УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП КОММУТИРОВАННОГО HNN-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Получено достаточное условие того, чтобы коммутированное HNN-расширение некоторой группы являлось группой с финитно отделимыми циклическими подгруппами.

The sufficient condition for the commuted HNN-extension of some group to be a group with finitely separable cyclic subgroups is obtained.

Ключевые слова: свободное произведение групп с объединенными подгруппами, HNN-расширение групп, финитно аппроксимируемая группа, финитно отделимая подгруппа.

Введение

В монографии [4] была введена конструкция свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами: если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B, то свободное произведение $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K определяется как фактор-группа (обычного) свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта $[H, K]$ подгрупп H и K. Ряд аппроксимационных свойств этой конструкции рассмотрен в работах [1] и [2]; в частности, в [1] указан критерий финитной аппроксимируемости группы G, а в [2] доказано, что если группы A и B являются π_c-группами и группа G финитно аппроксимируема, то G также является π_c-группой. Напомним, что некоторая группа называется ***π_c-группой***, если все ее циклические подгруппы финитно отделимы.

В работе [3] был предложен следующий аналог конструкции свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами.

Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G. Группа

$$G^* = \left(G, t;\ \left[t^{-1}At, B\right] = 1\right), \tag{1}$$

порождаемая образующими группы G и еще одним элементом t и определяемая всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $[t^{-1}at, b] = 1$, где $a \in A$ и $b \in B$ (и, как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y), называется *коммутированным HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B*.

В работе [3] было показано, что если подгруппы A и B финитно аппроксимируемой группы G неединичны, то группа

$$G^* = \bigl(G, t;\ \bigl[t^{-1}At, B\bigr] = 1\bigr)$$

является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группе G подгруппы A и B финитно отделимы. Здесь будет доказана следующая

Теорема. *Пусть A и B — центральные подгруппы группы G и пусть произвольная подгруппа группы G, лежащая в одной из подгрупп A или B и имеющая в этой подгруппе конечный индекс, финитно отделима в G. Если G — π_c-группа, то и группа $G^* = \bigl(G, t;\ \bigl[t^{-1}At, B\bigr] = 1\bigr)$ является π_c-группой.*

Так как в произвольной полициклической группе все подгруппы финитно отделимы (см. [5]), получаем очевидное

Следствие. *Коммутированное HNN-расширение произвольной полициклической группы с центральными связанными подгруппами является π_c-группой.*

В работе [8] показано, что в группе $G^* = \langle t, g;\ [t^{-1}gt, g] = 1\rangle$ существует 2-порожденная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой. Эта группа является, очевидно, коммутированным HNN-расширением бесконечной циклической группы G с порождающим g, обе связанные подгруппы которой совпадают с G. Так как все условия теоремы здесь выполнены, группа G является π_c-группой. В то же время этот пример показывает, что усилить сформулированную теорему, доказав, что при выполнении ее условий группа G^* наследует от группы G финитную отделимость всех конечно порожденных подгрупп, нельзя.

§ 1. Предварительные замечания

Для того чтобы сделать изложение по возможности замкнутым, в этом параграфе мы приведем некоторые определения и известные результаты, необходимые для доказательства теоремы.

Напомним, прежде всего, ряд понятий и утверждений, идущих от работы Г. Баумслага [7] и лежащих в основе современных исследований аппроксимационных свойств свободных конструкций групп.

Пусть A и B — изоморфные подгруппы некоторых групп H и K соответственно и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм. Подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ называются (A, B, φ)-совместимыми, если $(A \cap R)\varphi = B \cap S$. Аналогично, если A и B — изоморфные подгруппы некоторой группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то подгруппа N группы G называется (A, B, φ)-совместимой, если $(A \cap N)\varphi = B \cap N$.

