УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Напомним, что если A и B — некоторые группы, H — центральная подгруппа группы A, K — центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K, то обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется фактор-группа $\overline{G}$ прямого произведения $G = A \times B$ групп A и B по подгруппе N, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Непосредственная проверка показывает выполнимость в группе G равенств $A \cap N = B \cap N = 1$ и $AN \cap BN = HN = KN$. Поэтому подгруппы A и B естественным образом вложимы в группу $\overline{G}$ и пересечение их копий AN/N и BN/N в группе $\overline{G}$ совпадает с копией HN/N подгруппы H (равной копии KN/N подгруппы K).

Финитная аппроксимируемость обобщенных прямых произведений двух групп рассматривалась в работе [1], где было показано, что известные условия Г. Баумслага [4, предложение 2] финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп практически дословно переносятся на обобщенные прямые произведения. В работе [1] был также построен пример, показывающий, что идущее от [4] достаточное условие финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения не является необходимым, и основанный на следующем результате из работы [3]: если группы A и B финитно аппроксимируемы и в группе B финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в K и имеющие в K конечный индекс, то группа $\overline{G}$ финитно аппроксимируема.

В данной статье рассматриваются условия, при которых обобщенное прямое произведение групп будет группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности (фас-группой). Напомним, что группа X называется фас-группой, если для любых двух не сопряженных элементов этой группы существует гомоморфизм ее на некоторую конечную группу, в которой образы этих элементов не сопряжены.

Легко видеть (см. предложение 2 ниже), что произвольные элементы a_1 и a_2 группы A сопряжены в A тогда и только тогда, когда определяемые ими элементы a_1N и a_2N группы $\overline{G}$ сопряжены в этой группе. То же справедливо для элементов группы B. Поэтому если группа $\overline{G}$ является фас-группой, то фас-группами должны быть группы A и B. В следующем частном случае это необходимое условие оказывается и достаточным.

Предложение 1. *Пусть группы A и B являются фас-группами. Если подгруппы H и K конечны, то и группа $\overline{G}$ будет фас-группой.*

Действительно, в этом случае группа $G = A \times B$ является фас-группой, а ее подгруппа N конечна, и потому требуемое утверждение следует из предложения 2 работы [2], где показано, в частности, что фактор-группа произвольной фас-группы по конечной нормальной подгруппе является фас-группой.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть A и B — фас-группы, H — конечно порожденная центральная подгруппа группы A, K — конечно порожденная центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Предположим также, что фактор-группа группы A по произвольной подгруппе, лежащей в H и имеющей в H конечный индекс, является фас-группой и фактор-группа группы B по произвольной подгруппе, лежащей в K и имеющей в K конечный индекс, является фас-группой. Тогда обобщенное прямое произведение $\overline{G}$ групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, будет фас-группой.*

Доказательство этой теоремы начнем с формулировки простого критерия сопряженности элементов группы $\overline{G}$.

Предложение 2. *Пусть $f_1 = a_1 b_1$ и $f_2 = a_2 b_2$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2)$, — произвольные элементы группы $G = A \times B$. В группе $\overline{G}$ элементы $f_1 N$ и $f_2 N$ сопряжены тогда и только тогда, когда существует $h \in H$ такой, что элементы a_1 и $a_2 h$ сопряжены в группе A и элементы b_1 и $b_2(h\varphi)^{-1}$ сопряжены в группе B.*

Действительно, элементы $f_1 N$ и $f_2 N$ сопряжены в группе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда $(gN)^{-1}(f_1 N)(gN) = f_2 N$ для некоторого $g \in G$, $g = cd$, где $c \in A$ и $d \in B$, т. е. тогда и только тогда, когда $g^{-1} f_1 g = f_2 n$ для подходящего $n \in N$, $n = h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. А это равносильно одновременной выполнимости равенств $c^{-1} a_1 c = a_2 h$ и $d^{-1} b_1 d = b_2 (h\varphi)^{-1}$.

