруппы в разложении группы F принадлежат центрам соответствующих свободных множителей, из предложения 3 следует, что фактор-группа F/X изоморфна обобщенному прямому произведению групп H_1 и B. В частности, $H_1 \cap X = 1$, и потому в силу предложения 4 фактор-группа G/W раскладывается в свободное произведение $\big(A * F/X;\ H_1 = H_1X/X, \nu\big)$ групп A и F/X с подгруппами H_1 и H_1X/X, объединенными в соответствии с естественным изоморфизмом ν группы F на F/X. Из предложения 2 следует, что это разложение удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и так как подгруппа H_1 в группе A финитно отделима, из этой теоремы следует финитная аппроксимируемость группы G/W. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. № 6. С. 842—845.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193—209.
3. *Neumann B. H.* A two-generator group isomorphic to a proper factor group // J. London Math. Soc. 1950. Vol. 25. P. 247—248.