Если R и S — (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы групп H и K, то индуцированное отображение $\overline{\varphi}$, определенное по правилу $(aR)\overline{\varphi} = (a\varphi)S$ $(a \in A)$, является изоморфизмом подгруппы AR/R фактор-группы H/R на подгруппу BS/S фактор-группы K/S. Поэтому наряду со свободным произведением

$$G = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$$

групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, мы можем ввести свободное произведение

$$G(R, S) = (H/R * K/S;\ AR/R = BS/S,\ \overline{\varphi})$$

групп H/R и K/S с подгруппами AR/R и BS/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\overline{\varphi}$. При этом естественные отображения группы H на фактор-группу H/R и группы K на фактор-группу K/S продолжаемы до гомоморфизма ρ группы G на группу $G(R, S)$.

Напомним еще, что семейство $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп некоторой группы X называется фильтрацией, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если U — подгруппа группы X, то фильтрация $\mathcal{N}$ называется U-фильтрацией, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подгруппе U, найдется подгруппа $N \in \mathcal{N}$ такая, что $x \notin UN$. Если U и V — две подгруппы группы X, то фильтрацию $\mathcal{N}$ будем называть (U, V)-фильтрацией, если она одновременно является и U-фильтрацией, и V-фильтрацией.

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений. Прежде всего приведем следующее достаточное условие того, чтобы обобщенное свободное произведение двух π_c-групп являлось π_c-группой (см. [2, предложение 1], а также [9, теорема 3.1]):

Предложение 1. *Пусть* $G = (H * K;\ A = B, \varphi)$ *— свободное произведение групп* H *и* K *с подгруппами* A *и* B*, объединенными в соответствии с изоморфизмом* φ*, и пусть* $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *— семейство всех пар* (A, B, φ)*-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп* H *и* K*. Предположим, что семейство* $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *является* A*-фильтрацией, а также —* X*-фильтрацией для любой циклической подгруппы* X *группы* H *и семейство* $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *является* B*-фильтрацией, а также —* Y*-фильтрацией для любой циклической подгруппы* Y *группы* K*. Тогда группа* G *является* π_c*-группой.*

Из предложения 1 легко следует

Предложение 2. *Пусть* A *и* B *— центральные подгруппы групп* H *и* K *соответственно. Предположим также, что произвольная подгруппа группы* H*, лежащая в подгруппе* A *и имеющая в этой подгруппе конечный индекс, финитно отделима в* H *и произвольная подгруппа группы* K*, лежащая в подгруппе* B *и имеющая в этой подгруппе конечный индекс, финитно отделима в* K*. Если* H *и* K *—* π_c*-группы, то и группа* $G = (H * K;\ A = B, \varphi)$ *является* π_c*-группой.*

В самом деле, для вывода предложения 2 из предложения 1 достаточно показать, что произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы H является (A, B, φ)-совместимой с некоторой нормальной подгруппой конечного индекса группы K и произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы K является (A, B, φ)-совместимой с некоторой нормальной подгруппой конечного индекса группы H. Пусть, скажем, R — нормальная подгруппа конечного индекса группы H. Полагаем $X = A \cap R$ и $Y = X\varphi$. Так как подгруппа Y имеет конечный индекс в группе B и потому в силу предположения финитно отделима в K, фактор-группа K/Y финитно аппроксимируема. Поскольку ее подгруппа B/Y конечна, в группе K/Y найдется нормальная подгруппа конечного индекса S/Y, пересечение которой с подгруппой B/Y тривиально. Так как это означает, что $B \cap S = Y$, подгруппа S является искомой.

Приведем теперь достаточное условие того, чтобы HNN-расширение π_c-группы являлось π_c-группой (см. [9, теорема 2.2]):

Предложение 3. *Пусть* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi\big)$ *—* HNN*-расширение группы* G *с подгруппами* A *и* B*, связанными в соответствии с изоморфизмом* $\varphi : A \to B$*. Пусть* $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ *— семейство всех* (A, B, φ)*-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы* G*. Если семейство* $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ *является* (A, B)*-фильтрацией, а также* X*-фильтрацией для любой циклической подгруппы* X *группы* G*, то группа* G^* *является* π_c*-группой.*

Следующее утверждение сформулировано в работе [6] со ссылкой на статью [9]. Выяснилось, однако, что в явном виде соответствующая формулировка в этой статье отсутствует. Тем не менее, оно является очевидным следствием приведенной только что теоремы 2.2 из [9].

