Известия ВУЗов. Математика
1987. № 12. С. 58 – 59

Д. И. Молдаванский, Л. В. Тимофеева

КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ И ОБЛАДАЮЩЕЙ НЕТРИВИАЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ, ФИНИТНО ОТДЕЛИМЫ

Подгруппа H группы G называется финитно отделимой (см. [1]), если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего H, найдется гомоморфизм φ группы G в конечную группу, при котором $g\varphi \notin H\varphi$.

Цель данной заметки — доказательство теоремы, сформулированной в названии. Но прежде заметим, что опустить в ее формулировке требование конечной порожденности подгрупп нельзя: каждая группа с одним соотношением и нетривиальным центром содержит неотделимую подгруппу, если, разумеется, она содержит хотя бы одну подгруппу, не являющуюся конечнопорожденной (т. е. не совпадает с циклической или группой, определяемой соотношением вида $a^{-1}ba = b^{\pm 1}$). Действительно, всякая такая группа содержит свободную подгруппу ранга 2 (см. предложение 2 ниже), которая, в свою очередь, в соответствии с [1] содержит неотделимую подгруппу.

Финитная аппроксимируемость всех групп рассматриваемого класса хорошо известна и вытекает непосредственно из теоремы 1 работы [1] и предложения 2. На этом же предложении основано доказательство финитной аппроксимируемости относительно сопряженности этих групп, приведенное в [2].

Предложение 1. *Пусть K — гомоморфно замкнутый класс групп и пусть G — группа, обладающая бесконечным центром, отличным от квазициклической группы. Предположим далее, что для любой неединичной центральной подгруппы A группы G все K-подгруппы фактор-группы G/A финитно отделимы. Тогда финитно отделимы будут и все K-подгруппы группы G.*

В самом деле, пусть H — произвольная K-подгруппа группы G и элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе H. Пусть $Z = Z(G)$ — центр группы G. Нам, очевидно, достаточно указать неединичную подгруппу $A \subseteq Z$ такую, что $g \notin HA$. Если $H \cap Z \neq 1$ или $g \notin HZ$, то существование такой подгруппы A очевидно. Если же $H \cap Z = 1$ и $g \in HZ$, то элемент g однозначно представим в виде $g = hz$, где $h \in H$, $z \in Z$, причем $z \neq 1$. Поскольку группа Z не является квазициклической, в ней найдется подгруппа $A \neq 1$, не содержащая элемента z (см. [3], теорема 3.1). Очевидно, что $g \notin HA$.

Следствие 1. *Пусть группа G является расширением свободной группы при помощи бесконечной циклической, и $Z(G) \neq 1$. Тогда конечно-порожденные подгруппы группы G финитно отделимы.*

Действительно, в этом случае группа $Z(G)$ оказывается бесконечной циклической, а фактор-группа группы G по неединичной центральной подгруппе — почти свободной группой. Остается напомнить, что класс групп с финитно отделимыми конечно-порожденными подгруппами замкнут относительно взятия конечных расширений и, как вытекает из теоремы Холла – Бернса (предложение 3.10 из [4]), содержит все свободные группы.

Доказательство теоремы теперь завершает следующее утверждение, доказанное в [5].

Предложение 2. *Каждая нециклическая группа с одним определяющим соотношением, обладающая нетривиальным центром, является расширением свободной группы конечного ранга при помощи бесконечной циклической.*

Как замечено в [1], из доказанной теоремы получается

Следствие 2 (см. также [6]). *В группе с одним определяющим соотношением, обладающей нетривиальным центром, проблема вхождения в конечно-порожденные подгруппы разрешима.*

Заметим в заключение, что следствие 1 позволяет утверждать также финитную отделимость конечно-порожденных подгрупп каждой группы, определяемой в образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ соотношениями $a_i^{p_i} = a_{i+1}^{q_i}$, где p_i, q_i — ненулевые целые числа, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Список цитированной литературы

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иванов. пед. ин-та. 1958. V. 18, № 5. P. 49–60.
2. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamated free products and *HNN*-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. V. 29, P. 35–51.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
4. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
5. *Baumslag G., Taylor T.* The center of groups with one defining relator // Math. Ann. 1968. V. 175, P. 315 – 319.
6. *Безверхний В.Н.* Решение проблемы вхождения в группах с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром // Деп. в ВИНИТИ, N 3207-84, 1984.