УДК 512.543

Д. И. Молдаванский, К. С. Пелевина

О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Доказано, что в обобщенном свободном произведении двух групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если этим свойством обладают свободные множители, а объединенная подгруппа удовлетворяет условию максимальности и содержит подгруппу конечного индекса, нормальную в каждом свободном сомножителе.

Ключевые слова: финитно аппроксимируемая группа, финитно отделимая подгруппа, обобщенное свободное произведение групп.

It is proved that all finitely generated subgroups of generalized free product of two groups are finitely separable provided that free factors have this property and amalgamated subgroup satisfies the maximum condition for subgroups and contains a finite index subgroup that is normal in each free factor.

Key words: finitely residual group, finitely separable subgroup, generalized free product of groups.

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (или, короче, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, образ элемента g относительно которого отличен от 1. Подгруппа H группы G называется финитно отделимой ($\mathcal{F}$-отделимой), если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу такой, что образ $g\varphi$ элемента g не принадлежит образу $H\varphi$ подгруппы H. Таким образом, группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathcal{F}$-отделима. Более общо, легко видеть, что нормальная подгруппа H группы G является $\mathcal{F}$-отделимой тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Из этого замечания и существования 2-порожденных групп, не являющихся $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми (см., напр.: [5]), следует, что каждая нециклическая свободная группа содержит подгруппу, не являющуюся $\mathcal{F}$-отделимой. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что задача нахождения условий наследования обобщенным свободным произведением групп свойства $\mathcal{F}$-отделимости *всех* подгрупп фактически сводится к вопросу отсутствия в нем нециклических свободных подгрупп.

Действительно, легко видеть, что свободное произведение

$$G = \big(A * B;\ H = K,\ \varphi\big)$$

групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$, в случае, когда $H \neq A$ и $K \neq B$, не содержит нециклических свободных подгрупп в точности тогда, когда нециклические свободные подгруппы отсутствуют в группах A и B и индексы подгрупп H и K соответственно в группах A и B равны 2. Отсюда, в свою очередь, непосредственно следует (снова при условии $H \neq A$ и $K \neq B$), что все подгруппы группы G $\mathcal{F}$-отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы и $[A : H] = [B : K] = 2$.

С другой стороны, из теоремы М. Холла [6] вытекает, что произвольная конечно порожденная подгруппа любой свободной группы является $\mathcal{F}$-отделимой. Обобщая этот результат, Н. С. Романовский [2] доказал, что (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых $\mathcal{F}$-отделимы, также является группой, все конечно порожденные подгруппы которой $\mathcal{F}$-отделимы. Оказалось, тем не менее, что для конструкции обобщенного свободного произведения групп аналогичное утверждение может, вообще говоря, оказаться неверным.

Началом систематического изучения свойства $\mathcal{F}$-отделимости всех конечно порожденных подгрупп обобщенного свободного произведения групп следует, по-видимому, считать [4]. В этой работе Р. Алленби и Р. Грегорас привели первый (и наиболее простой) пример содержащего неотделимую конечно порожденную подгруппу обобщенного свободного произведения двух групп, у которых все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. Пример группы, содержащей неотделимую конечно порожденную подгруппу и являющейся обобщенным свободным произведением двух групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых $\mathcal{F}$-отделимы, с циклическими объединяемыми подгруппами, был построен Е. Рипсом [7]. Позднее в [3] был приведен более простой аналогичный пример обобщенного свободного произведения с циклическим объединением двух конечно порожденных нильпотентных групп.

Из результатов противоположного характера, гарантирующих $\mathcal{F}$-отделимость всех конечно порожденных подгрупп обобщенного свободного произведения $G = \big(A * B;\ H = K,\ \varphi\big)$, отметим прежде всего, что это утверждение справедливо (и почти очевидно) в случае, когда группы A и B конечны. В [4] было доказано, что в группе G все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, если в группах A и B все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, а подгруппы H и K конечны или если группы A и B являются почти полициклическими и подгруппа H содержит такую подгруппу U конечного индекса, что U и $U\varphi$ являются нормальными подгруппами групп A и B соответственно.