Предложение 4. *Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi\big)$ — HNN-расширение группы G с подгруппами A и B, связанными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : A \to B$. Если группа G является π_c-группой, ее подгруппы A и B финитно отделимы и в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа, также имеющая в G конечный индекс, то группа G^* является π_c-группой.*

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть G — π_c-группа, A и B — центральные подгруппы группы G и пусть произвольная подгруппа группы G, лежащая в одной из подгрупп A или B и имеющая в этой подгруппе конечный индекс, финитно отделима в G. Покажем, что тогда и группа

$$G^* = \big(G, t;\ [t^{-1}At, B] = 1\big) \tag{1}$$

является π_c-группой.

Строение группы G^* можно описать в терминах стандартных свободных конструкций (т. е. свободного произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения) следующим образом (см. [3]).

Пусть A_1 и B_1 — группы, изоморфные группам A и B соответственно, и пусть $\varphi : A \to A_1$ и $\psi : B \to B_1$ — фиксированные изоморфизмы. Пусть $K = A_1 \times B_1$ — прямое произведение групп A_1 и B_1 и

$$G_1 = (G * K;\ B = B_1, \psi) \tag{2}$$

— свободное произведение групп G и K с подгруппами B и B_1, объединенными относительно отображения ψ. Очевидные преобразования Тице показывают, что группа G^*, заданная представлением (1), изоморфна обычному HNN-расширению

$$\big(G_1, t;\ t^{-1}At = A_1,\ \varphi\big) \tag{3}$$

базовой группы G_1 с проходной буквой t и подгруппами A и A_1, связанными относительно изоморфизма φ.

Лемма 1. *Группа G_1, определенная в* (2), *является π_c-группой.*

Действительно, поскольку произвольная подгруппа π_c-группы является π_c-группой и прямое произведение двух π_c-групп является π_c-группой [10], группа K — π_c-группа. Легко видеть, кроме того, что произвольная подгруппа конечного индекса группы B_1 финитно отделима в K. Таким образом, группа G_1 удовлетворяет всем условиям предложения 2.

Лемма 2. *Для любой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G существует нормальная подгруппа H конечного индекса группы G_1 такая, что $G \cap H = M$. Для любой подгруппы N конечного индекса группы K существует нормальная подгруппа H конечного индекса группы G_1 такая, что $G \cap H = N$.*

Доказательство. Пусть M — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Полагаем $U = B \cap M$ и $U_1 = U\psi$. Тогда U_1 является подгруппой конечного индекса группы B_1, и для подгруппы $N = A_1U_1$, имеющей конечный индекс в группе K, выполнено равенство $B_1 \cap N = U_1$. С другой стороны, если N — нормальная подгруппа конечного индекса группы K, полагаем $V_1 = B_1 \cap N$ и $V = V_1\psi^{-1}$. Тогда V является подгруппой конечного индекса группы B, и потому для некоторой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G выполнено равенство $B \cap M = V$ (см. доказательство предложения 2).

Так как в любом случае подгруппы M и N являются (B, B_1, ψ)-совместимыми, мы можем построить свободное произведение

$$G_1(M,N) = \big(G/M * K/N;\ BM/M = B_1N/N, \overline{\psi}\big) \tag{4}$$

групп G/M и K/N с подгруппами BM/M и BN/N, объединенными относительно индуцированного изоморфизма $\overline{\psi}$. Являясь свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, группа $G_1(M,N)$ финитно аппроксимируема (см. [7]) и потому обладает нормальной подгруппой конечного индекса, имеющей тривиальное пересечение с (конечными) подгруппами G/M и K/N. Если H — прообраз этой подгруппы относительно гомоморфизма ρ группы G_1 на группу $G_1(R,S)$, продолжающего естественные отображения группы G на группу G/M и группы K на группу K/N, то H является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1, причем, как легко видеть, $G \cap H = M$ и $K \cap H = N$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В группе G_1 подгруппы A и A_1 финитно отделимы.*

Доказательство. Следует показать, что для любого элемента $g \in G_1$, не принадлежащего подгруппе A или подгруппе A_1, существует нормальная подгруппа H конечного индекса группы G_1, что $g \notin AH$ или $g \notin A_1H$ соответственно. Пусть $g = x_1x_2\cdots x_n$ — несократимая запись в группе G_1 элемента g. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$, т. е. элемент g принадлежит подгруппе G или подгруппе K.

