

УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

## ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Доказано, что группа  $\langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m \rangle$  аппроксимируема конечными  $\pi$ -группами тогда и только тогда, когда  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами.

**Ключевые слова:** аппроксимируемость группы в некотором классе групп, отделимость подгрупп в некотором классе групп,  $HNN$ -расширение групп.

It is proved that the group  $\langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m \rangle$  is residually a finite  $\pi$ -group if and only if  $m$  and  $k$  are  $\pi$ -numbers.

**Key words:** residuality of group in some class of groups, separability of subgroups in some class of groups,  $HNN$ -extension of groups.

### 1. Введение

Пусть  $\mathcal{X}$  — некоторый класс групп. Напомним, что группа  $G$  называется аппроксимируемой группами из этого класса ( $\mathcal{X}$ -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента  $g \in G$  существует гомоморфизм группы  $G$  на группу из класса  $\mathcal{X}$ , образ при котором элемента  $g$  отличен от единицы. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется отделимой в классе  $\mathcal{X}$  ( $\mathcal{X}$ -отделимой), если для произвольного элемента  $g \in G$ , не принадлежащего подгруппе  $H$ , существует гомоморфизм группы  $G$  на группу из класса  $\mathcal{X}$ , образ при котором элемента  $g$  не входит в образ подгруппы  $H$ .

Как обычно, через  $\mathcal{F}$  обозначается класс всех конечных групп, через  $\mathcal{F}_p$  — класс всех конечных  $p$ -групп и через  $\mathcal{F}_\pi$  — класс всех конечных  $\pi$ -групп, где  $\pi$  — некоторое (непустое) множество простых чисел.

В данной работе продолжают исследования аппроксимационных свойств групп, принадлежащих семейству групп, определяемых представлением вида

$$G(l, m; k) = \langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^lt^{-1}a^kt = a^m \rangle,$$

где  $l, m, k$  — произвольные целые числа, отличные от нуля. Поскольку, как легко видеть, группы  $G(l, m; k)$ ,  $G(l, m; -k)$ ,  $G(-l, -m; k)$  и  $G(m, l; k)$  попарно изоморфны, без потери общности можно считать, что числовые параметры, определяющие группу этого семейства, удовлетворяют неравенствам  $k > 0$  и  $|l| \geq m > 0$ ; в формулировках всех утверждений ниже выполнимость этих условий предполагается.

Заметим также, что введение в представление группы  $G(l, m; k)$  еще одного порождающего символа  $b$  вместе с определяющим соотношением  $b = t^{-1}a^kt$  дает ее представление вида

$$G(l, m; k) = \langle a, t; b^{-1}a^lb = a^m, t^{-1}a^kt = b \rangle,$$

которое делает очевидным, что эта группа является  $HNN$ -расширением

© Молдаванский Д. И., 2018

Публикуемые результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 1.8695.2017/8.9.

• Серия «Естественные, общественные науки»

группы  $H(l, m) = \langle a, b; b^{-1}a^l b = a^m \rangle$ , принадлежащей к известному семейству групп Баумслэга — Солитэра [6].

А именно, обозначив через  $A$  и  $B$  циклические подгруппы группы  $H(l, m)$ , порождаемые соответственно элементами  $a$  и  $b$ , мы видим, что группа  $G(l, m; k)$  есть  $HNN$ -расширение

$$G(l, m; k) = (H(l, m), t; t^{-1}A^k t = B, \varphi)$$

группы  $H(l, m)$  с проходной буквой  $t$  и подгруппами  $A^k$  и  $B$ , связанными в соответствии с изоморфизмом  $\varphi A^k$  на  $B$ , определяемым отображением  $a^k \mapsto b$ .

Систематическое изучение этих групп, по-видимому, впервые предпринял А. М. Бруннер [7]. Впрочем, на группы этого класса еще в 1969 г. обратил внимание Г. Баумслэг [5], доказав, что все конечные гомоморфные образы группы  $G(2, 1; 1)$  являются циклическими группами (и приводя тем самым еще один пример группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами). Исследования Бруннера были продолжены затем в работе [3] и ряде других; краткий обзор некоторых результатов, полученных в [7] и [3], приведен в [1].

