

**Д. И. Молдаванский**  
**ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ГРУПП**  
**БАУМСЛАГА-СОЛИТЕРА**

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две группы, каждая из которых определяется одним соотношением вида  $a^{-1}b^m a = b^n$ , были изоморфны.

Одержані необхідні і достатні умови для того, щоб дві групи, кожна з яких визначається одним співвідношенням вигляду  $a^{-1}b^m a = b^n$ , були ізоморфні.

УДК 512.544.

Группами Баумслага-Солитера в последнее время называют группы вида  $G(m, n) = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n \rangle$ , где  $m$  и  $n$  — ненулевые целые числа. Первые примеры нехопфовых групп с одним определяющим соотношением были обнаружены в 1962 г. Баумслагом и Солитером [1] именно среди групп этого семейства. Впоследствии различные свойства этих групп привлекали внимание ряда авторов (достаточно полный список публикаций приведен в [2]), однако вопрос об их изоморфизме до сих пор не рассматривался. Целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

**Теорема.** *Группы  $G(m, n)$  и  $G(p, q)$  изоморфны тогда и только тогда, когда для подходящего  $\varepsilon = \pm 1$  либо  $m = p\varepsilon$  и  $n = q\varepsilon$ , либо  $m = q\varepsilon$  и  $n = p\varepsilon$ .*

Достаточность условий теоремы очевидна. Для доказательства необходимости нам понадобится ряд свойств групп  $G(m, n)$ .

Непосредственно из определения видно, что каждая такая группа является HNN-расширением с проходной буквой  $a$  бесконечной циклической группы, порождаемой элементом  $b$ . Все понятия, связанные с этой конструкцией, а также свойства ее, используемые здесь, можно найти в [3]. В частности, из леммы Коллинза легко получаем известное утверждение.

**Предложение 1.** *Если степени  $g^r$  и  $g^s$  элемента  $g$  группы  $G(m, n)$  сопряжены в этой группе, причем  $|r| \neq |s|$ , то элемент  $g$  сопряжен с элементом  $b^k$  для подходящего целого числа  $k$ .*

**Предложение 2.** *Пусть  $m = m_1 d$ ,  $n = n_1 d$ , где  $d = (m, n)$  — наибольший общий делитель чисел  $m$  и  $n$ . Для произвольных различных целых чисел  $p$  и  $q$  элементы  $b^p$  и  $b^q$  сопряжены в группе  $G(m, n)$  в точности тогда, когда существуют целые числа  $i$  и  $l$ , где  $i > 0$ , такие, что либо  $p = m_1^i d l$  и  $q = n_1^i d l$ , либо  $p = n_1^i d l$  и  $q = m_1^i d l$ .*

Предложение 2, по-видимому, тоже известно и может быть легко получено из предложения 7 статьи [2] или непосредственной индукцией по длине приведенной записи трансформирующего элемента.

**Предложение 3 (лемма 2.1 из [4]).** Пусть  $|m| \neq |n|$ . Для любого целого числа  $k \neq 0$  централизатор элемента  $a^k$  в группе  $G(m, n)$  порождается элементом  $a$ .

**Предложение 4.** Для произвольного целого числа  $k$  нормальное замыкание в группе  $G(m, n)$  элемента  $b^k$  совпадает с нормальным замыканием элемента  $b$  тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа  $k$  является делителем в точности одного из чисел  $m$  и  $n$ .

*Доказательство.* Предположим сначала, что существует простой делитель  $p$  числа  $k$  такой, что  $(m, p) = (n, p)$ . Тогда фактор-группа

$$G(m, n)/(b^p)^{G(m, n)} = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n, b^p = 1 \rangle$$

является HNN-расширением циклической группы порядка  $p$  и потому не может быть бесконечной циклической. Следовательно,  $(b^p)^{G(m, n)} \neq (b)^{G(m, n)}$  и, тем более,  $(b^k)^{G(m, n)} \neq (b)^{G(m, n)}$ .