Если g входит в подгруппу G и не принадлежит подгруппе A, то поскольку по условию подгруппа A финитно отделима в группе G, $g \notin AM$ для некоторой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G. В силу леммы 2 существует нормальная подгруппа H конечного индекса группы G_1 такая, что $G \cap H = M$. Очевидно, что $g \notin AH$.

Предположим теперь, что элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе A_1. Если при этом элемент g не входит в подгруппу B, найдем сначала, рассуждая аналогично, такую нормальную подгруппу L конечного индекса группы G_1, что $g \notin BL$: выбираем нормальную подгруппу M конечного индекса группы G так, чтобы $g \notin BM$, а затем нормальную подгруппу L конечного индекса группы G_1 такую, что $G \cap L = M$. Далее полагаем еще $N = K \cap L$; хорошо известно (и легко видеть), что подгруппы M и N являются (B, B_1, ψ)-совместимыми. Поэтому можно ввести в рассмотрение группу

$$G_1(M,N) = \left(G/M * K/N;\ BM/M = B_1N/N, \overline{\psi}\right).$$

Элемент gM свободного множителя G/M этой группы не входит в объединяемую подгруппу BM/M и потому не принадлежит другому свободному множителю K/N. Так как группа $G_1(M,N)$ финитно аппроксимируема, а ее подгруппа K/N конечна, элемент gM не принадлежит подгруппе $K/N \cdot X$ для некоторой нормальной подгруппы X конечного индекса группы G_1. Тогда прообраз H этой подгруппы относительно гомоморфизма группы G_1 на группу $G_1(M,N)$, продолжающего естественные отображения группы G на группу G/M и группы K на группу K/N, является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1 такой, что $g \notin KH$ и, тем более, $g \notin A_1H$. Если же элемент g принадлежит подгруппе B, то $g \in K$. Так как в прямом произведении двух финитно аппроксимируемых групп каждый прямой множитель является финитно отделимой подгруппой, $g \notin A_1N$ для некоторой нормальной подгруппы N конечного индекса группы K. Выбрав в соответствии с леммой 2 такую нормальную подгруппу H конечного индекса группы G_1, что $K \cap H = N$, будем иметь $g \notin A_1H$. Осталось рассмотреть случай, когда элемент g лежит в подгруппе K и не принадлежит подгруппе A. При этом можно считать, что g не входит в подгруппу G, т. е. $g \notin B_1$, и потому этот случай рассматривается аналогично случаю, когда $g \in G \setminus B$. А именно, используя финитную отделимость подгруппы B_1 в группе K и лемму 2, найдем такие нормальные подгруппы N и L конечных индексов групп K и G_1 соответственно, что $g \notin B_1N$ и $K \cap L = N$. Полагая затем $M = G \cap L$, в соответствующей группе $G_1(M,N)$ найдем нормальную подгруппу конечного индекса, по модулю которой элемент gN не входит в подгруппу G/M. Тогда прообраз

H этой подгруппы в группе G_1 и будет нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1, такой, что $g \notin AH$.