Перечислим известные результаты об аппроксимационных свойствах групп  $G(l, m; k)$ . Критерий  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемости этих групп, полученный в работе [3] (в [7] отмечена без доказательства необходимость условия), формулируется следующим образом:

**Предложение 1.1.** *Группа  $G(l, m; k)$   $\mathcal{F}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $|l| = m$ .*

В работе [10] было показано, что равенство  $|l| = m$  гарантирует справедливость и более сильных аппроксимационных свойств: при его выполнении группа  $G(l, m; k)$   $\mathcal{F}$ -аппроксимируема относительно сопряженности и в этой группе все циклические подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Так как любая  $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа является  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой, то следующее утверждение, доказанное в [4], доставляет критерий  $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости групп рассматриваемого семейства.

**Предложение 1.2.** *Для любого простого числа  $p$  группа  $G(m, m; k)$   $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m = p^r$  и  $k = p^s$  для некоторых целых чисел  $r \geq 0$  и  $s \geq 0$ , а группа  $G(-m, m; k)$   $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $p = 2$ ,  $m = 2^r$ ,  $k = 2^s$  для некоторых целых чисел  $r \geq 0$  и  $s \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $s \leq r$ .*

Основным результатом данной работы является следующее обобщение первого утверждения предложения 1.2:

**Теорема.** *Для произвольного множества  $\pi$  простых чисел группа  $G(m, m; k)$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами.*

Вопрос о соответствующем критерии для групп вида  $G(-m, m; k)$  остается открытым. Можно утверждать лишь, что если такая группа  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами и множество  $\pi$  содержит число 2 (см. предложение 3.1 ниже). Из второго утверждения предложения 1.2 следует, что это условие, вообще говоря, достаточным не является.

## 2. Предварительные замечания

Приведем ряд необходимых нам результатов о группах Баумслэга — Солитэра.

**Предложение 2.1** [2, теорема 4]. *Для любого множества простых чисел группа  $H(m, m)$   $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m$  является  $\pi$ -числом, а группа  $H(-m, m)$   $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m$  является  $\pi$ -числом и множество  $\pi$  содержит число 2.*

Докажем теперь

**Предложение 2.2.** *Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел и пусть  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами. Тогда в группе  $H(m, m)$  подгруппы  $A^k$  и  $B$   $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.*

*Доказательство.* Если в представление  $\langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m \rangle$  группы  $H = H(m, m)$  ввести новый порождающий элемент  $c$  вместе с соотношением  $c = a^m$ , становится понятно, что эта группа является свободным произведением с объединенной подгруппой  $A^m$  группы  $A$  и свободной абелевой группы  $U = \langle b, c; bc = cb \rangle$ :  $H = (A * U; A^m)$ .

Требуется показать, что для любого элемента  $g \in H$  из того, что  $g \notin A^k$  ( $g \notin B$ ), следует существование такого гомоморфизма  $\varphi$  группы  $H$  на конечную  $\pi$ -группу, что  $g\varphi \notin A^k\varphi$  (соответственно,  $g\varphi \notin B\varphi$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда элемент  $g$  не принадлежит ни одному из свободных множителей, т. е. длина  $l$  его несократимой записи  $x_1x_2 \cdots x_l$  больше единицы. Поскольку тогда каждый слог  $x_i$  этой записи не входит в объединяемую подгруппу, произвольный  $A$ -слог имеет вид  $a^r$ , где  $m \nmid r$ , а произвольный  $U$ -слог имеет вид  $c^r b^s$ , где  $s \neq 0$ .