В [1] была доказана

Теорема 1. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K,\ \varphi\big)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$. Пусть H является нормальной подгруппой группы A, K является нормальной подгруппой группы B и группы H и K удовлетворяют условию максимальности для подгрупп. Если в группах A и B все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, то и в группе G все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.*

Целью данной статьи является доказательство следующего обобщения теоремы 1, а также приведенного выше результата из [4] о свободном произведении почти полициклических групп:

Теорема 2. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K,\ \varphi\big)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соот-*

ветствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$. Пусть H и K являются группами с условием максимальности для подгрупп. Если в группах A и B все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, а подгруппа H содержит такую подгруппу U конечного индекса, что U и $U\varphi$ являются нормальными подгруппами групп A и B соответственно, то в группе G все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее простое замечание из [1]:

Лемма 1. *Пусть N — нормальная подгруппа некоторой группы L. Если N является конечно порожденной группой и в группе L все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, то и в фактор-группе L/N все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.*

Легко видеть, что поскольку подгруппы U и $V = U\varphi$ лежат в подгруппах A и B соответственно и нормальны в них, то подгруппа $U = U\varphi$ группы $G = \bigl(A * B;\ H = K,\ \varphi\bigr)$ нормальна и фактор-группа G/U изоморфна свободному произведению

$$\overline{G} = \bigl(\overline{A} * \overline{B};\ \overline{H} = \overline{K},\ \overline{\varphi}\bigr)$$

групп $\overline{A} = A/U$ и $\overline{B} = B/V$ с подгруппами $\overline{H} = H/U$ и $\overline{K} = K/V$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\overline{\varphi}\colon \overline{H} \to \overline{K}$, индуцированным отображением φ. Так как в силу условия теоремы группы U и V являются конечно порожденными, из леммы 1 следует, что в группах $\overline{A}$ и $\overline{B}$ все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. Далее, поскольку в свободном произведении $\overline{G}$ объединяемые подгруппы $\overline{H}$ и $\overline{K}$ конечны, из леммы 1 и приведенного выше результата из [4] вытекает

Лемма 2. *В фактор-группе G/U все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.*

Пусть P — произвольная конечно порожденная подгруппа группы G. Для доказательства $\mathcal{F}$-отделимости этой подгруппы достаточно для любого элемента $a \in G$, не принадлежащего подгруппе P, построить такой гомоморфизм θ группы G на некоторую группу с $\mathcal{F}$-отделимыми конечно порожденными подгруппами, что $a\theta \notin P\theta$. Если элемент a не принадлежит подгруппе PU, то в силу леммы 2 искомым является, как легко видеть, естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/U.

Будем далее считать, что элемент a входит в подгруппу PU, так что $a = pu$ для подходящих элементов $p \in P$ и $u \in U$. Так как $a \notin P$, элемент u не входит в подгруппу $W = P \cap U$. Поскольку группа H удовлетворяет условию максимальности, ее подгруппа W является конечно порожденной и потому $\mathcal{F}$-отделима в группе A. Следовательно, существует нормальная подгруппа R конечного индекса группы A такая, что $u \notin WR$. Полагаем $T = U \cap R$. Тогда T — нормальная подгруппа конечного индекса в группе U и $u \notin WT$. Покажем, что $a \notin PT$.

Действительно, в противном случае для некоторых элементов $p_1 \in P$ и $t \in T$ должно выполняться равенство $a = p_1 t$. Следовательно, $pu = p_1 t$, и потому элемент $p_1^{-1}p = tu^{-1}$ принадлежит подгруппе W. Отсюда $u = (p_1^{-1}p)^{-1}t$ входит в WT, что невозможно.

Поскольку группа U является конечно порожденной, подгруппу T без потери общности можно считать характеристической в U и потому — нормальной подгруппой группы A. Тогда $S = T\varphi$ — характеристическая подгруппа группы V и нормальная подгруппа группы B. Таким образом, подгруппа T удовлетворяет условиям теоремы 2, и аналогично лемме 2 можно утверждать, что в фактор-группе G/T все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. Поскольку элемент a не входит в подгруппу PT, то искомым является естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/T. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И., Ускова А. А.* О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3 (47). С. 92—98.
2. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324—1329.
3. *Allenby R., Doniz D.* A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 4. P. 1003—1005.
4. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9—17.
5. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
6. *Hall M.* Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 421—432.
7. *Rips E.* An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Israel J. Math. 1990. Vol. 70, № 1. P. 104—110.

УДК 512.543

Е. В. Соколов

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА Д. И. МОЛДАВАНСКОГО К ИССЛЕДОВАНИЮ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЙ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП

Статья представляет собой расширенную версию доклада, прочитанного автором на Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015). Приводятся общие сведения о корневых классах и аппроксимируемости ими свободных конструкций групп, краткий обзор известных результатов об аппроксимируемости (относительно отношения равенства элементов) не являющихся нисходящими HNN-расширений и описание некоторых новых результатов об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами, в том числе полученных с использованием метода спуска и подъема совместимых подгрупп Д. И. Молдаванского.

Ключевые слова: аппроксимационные свойства, HNN-расширение, корневой класс групп.