Ввиду предложения 1 для доказательства теоремы достаточно для любой пары несопряженных элементов группы $\overline{G}$ указать такой гомоморфизм этой группы на некоторое обобщенное прямое произведение двух фас-групп с объединенными конечными подгруппами, при котором образы этих элементов не будут сопряженными. Воспользуемся следующим способом построения гомоморфных образов группы $\overline{G}$, являющихся обобщенными прямыми произведениями двух групп.

Выберем произвольную подгруппу R группы H, положим $S = R\varphi$ и обозначим через $\widehat{\varphi}$ изоморфизм подгруппы H/R группы A/R на подгруппу K/S группы B/S, при котором элемент hR переходит в $(h\varphi)S$ $(h \in H)$. Пусть $\overline{G}(R)$ — обобщенное прямое произведение групп A/R и B/S с подгруппами H/R и K/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\widehat{\varphi}$. Таким образом, группа $\overline{G}(R)$ является фактор-группой группы $A/R \times B/S$ по ее подгруппе $\widehat{N}$, состоящей из элементов $(hR)((hR)\widehat{\varphi})^{-1}$ (где $h \in H$), и потому изоморфна фактор-группе группы G/RS по ее подгруппе NRS/RS. Поскольку $(G/RS)\,/\,(NRS/RS) \simeq G/NRS \simeq (G/N)\,/\,(NRS/N)$, существует гомоморфизм $\rho(R)$ группы $\overline{G}$ на группу $\overline{G}(R)$, при котором элемент fN группы $\overline{G}$, определяемый элементом $f = ab \in G$, переходит в элемент $\widehat{f}\widehat{N}$, определяемый элементом $\widehat{f} = (aR)(bS) \in A/R \times B/S$. Ядро этого гомоморфизма совпадает, как легко видеть, с подгруппой $RN/N = SN/N$.

В частности, фактор-группа группы $\overline{G}$ по подгруппе HN/N изоморфна группе $\overline{G}(H)$, которая является обычным прямым произведением фактор-групп A/H и B/K. Так как группы A/H и B/K являются в силу условия теоремы фас-группами, фактор-группа группы $\overline{G}$ по подгруппе HN/N есть фас-группа. Поэтому если элементы f_1N и f_2N (где, как и выше, $f_i = a_ib_i \in G$, $a_i \in A$, $b_i \in B$) группы $\overline{G}$ не сопряжены по модулю подгруппы HN/N, то гомоморфизм $\rho(H)$ является для этих элементов искомым. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда элементы f_1N и f_2N сопряжены по модулю подгруппы HN/N, т. е. когда элементы a_1 и a_2 сопряжены в группе A по модулю подгруппы H и элементы b_1 и b_2 сопряжены в группе B по модулю подгруппы K. Заменив один из элементов f_1 и f_2 на сопряженный, мы сведем этот случай к рассмотрению пары несопряженных элементов группы $\overline{G}$, определяемых элементами группы G вида $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$, где $a \in A$, $h \in H$, $b \in B$ и $k \in K$.

Введем в рассмотрение следующие подгруппы групп H и K:

$$U_a = \left\{x \in H \mid (\exists y \in A)(y^{-1}ay = ax\right\},$$
$$U_b = \left\{x \in K \mid (\exists y \in B)(y^{-1}ay = ax\right\}.$$

Полагаем также $V_b = U_b\varphi^{-1}$. Имеет место

Предложение 3. *Пусть $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$ такие, как выше. Элементы fN и gN сопряжены в группе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда элемент $h(k\varphi^{-1})$ принадлежит подгруппе U_aV_b.*

Для доказательства предположим сначала, что элементы fN и gN сопряжены в группе $\overline{G}$. Тогда в силу предложения 2 существует такой элемент $c \in H$, что для подходящих элементов $x \in A$ и $y \in B$ выполнены равенства $x^{-1}ax = ahc$ и $y^{-1}by = bk(c\varphi)^{-1}$. Тогда имеют место включения $hc \in U_a$ и $k(c\varphi)^{-1} \in U_b$, т. е. $(k\varphi^{-1})c^{-1} \in V_b$. Следовательно, $h(k\varphi^{-1}) = hc \cdot (k\varphi^{-1})c^{-1} \in U_aV_b$.