Фиксируем  $\pi$ -число  $q$ , не делящее показателей степени у элемента  $b$  во всех  $U$ -словах этой записи элемента  $g$ , и обозначим через  $\bar{H}$  факторгруппу группы  $H$  по нормальному замыканию элементов  $a^m$  и  $b^q$ . Так как группа  $\bar{H}$  определяется представлением

$$\langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m, a^m = 1, b^q = 1 \rangle,$$

а потому и представлением

$$\langle a, b; a^m = 1, b^q = 1 \rangle,$$

она является обычным свободным произведением двух конечных  $\pi$ -групп  $\bar{A} = A/A^m$  и  $\bar{B} = B/B^q$  и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема.

Обозначим также через  $\varphi$  естественный гомоморфизм группы  $H$  на группу  $\bar{H}$  и через  $\bar{h}$   $\varphi$ -образ произвольного элемента  $h \in H$ . Поскольку запись  $\bar{x}_1\bar{x}_2 \cdots \bar{x}_l$  элемента  $\bar{g}$  является, очевидно, несократимой в свободном разложении  $\bar{H} = \bar{A} * \bar{B}$  группы  $\bar{H}$ , этот элемент не входит ни в подгруппу  $\bar{A}$ , ни в подгруппу  $\bar{B}$ , и так как в  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группе все конечные подгруппы  $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы, существуют гомоморфизмы  $\rho$  и  $\sigma$  группы  $\bar{H}$  на конечные  $\pi$ -группы такие, что  $g(\varphi\rho) \notin A(\varphi\rho)$  (и тем более  $g(\varphi\rho) \notin A^k(\varphi\rho)$ ) и  $g(\varphi\sigma) \notin B(\varphi\sigma)$ .

Предположим теперь, что элемент  $g$  принадлежит одному из свободных сомножителей группы  $H$  и не входит в подгруппу  $A^k$ . Если  $g \in A$ , то при гомоморфизме группы  $H$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_k$  вычетов

целых чисел по модулю  $k$ , определяемом отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ , образ подгруппы  $A^k$  равен нулевой подгруппе, а образ элемента  $g$  отличен от нуля. Если элемент  $g$  принадлежит подгруппе  $U$  и не входит в  $A$ , то  $g = c^r b^s$  для некоторых целых  $r$  и  $s$ , причем  $s \neq 0$ . Тогда при определенном выше естественном гомоморфизме  $\varphi$  группы  $H$  на ее фактор-группу  $\bar{H}$  по нормальному замыканию элементов  $a^m$  и  $b^q$ , где  $q$  —  $\pi$ -число, не делящее  $s$ , образ  $\bar{g}$  элемента  $g$  является неединичным элементом свободного множителя  $\bar{B}$  и потому не входит в подгруппу  $\bar{A}$ . Построение гомоморфизма группы  $H$  на конечную  $\pi$ -группу, отделяющего элемент  $g$  от подгруппы  $A^k$ , заканчивается так же, как при рассмотрении элемента длины  $> 1$ .

Если элемент  $g$  не принадлежит подгруппе  $B$  и входит в подгруппу  $A$ , т. е.  $g = a^r$  для некоторого  $r \neq 0$ , то гомоморфизм группы  $H$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_n$  вычетов целых чисел по модулю  $n$ , определяемый отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ , где  $n$  —  $\pi$ -число, не делящее  $r$ , является искомым. Если элемент  $g$  лежит в подгруппе  $U$  (и по-прежнему не входит в  $B$ ), то  $g = c^r b^q = a^{mr} b^q$  для некоторых целых  $r$  и  $q$ , причем  $r \neq 0$ . В этом случае искомым является аналогичный гомоморфизм группы  $H$  в группу  $\mathbb{Z}_n$ , где  $\pi$ -число  $n$  не является делителем числа  $mr$ .

Предложение 2.2 доказано.