Будем считать теперь, что длина n элемента g больше 1. Тогда сомножители его несократимой записи $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ принадлежат поочередно подгруппам G (и называются G-слогами) и K (и называются K-слогами) и не лежат в соответствующих объединяемых подгруппах B и B_1. Используя лемму 2 и финитную отделимость в группах G и K подгрупп B и B_1, можно найти нормальные подгруппы L_1 и L_2 конечных индексов группы G_1 такие, что все G-слоги этой записи элемента g не входят в подгруппу BL_1 и все K-слоги записи элемента g не входят в подгруппу B_1L_2. Тогда $L = L_1 \cap L_2$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_1, и потому $M = G \cap L$ и $N = K \cap L$ — (B, B_1, ψ)-совместимые нормальные подгруппы конечных индексов групп G и K. Очевидно поэтому, что если ρ — гомоморфизм группы G_1 на группу $G_1(M, N)$, продолжающий естественные отображения группы G на группу G/M и группы K на группу K/N, то запись $g\rho = (x_1\rho)(x_2\rho) \cdots (x_n\rho)$ элемента $g\rho$ является несократимой в группе $G_1(M, N)$. В частности, элемент $g\rho$ не входит ни в подгруппу G/M, ни в подгруппу K/N. Поскольку в финитно аппроксимируемой группе конечные подгруппы финитно отделимы, элемент $g\rho$ не принадлежит ни подгруппе $G/M \cdot X$, ни подгруппе $K/N \cdot X$ для некоторой нормальной подгруппы X конечного индекса группы $G_1(M, N)$. Тогда прообраз H этой подгруппы относительно гомоморфизма ρ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1 такой, что $g \notin GH$ и $g \notin KH$, и поэтому $g \notin AH$ и $g \notin A_1H$. Лемма доказана.

Лемма 4. *В каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G_1 содержится (A, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа, также имеющая в группе G_1 конечный индекс.*

Доказательство. Пусть L — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_1. Полагаем $M = G \cap L$ и $U = A \cap M$. Пусть также $U_1 = A_1 \cap L$, $U' = U_1\varphi^{-1}$ и $X = U \cap U'$. Тогда X — подгруппа конечного индекса группы A, лежащая в подгруппе M, и потому в группе G существует нормальная подгруппа R конечного индекса, лежащая в M и такая, что $A \cap R = X$. Так как $X \leqslant U'$, подгруппа $X_1 = X\varphi$ содержится в L и имеет конечный индекс в A_1. Пусть еще $Y = B \cap L$ и $Y_1 = Y\psi$. Так как в группе G_1 подгруппы Y и Y_1 совпадают, $Y_1 \leqslant L$. Подгруппа $S = X_1Y_1$ имеет конечный индекс в K и содержится в L. Поскольку $S \cap B_1 = Y_1$, подгруппы R и S являются (B, B_1, ψ)-совместимыми, и мы можем построить группу $\overline{G}_1 = G_1(R, S)$ и гомоморфизм ρ группы G_1 в группу $\overline{G}_1$, действие которого на подгруппах G и K совпадает с соответствующим естественным гомоморфизмом. Так как гомоморфизм ρ сюръективен, образ $L\rho$ подгруппы L является в группе $\overline{G}_1$ нормальной подгруппой конечного индекса. Кроме того, поскольку ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе $\overline{G}_1$ подгрупп R и S, лежащих в L, имеем $\operatorname{Ker}\rho \subseteq L$.

Являясь финитно аппроксимируемой, группа $\overline{G}_1$ обладает нормальной подгруппой $\overline{H}$ конечного индекса, имеющей тривиальное пересечение с каждой из (конечных) подгрупп G/R и K/S и лежащей в подгруппе $L\rho$. Если H — прообраз этой подгруппы относительно отображения ρ, то в силу того, что $\operatorname{Ker}\rho \subseteq L$, имеет место включение $H \subseteq L$. Кроме того, легко видеть, что $H \cap G = R$ и $H \cap K = S$. Поэтому

$$A \cap H = A \cap G \cap H = A \cap R = X \quad \text{и} \quad A_1 \cap H = A_1 \cap K \cap H = A_1 \cap S = X_1,$$

так что подгруппа H является (A, A_1, φ)-совместимой. Лемма доказана.

Утверждение теоремы следует из лемм 3 и 4 и предложения 4.

Библиографический список

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 395—407.
2. *Логинова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3. (2000). С. 47—53.
3. *Логинова Е. Д.* О финитной аппроксимируемости коммутированного HNN-расширения групп. // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып. 3. С. 83—89.
4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.
6. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123—133.
7. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
8. *Burns R., Karrass A., Solitar D.* A note on groups with separable finitely generated subgroups // Bull Aust. Math. Soc. 1987. Vol. 36. P. 153—160.
9. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. Vol. 30. P. 285—293.
10. *Stebe P.* Residual finiteness of a class of knot groups // Comm. Pure and Applied Math. 1968. Vol. 21. P. 563—583.