Обратно, пусть  $k = pk'$ ,  $m = pm'$  и  $(n, p) = 1$ . Выбирая целые числа  $x$  и  $y$  так, чтобы  $px + py = 1$ , получаем

$$b^{k'} = b^{nk'x} b^{k'py} = (a^{-1}b^k a)^{m'x} (b^k)^y.$$

Следовательно, элемент  $b^{k'}$  лежит в нормальном замыкании элемента  $b^k$ , и доказательство завершается очевидной индукцией.

**Предложение 5.** Пусть  $|m| > |n|$ ,  $|p| > |q|$  и пусть существует эпиморфизм группы  $G(p, q)$  на группу  $G(m, n)$ . Тогда для подходящих целых чисел  $i$  и  $l$ , где  $i > 0$ , выполнены равенства  $p = m_1^i dl$  и  $q = n_1^i dl$  (где снова  $d = (m, n)$ ,  $m = m_1 d$ ,  $n = n_1 d$ ).

*Доказательство.* Обозначим через  $u$  и  $v$  образы при этом эпиморфизме соответственно элементов  $a$  и  $b$  группы  $G(p, q)$ . Тогда в группе  $G(m, n)$  должно выполняться равенство  $u^{-1}v^p u = v^q$ , и ввиду предложения 1 можно считать, что  $v = b^k$  для подходящего целого  $k$ . Из предложения 2 теперь следует, что  $pk = m_1^i dl$  и  $qk = n_1^i dl$  для некоторых  $i > 0$  и  $l$ . Так как числа  $m_1^i$  и  $n_1^i$  взаимно просты,  $(pk, qk) = dl$ , и потому число  $k$  является делителем числа  $dl$ .

Далее, в каждой из групп  $G(m, n)$  и  $G(p, q)$  нормальное замыкание элемента  $b$  является единственной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой бесконечная циклическая. Поэтому  $(b^k)^{G(m, n)} = (b)^{G(m, n)}$ , и из предложения 4 получаем  $(k, d) = 1$ . Значит, число  $k$  является делителем числа  $l$ .

**Предложение 6.** А. Группа  $G(m, n)$  обладает неединичной циклической нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда  $|m| = |n|$ .

Б. Если  $|m| = |n| > 1$ , то каждая циклическая нормальная подгруппа группы  $G(m, n)$  содержится в подгруппе, порожденной элементом  $b^n$ .

*В. Группа  $G(m, n)$  обладает неединичным центром тогда и только тогда, когда  $m = n$  или  $|m| = |n| = 1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $|m| \neq |n|$ ; без потери общности можем считать, что  $|m| > n > 0$ . Если инвариантная циклическая подгруппа группы  $G(m, n)$  порождается элементом  $g \neq 1$ , то этот элемент должен принадлежать централизатору элемента  $a^2$ , и ввиду предложения 3  $g = a^k$  для подходящего целого  $k \neq 0$ . Равенство  $b^{-1}a^kb = a^{k\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , показывает, что запись  $b^{-1}a^kba^{-k\varepsilon}$  не может быть приведенной. Так как  $|m| > n > 0$ , отсюда получаем  $n = 1$ ,  $k > 0$  и  $\varepsilon = 1$ . Теперь из определяющего соотношения  $a^{-1}b^ma = b$  следует, что  $a^kba^{-k} = b^{m^k}$ , и так как  $ba^k = a^kb$ , имеем  $b^{m^k-1} = 1$  и потому  $|m| = 1$ . Пришли к противоречию.

Если  $|m| = |n|$ , циклическая подгруппа  $H$ , порожденная элементом  $b^m$ , является нормальной подгруппой группы  $G(m, n)$ . Фактор-группа  $G(m, n)/H$  разлагается в свободное произведение двух циклических групп: бесконечной и конечной порядка  $|m|$ . Поэтому при  $|m| > 1$  в этой фактор-группе нет неединичных нормальных циклических подгрупп, что и доказывает утверждение Б.