Для произвольного целого положительного числа  $n$  обозначим через  $R_n$  нормальное замыкание в группе  $H = H(m, m)$  элементов  $a^{kn}$  и  $b^n$ . Таким образом, фактор-группа  $\bar{H}_n = H/R_n$  определяется представлением

$$\langle a, b; b^{-1}a^m b = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1 \rangle.$$

Добавив к этому представлению еще один порождающий  $c$  вместе с соотношением  $c = a^m$ , мы видим, что группа  $\bar{H}_n$  является свободным произведением циклической группы  $\bar{A} = \langle a; a^{kn} = 1 \rangle$  порядка  $kn$  и прямого произведения

$$\bar{U} = \langle c, b; cb = bc, c^s = 1, b^n = 1 \rangle$$

двух циклических групп порядков  $s$  и  $n$  (где число  $s$  равно порядку элемента  $a^m$  группы  $\bar{A}$ ) с объединенной подгруппой  $\bar{A}^m$ . Поэтому имеет место

**Предложение 2.3.** *Порядки элементов  $a$  и  $b$  группы  $\bar{H}_n = H/R_n$  равны числам  $kn$  и  $n$  соответственно. В частности, порядки элементов  $a^k$  и  $b$  совпадают.*

Нам потребуется также

**Предложение 2.4.** *Если  $t$  является  $\pi$ -числом, то в группе  $H = H(m, m)$  пересечение всех подгрупп  $R_n$ , где  $n$  — произвольное положительное  $\pi$ -число, совпадает с единичной подгруппой.*

Действительно, в силу предложения 2.1 для любого неединичного элемента  $h \in H$  в группе  $H$  найдется нормальная подгруппа  $N$  конечного  $\pi$ -индекса, не содержащая этого элемента. Если порядки по модулю подгруппы  $N$  элементов  $a^k$  и  $b$  равны числам  $r$  и  $s$  соответственно, то  $\pi$ -число  $n = rs$  таково, что  $a^{kn} \in N$  и  $b^n \in N$ . Поэтому подгруппа  $R_n$  содержится в  $N$  и, следовательно, не содержит элемента  $h$ .

Докажем, наконец,

**Предложение 2.5.** *Если  $m$  является  $\pi$ -числом, то при любом положительном  $\pi$ -числе  $n$  группа  $\overline{H}_n = H(m, m)/R_n$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой.*

Покажем, в самом деле, что для любого неединичного элемента  $h$  группы

$$\overline{H}_n = \langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1 \rangle$$

существует гомоморфизм этой группы на конечную  $\pi$ -группу, образ при котором элемента  $h$  неединичен.

Если элемент  $h$  не входит в подгруппу группы  $\overline{H}_n$ , порожденную элементом  $a^m$ , то его образ в фактор-группе группы  $\overline{H}_n$  по этой (центральной) подгруппе отличен от единицы. Так как эта фактор-группа имеет представление  $\langle a, b; a^d = 1, b^n = 1 \rangle$  (где  $d = (kn, m)$ ), т. е. является свободным произведением двух конечных циклических  $\pi$ -групп и потому [8]  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируема, существование требуемого гомоморфизма очевидно.

В случае, когда элемент  $h$  принадлежит подгруппе, порожденной элементом  $a^m$ , искомым будет, например, гомоморфизм группы  $\overline{H}_n$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_{kn}$  вычетов целых чисел по модулю  $kn$ , определяемый отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ .

### 3. Доказательство теоремы

Необходимость сформулированных в теореме условий  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемости группы  $G(m, m; k)$  вытекает из следующего предложения.

**Предложение 3.1.** *Пусть для некоторого множества  $\pi$  простых чисел группа  $G(l, m; k)$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой. Тогда*

- (1)  $l = m\varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon = \pm 1$ ,
- (2)  $m$  является  $\pi$ -числом,
- (3)  $k$  является  $\pi$ -числом,
- (4) если  $\varepsilon = -1$ , то множество  $\pi$  содержит число 2.

Поскольку всякая подгруппа  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой группы  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируема, то в силу предложения 2.1 доказательства требует только утверждение пункта 3.