Обратно, предположим, что $h(k\varphi^{-1}) = uv$ для некоторых $u \in U_a$ и $v \in V_b$. Тогда $x^{-1}ax = au$ для подходящего $x \in A$ и, т. к. $v\varphi \in U_b$, $y^{-1}by = b(v\varphi)$ для подходящего $y \in B$. Поскольку для любого $h \in H$ выполнено сравнение $h \equiv h\varphi \pmod N$, имеем

$$(xy)^{-1}f(xy) = au \cdot b(v\varphi) \equiv a(uv) \cdot b = a(h(k\varphi^{-1})) \cdot b \equiv ah \cdot bk = g \pmod N.$$

Предложение 4. *Пусть X — группа, Z — центральная подгруппа группы X и для элемента $a \in X$ подгруппа U_a группы X состоит из всех таких элементов $z \in Z$, что элементы a и az сопряжены в группе X.*

Пусть еще R — подгруппа группы Z и пусть, аналогично, подгруппа U_{aR} фактор-группы X/R состоит из всех таких смежных классов $zR \in Z/R$, что элементы aR и $aR \cdot zR$ сопряжены в группе X/R. Тогда $U_{aR} = U_aR/R$.

В самом деле, включение $U_aR/R \subseteq U_{aR}$ просто очевидно. Если для некоторого $z \in Z$ смежный класс zR принадлежит подгруппе U_{aR}, то для подходящего элемента $x \in X$ выполнено равенство $(xR)^{-1} \cdot aR \cdot xR = aR \cdot zR$, равносильное тому, что $x^{-1}ax = azr$ для некоторого $r \in R$. Так как $R \subseteq Z$, это означает, что $zr \in U_a$, откуда $z \in U_aR$, т. е. $zR \in U_aR/R$.

Пусть теперь элементы $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$ группы G таковы, что элементы fN и gN не сопряжены в группе $\overline{G}$. Тогда в силу предложения 3 в группе A элемент $h(k\varphi^{-1})$ не принадлежит подгруппе U_aV_b. Так как в группе H все подгруппы финитно отделимы, найдется подгруппа R конечного индекса группы H такая, что элемент $h(k\varphi^{-1})$ не входит в подгруппу U_aV_bR, т. е. смежный класс $h(k\varphi^{-1})R$ не принадлежит подгруппе U_aV_bR/R фактор-группы H/R.

Пусть $\overline{G}(R)$ — введенное выше обобщенное прямое произведение групп A/R и B/S с подгруппами H/R и K/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\widehat{\varphi}$, и $\rho(R)$ — соответствующий гомоморфизм группы $\overline{G}$ на группу $\overline{G}(R)$. Покажем, что $\rho(R)$-образы элементов fN и gN не сопряжены в группе $\widehat{G}(R)$. Так как эти образы определяются элементами $fRS = aR \cdot bS$ и $gRS = (ah)R \cdot (bk)S$ соответственно, предположение противного будет означать, в силу предложения 3, что элемент $hR \cdot (kS)\widehat{\varphi}^{-1} = h(k\varphi^{-1})R$ принадлежит подгруппе $U_{aR}V_{bS}$. Но в силу предложения 4 $U_{aR} = U_aR/R$. Кроме того, аналогично, $U_{bS} = U_bS/S$ и потому $V_{bS} = V_bR/R$. Таким образом, $U_{aR}V_{bS} = U_aV_bR/R$, так что элемент $h(k\varphi^{-1})$ оказывается принадлежащим подгруппе U_aV_bR, а это противоречит выбору R.

Поскольку фактор-группы A/R и B/S являются по условию фас-группами и потому группа $\overline{G}(R)$ в силу предложения 1 является фас-группой, доказательство теоремы закончено.

Библиографический список

1. *Агафонова А. В., Молдаванский Д. И.* О финитной аппроксимируемости обобщенных прямых произведений групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6 (2008). С. 3—8.
2. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125—130.
3. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Там же. Естеств., обществ. науки. 2008. Вып. 2. С. 114—122.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193—209.