УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЭРА

Д. И. Молдаванский (г. Иваново)

Аннотация

Приведен обзор полученных к настоящему времени результатов об аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра некоторыми классами конечных групп относительно предикатов равенства и сопряженности.

Группами Баумслага – Солитэра называют группы вида

$$G(m,n) = \langle a,\, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа. Отметим сразу же, что поскольку группы $G(m,n)$, $G(n,m)$ и $G(-m,-n)$ попарно изоморфны, без потери общности можно считать, что параметры m и n, определяющие группу $G(m,n)$ удовлетворяют условию $|n| \geqslant m > 0$; в тех случаях, когда это удобно для формулировок, мы будем предполагать это условие выполненным.

Семейство групп $G(m,n)$ было введено в рассмотрение в статье Г. Баумслага и Д. Солитэра [1]. Именно в этом семействе авторы обнаружили первый пример группы с одним определяющим соотношением, не являющейся хопфовой (т. е. изоморфной некоторой своей истинной фактор-группе); было показано, что группа $G(2,3)$ является нехопфовой. Тем самым оказалось опровергнутым предположение о том, что произвольная группа, определяемая одним соотношением, является хопфовой и даже финитно аппроксимируемой. Это предположение разделялось в то время рядом математиков и основывалось, по-видимому, на чисто формальной близости групп с одним определяющим соотношением к свободным группам. Тот же пример позволил ответить и на вопрос Б. Неймана [2], может ли нехопфова группа, порождаемая двумя элементами, определяться конечным множеством соотношений.

В течение ряда лет свойства групп Баумслага – Солитэра привлекали внимание многих математиков, в частности и потому, что ряд естественных вопросов о строении и свойствах групп с одним определяющим соотношением в случае групп Баумслага – Солитэра получают более определенные, чем в общем случае, ответы. Например, проблема изоморфизма для групп этого семейства оказывается тривиальной, благодаря следующему результату (см. [3]): группы $G(m,n)$ и $G(m',n')$, где $|n| \geqslant m > 0$ и $|n'| \geqslant m' > 0$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = m'$ и $n = n'$. В определенной степени это справедливо и для проблем, связанных с аппроксимируемостью групп. Обзор полученных к настоящему времени результатов об аппроксимируемости групп $G(m,n)$ некоторыми классами конечных групп относительно предикатов равенства и сопряженности и является целью данного сообщения.

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых различных (соответственно, не сопряженных) ее элементов a и b существует гомоморфизм группы G на некоторую группу X из класса $\mathcal{K}$, при котором образы этих элементов различны (соответственно, не сопряжены в группе X). Очевидно, что произвольная $\mathcal{K}$-аппроксимируемая относительно сопряженности группа является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

Через $\mathcal{F}$ будет обозначаться класс всех конечных групп, и для некоторого простого числа p и некоторого множества π простых чисел символы $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_\pi$ будут обозначать соответственно класс всех конечных p-групп и класс всех конечных π-групп. Ясно, что свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости (относительно сопряженности) совпадает с классическим свойством финитной аппроксимируемости (относительно сопряженности).

Попытка в статье [1] указать достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп $G(m,n)$ была уточнена в работе С. Мескина [4] следующим образом:

Теорема 1. *Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда (при условии $|n| \geqslant m > 0$) или $m = 1$, или $|n| = m$.*

В работе [5] доказана

Теорема 2. *Для любого простого числа p группа $G(m,n)$ (где снова предполагается, что $|n| \geqslant m > 0$) является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod p$, или $|n| = m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $n = -m$, то $p = 2$.*

Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены следующим образом.

Для некоторого класса групп $\mathcal{K}$ и произвольной группы G через $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем обозначать пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$. Очевидно, что группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой в точности тогда, когда $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ совпадает с единичной подгруппой; более того, $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ является наименьшей из нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым $\mathcal{K}$-аппроксимируемы.

В случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем писать $\sigma(G)$, и если $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ договоримся писать $\sigma_p(G)$.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 3. ([6, теорема 1]) *Пусть $d = (m,n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n. Подгруппа $\sigma\left(G(m,n)\right)$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ множества всех коммутаторов $\left[a^k b^d a^{-k},\, b\right]$, где k принимает всевозможные целочисленные значения.*

Теорема 4. (см. [7]) *Пусть p — простое число. Запишем числа m и n в виде $m = p^r m_1$ и $n = p^s n_1$, где $r, s \geqslant 0$ и каждое из чисел m_1 и n_1 взаимно* *просто с p. Обозначим также через d наибольший общий делитель чисел m_1 и n_1 и запишем $m_1 = du$ и $n_1 = dv$. Тогда*