Если, напротив,  $k$  не является  $\pi$ -числом, то  $k = pk_1$  для некоторого простого числа  $p$ , не принадлежащего множеству  $\pi$ , и некоторого целого числа  $k_1$ . Так как  $k_1$  — положительное число, строго меньшее, чем  $k$ , в группе  $H = H(m, m\varepsilon)$  элемент  $a^{k_1}$  не принадлежит подгруппе  $A^k$ , а поскольку в этой группе пересечение подгрупп  $A$  и  $B$  тривиально, элемент  $a^m$  не принадлежит подгруппе  $B$ .

При  $\varepsilon = 1$  рассмотрим элемент  $g = (t^{-1}a^{k_1}t)^{-1}a^m(t^{-1}a^{k_1}t)a^{-m}$  группы  $G(m, m; k)$ . Этот элемент отличен от 1, так как его запись

$$t^{-1}a^{-k_1}ta^{-m}t^{-1}a^{k_1}ta^{-m}$$

является приведенной в  $HNN$ -расширении  $G(m, m; k)$  группы  $H(m, m)$ .

С другой стороны, пусть  $N$  — произвольная нормальная подгруппа конечного  $\pi$ -индекса группы  $G(m, m; k)$  и пусть порядок элемента  $a$  по модулю этой подгруппы равен  $r$ . Так как  $r$  является  $\pi$ -числом, чис-

ла  $r$  и  $p$  взаимно просты. Поэтому существует целое число  $x$ , удовлетворяющее сравнению  $px \equiv 1 \pmod{r}$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a^{k_1} &\equiv a^{k_1 px} = a^{kx} \pmod{N}, \\ t^{-1} a^{k_1} t &\equiv t^{-1} a^{kx} t = b^x \pmod{N}, \\ g &\equiv b^{-x} a^m b^x a^{-m} = 1 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, неединичный элемент группы  $G(m, m; k)$  принадлежит каждой нормальной подгруппе конечного  $\pi$ -индекса этой группы, что противоречит ее  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости.

Пусть  $\varepsilon = -1$ . Тогда множество  $\pi$  содержит число 2 и потому элемент  $a^{2k_1}$  не принадлежит подгруппе  $A^k$ . Действительно, если  $a^{2k_1} \in A^k$ , то  $k|2k_1$ , т. е.  $pk_1|2k_1$ , откуда  $p = 2$ , что невозможно. Поэтому в группе  $G(m, -m; k)$  элемент  $g = (t^{-1} a^{2k_1} t)^{-1} a^m (t^{-1} a^{2k_1} t) a^{-m}$  отличен от единицы и, если для нормальной подгруппы  $N$  конечного  $\pi$ -индекса этой группы числа  $r$  и  $x$  выбраны так же, как в первом случае, то, рассуждая аналогично, получаем сравнение

$$t^{-1} a^{2k_1} t \equiv t^{-1} a^{2kx} t = b^{2x} \pmod{N},$$

откуда, как и выше, получаем

$$g \equiv b^{-2x} a^m b^{2x} a^{-m} = 1 \pmod{N}.$$

Таким образом, мы снова пришли к противоречию, и утверждение 3 предложения 3.1 доказано.

Из предложения 2.3 легко следует, что для любого целого числа  $n$  нормальное замыкание  $R_n$  в группе  $H = H(m, m)$  элементов  $a^{kn}$  и  $b^n$  является  $(A^k, B, \varphi)$ -совместимой подгруппой.

Напомним, что выше через  $\varphi$  был обозначен изоморфизм подгруппы  $A^k$  группы  $H$  на ее подгруппу  $B$ , определяемый отображением  $a^k \mapsto b$ , и что  $(A^k, B, \varphi)$ -совместимость подгруппы  $R_n$  означает, по определению, выполнимость равенства  $(A^k \cap R_n)\varphi = B \cap R_n$ .

Это свойство подгруппы  $R_n$  позволяет, как обычно, наряду с группой

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t; t^{-1} A^k t = B, \varphi)$$

построить  $HNN$ -расширение

$$\overline{G}_n = (\overline{H}_n, t_n; t_n^{-1} \overline{A}^k t_n = \overline{B}, \overline{\varphi}_n)$$

с проходной буквой  $t_n$  группы  $\overline{H}_n = H/R_n$  и подгруппами  $\overline{A}^k = A^k R_n/R_n$  и  $\overline{B} = B R_n/R_n$ , связанными в соответствии с изоморфизмом  $\overline{\varphi}_n$ , определяемым отображением  $a^k R_n \mapsto b R_n$ .

Кроме того, существует гомоморфизм  $\rho_n$  группы  $G = G(m, m; k)$  на группу  $\overline{G}_n$ , продолжающий естественный гомоморфизм базовой подгруппы  $H$  группы  $G$  на базовую подгруппу  $\overline{H}_n$  группы  $\overline{G}_n$  и переводящий проходную букву  $t$  в проходную букву  $t_n$ . Известно, что ядро  $S_n$  гомоморфизма  $\rho_n$  совпадает с нормальным замыканием в группе  $G$  подгруппы  $R_n$ .

**Предложение 3.2.** *Если  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами, то в группе*

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t; t^{-1} A^k t = B, \varphi)$$

*пересечение всех подгрупп  $S_n$ , где  $n$  — произвольное положительное  $\pi$ -число, совпадает с единичной подгруппой.*

*Доказательство.* Требуется показать, что для любого неединичного элемента  $g \in G$  найдется  $\pi$ -число  $n$  такое, что элемент  $g$  не входит в подгруппу  $S_n$ .

Пусть  $g = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 t^{\varepsilon_2} h_2 \cdots h_{s-1} t^{\varepsilon_s} h_s$  — приведенная запись неединичного элемента  $g \in G$ .

Если  $s = 0$ , т. е. элемент  $g$  принадлежит подгруппе  $H$ , то в силу предложения 2.4 этот элемент не входит в подгруппу  $R_n$  для некоторого  $\pi$ -числа  $n$ . Так как действие гомоморфизма  $\rho_n$  на подгруппе  $H$  совпадает с естественным гомоморфизмом  $H$  на  $H/R_n$ , элемент  $g\rho_n$  отличен от единицы и потому не входит в подгруппу  $S_n$ .

Предположим теперь, что  $s > 0$ , и для каждого числа  $i = 0, 1, \dots, s-1$  введем в рассмотрение нормальную подгруппу  $N_i$  конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$  следующим образом.

В качестве  $N_0$  возьмем произвольную нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ .

Пусть  $1 \leq i < s$ . Тогда

если  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ , полагаем  $N_i = N_0$ ;

если  $\varepsilon_i = -1$  и  $\varepsilon_{i+1} = 1$ , то элемент  $h_i$  группы  $H$  не принадлежит подгруппе  $A^k$  и через  $N_i$  обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , удовлетворяющую условию  $h_i \notin A^k N_i$ ;

если  $\varepsilon_i = 1$  и  $\varepsilon_{i+1} = -1$ , то элемент  $h_i$  группы  $H$  не принадлежит подгруппе  $B$  и через  $N_i$  обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , удовлетворяющую условию  $h_i \notin B N_i$ .

(Возможность выбора подгруппы во втором и третьем случаях обеспечена предложением 2.2.)

Пересечение  $\bigcap_{i=0}^{s-1} N_i$  является нормальной подгруппой конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , и, повторяя соответствующее рассуждение в доказательстве предложения 2.4, можно показать, что в подгруппе  $N$  содержится подгруппа  $R_n$  для некоторого  $\pi$ -числа  $n$ . Очевидно, что запись

$$(h_0 R_n) t_n^{\varepsilon_1} (h_1 R_n) t_n^{\varepsilon_2} (h_2 R_n) \cdots (h_{s-1} R_n) t_n^{\varepsilon_s} (h_s R_n)$$

элемента  $g\rho_n$  является приведенной в  $HNN$ -расширении  $G_n$ , а это означает, что  $g\rho_n \neq 1$ , и потому  $g \notin S_n$ . Предложение доказано.