если $r \neq s$ или если числа m_1 и n_1 не сравнимы по модулю p, то подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ элемента b^{p^t}, где $t = \min\{r,s\}$;

если $r = s$ и $m_1 \equiv n_1 \pmod p$, то подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ множества, состоящего из элемента $a^{-1}b^{p^r u}ab^{-p^r v}$ и всевозможных коммутаторов вида $\left[a^k b^{p^r} a^{-k}, b\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Следует подчеркнуть, что в доказательствах теорем 3 и 4 критерии $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $G(m,n)$, доставляемые теоремами 1 и 2, не используется и, наоборот, могут быть получены соответственно из теорем 3 и 4 достаточно простыми рассуждениями.

Другое направление обобщений теорем 1 и 2 состоит в изучении условий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости групп $G(m,n)$ для некоторого (непустого) множества простых чисел π. В статье [8] доказана

Теорема 5. *Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда ,когда существует π-число $s > 1$, взаимно простое с n, порядок по модулю которого числа n также является π-числом.*

Из теоремы 2 следует, разумеется, что группа $G(1,n)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, если множество π содержит хотя бы один делитель числа $n-1$. Существование множества π, не содержащего делителей $n-1$ и такого, что группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, гарантируется следующим утверждением, вытекающим из теоремы 5:

Следствие. *Если $|n| > 1$, то для любого простого числа p, не делящего число $n-1$, существует простое число q, не делящее $n-1$ и такое, что группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема при $\pi = \{p,q\}$.*

Для групп вида $G(m,n)$, где $|n| = m$, общий критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости допускает более прозрачную формулировку:

Теорема 6. *Для любого множества простых чисел π группа $G(m,m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π-числом, а группа $G(m,-m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π-числом и множество π содержит число 2.*

Перейдем теперь к результатам об аппроксимируемости групп $G(m,n)$ относительно сопряженности.

Утверждение об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности групп $G(1,n)$, доказанное в [9], вытекает и из полученного в [10] более общего результата об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности любого нисходящего HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы. $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности групп $G(m,n)$, где $|n| = m$, может быть выведена из результата работы [11] или из его обобщения, полученного в [12].

Впрочем, более простое и непосредственное доказательство этого факта можно получить, следуя идеям статьи М. И. Каргаполова [13].

С другой стороны, в работе [14] было показано, что для любого целого числа n, отличного от 0 и ± 1, и для любого множества π, состоящего из двух простых чисел p и q, группа $G(1, n)$ не является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Отсюда и из следствия из теоремы 5 вытекает, таким образом, что для некоторых 2-элементных множеств π группа $G(1, n)$ может быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой и не быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Для групп вида $G(m, n)$, где $|n| = m$, ситуация оказывается противоположной:

Теорема 7. *Если группа $G(m, n)$, где $|n| = m$, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она является и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Теоремы 6 и 7 получены недавно И. А. Варламовой и Д. И. Молдаванским; статья принята к печати в Вестнике Ивановского государственного университета.

Список литературы

[1] Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199 – 201.

[2] Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // PhilṪransṘoyal Socȯf London. 1954. Vol. 246. P. 503 – 554.

[3] Молдаванский Д. И. Изоморфизм групп Баумслага – Солитэра // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 12. С. 1684 – 1686.

[4] Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105 – 114.

[5] Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129 – 140.

[6] Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага – Солитэра // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 92 – 100.

[7] Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного p-индекса в группах Баумслага – Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2010. Вып. 2. С. 106 – 111.

[8] Иванова О. А., Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6. Иваново. 2008. С. 51 – 58.

[9] Молдаванский Д. И., Кравченко Л. В., Фролова Е. Н. // Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Тула: Тул. гос. пед. инст. 1986, С. 81 – 91

[10] Соколов Е. В. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 5, С. 748 – 762.

[11] Wong P. C., Tang C. K. Conjugacy separability of certain HNN extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25 – 31.

[12] Сенкевич О. Е. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. 2006, Вып. 3. С. 133 – 146.

[13] Каргаполов М. И. Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряжённости // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 1. С. 63 – 68.

[14] Иванова Е. А., Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными группами разрешимых групп Баумслага – Солитэра // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2011, Вып. 2. С. 129 – 136

ON THE RESIDUALLITY OF BAUMSLAG – SOLITAR GROUPS

D. I. Moldavanskii

Аннотация

The survey of results on residuallity and conjugacy separability in some classes of finite groups of Baumslag – Solitar groups that have received up to now is given.