**Предложение 3.3.** Если  $t$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами, то для любого положительного  $\pi$ -числа  $n$  группа  $\overline{G}_n$  (определяемая параметрами  $t$  и  $k$ ) является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой.

*Доказательство.* Фиксируем произвольное  $\pi$ -число  $l$  и введем в рассмотрение группу

$$X(n, l) = \langle x_1, x_2, \dots, x_l; [x_i, x_j] = 1, x_i^{kn} = 1 \ (i, j = 1, 2, \dots, l) \rangle,$$

являющуюся, очевидно, абелевой конечной  $\pi$ -группой. Очевидно также, что циклическая перестановка порождающих определяет автоморфизм этой группы, порядок которого равен числу  $l$ . Поэтому группа

$$Y(n, l) = \langle x_1, x_2, \dots, x_l, y; [x_i, x_j] = 1, x_i^{kn} = 1 \ (i, j = 1, 2, \dots, l), \\ y^{-1} x_i y = x_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots, l-1), y^{-1} x_l y = x_1, y^l = 1 \rangle$$

является расщепляемым расширением группы  $X(n, l)$  при помощи конечной циклической группы порядка  $l$  и потому является конечной  $\pi$ -группой.

В соответствии с определением конструкции  $HNN$ -расширения группа

$$\bar{G}_n = (\bar{H}_n, t_n; t_n^{-1} \bar{A}^k t_n = \bar{B}, \bar{\varphi})$$

имеет представление

$$\langle a, b, t_n; b^{-1} a^m b = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1, t_n^{-1} a^k t_n = b \rangle.$$

Определим отображение его порождающих символов в группу  $Y(n, l)$  следующим образом:  $a \mapsto x_1, b \mapsto x_2^k, t_n \mapsto y$ .

Очевидно, что первые три определяющих соотношения группы  $\bar{G}_n$  переходят при этом в равенства, выполненные в группе  $Y(n, l)$ . Так как слово  $t_n^{-1} a^k t_n$  переходит в элемент  $y^{-1} x_1^k y = x_2^k$ , совпадающий с образом символа  $b$ , это справедливо и для четвертого соотношения.

Таким образом, указанное отображение продолжаемо до гомоморфизма  $\psi$  группы  $\bar{G}_n$  в группу  $Y(n, l)$ . Так как порядки элементов  $a^k$  и  $b$  группы  $\bar{H}_n$  совпадают с порядками их образов, ядро  $N$  гомоморфизма  $\psi$  тривиально пересекается с каждой из связанных подгрупп. Поэтому в силу теоремы о подгруппах  $HNN$ -расширения [9] группа  $N$  является обычным свободным произведением некоторой свободной группы и некоторого семейства групп, каждая из которых сопряжена с подгруппой базовой группы  $\bar{H}_n$  и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема в силу предложения 2.5. Следовательно, группа  $\bar{G}_n$  является расширением  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группы при помощи конечной  $\pi$ -группы и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема. Предложение 3.3 доказано.

$\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы  $G(m, m; k)$  является очевидным следствием предложений 3.2 и 3.3.

#### Библиографический список

1. Борцев А. В., Молдаванский Д. И. Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 34–44.
2. Варламова И. А., Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслэга — Солитэра // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 107–114.
3. Кавуцки М. А., Молдаванский Д. И. Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы : межвузовский сборник научных трудов. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1988. С. 35–48.
4. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами  $HNN$ -расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140.
5. Baumslag G. A noncyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic // J. Austral. Math. Soc. 1969. Vol. 10, № 3–4. P. 497–498.
6. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.
7. Brunner A. M. On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. Vol. 50. P. 414–420.
8. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.
9. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 28. P. 627–643.
10. Kim G., Tang C. Y. A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222. P. 574–594.