Если  $m = n$ , элемент  $b^m$  централен. Группа  $G(1, 1)$  абелева, а центр группы  $G(-1, 1)$  порождается элементом  $a^2$ . При  $n > 1$  группа  $G(-n, n)$  является свободным произведением группы  $G(-1, 1)$  и бесконечной циклической группы с объединенной подгруппой, которая порождается в группе  $G(-1, 1)$  элементом  $b$  и не совпадает ни с одним из сомножителей. Поскольку объединяемая подгруппа не пересекается с центром группы  $G(-1, 1)$ , центр группы  $G(-n, n)$  при  $n > 1$  тривиален [5, с. 221].

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть группы  $G(m, n)$  и  $G(p, q)$  изоморфны и  $|m| \geq n > 0$  и  $|p| \geq q > 0$ . Покажем, что тогда  $m = p$  и  $n = q$ .

Если  $|m| = n$ , то из предложения 6, п. А, следует, что и  $|p| = q$ . Так как в каждой из групп  $G(1, 1)$  и  $G(-1, 1)$  есть две неединичные нормальные циклические подгруппы, пересечение которых тривиально (в группе  $G(1, 1)$  они порождаются элементами  $a$  и  $b$ , а в группе  $G(-1, 1)$  — элементами  $a^2$  и  $b$ ), из предложения 6, п. Б, следует, что  $n = 1$  в точности тогда, когда  $q = 1$ . Кроме того, группа  $G(1, 1)$  абелева, а группа  $G(-1, 1)$  нет. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $n > 1$  и  $q > 1$ . Циклические подгруппы, порождаемые в группах  $G(m, n)$  и  $G(p, q)$  элементами  $b^n$  и  $b^q$  соответственно, являются в них ввиду предложения 6, п. Б, максимальными циклическими нормальными подгруппами. При этом, в фактор-группах по этим подгруппам максимальный порядок элементов конечного порядка равен числам  $n$  и  $q$  соответственно. Поэтому  $n = q$ . Наконец, в силу предложения 6, п. В, центр группы  $G(n, n)$  нетривиален, а группа  $G(-n, n)$  без центра.

Предположим теперь, что  $|m| > n$  и  $|p| > q$ . Введем обозначения

$$d = (m, n), e = (p, q), m = m_1d, n = n_1d, p = p_1e, q = q_1e.$$

Из предложения 5 следует, что для подходящих положительных чисел  $i, j, k$  и  $l$  выполняются равенства

$$m = p_1^i e l, n = q_1^i e l, p = m_1^j d k, q = r_1^j d k.$$

Ввиду того, что  $(p_1^i, q_1^i) = (m_1^j, n_1^j) = 1$ , отсюда получаем  $el = d$ ,  $m_1 = p_1^i$ ,  $dk = e$  и  $p_1 = m_1^j$ . Так как  $|m_1| > 1$ , то  $i = j = 1$ . Кроме того, имеем  $kl = 1$ , откуда  $k = l = 1$ . Поэтому  $m = p$  и  $n = q$ . Теорема доказана.

*Замечание.* До сих пор неизвестен ответ на вопрос, сформулированный автором в [6] (вопрос 3.33): будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Для групп Баумслэга-Солитэра он решается положительно. В самом деле, пусть группы  $G(m, n)$  и  $G(p, q)$  гомоморфно отображаются друг на друга. Если, например,  $|m| = |n|$ , то группа  $G(m, n)$  хопфова [1], и в этом случае группы изоморфны. Если же  $|m| > |n|$  и  $|p| > |q|$ , то к тому же выводу приводят рассуждения, основанные на предложении 5 и дословно повторяющие предыдущий абзац.

### Список цитированной литературы

1. Baumslag G., Solitar D. Some two generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.
2. Молдавский Д. И. О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением. М., 1986. 27 с. Деп. в ВИНТИ № 6671-В.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 447 с.
4. Brunner A. M. On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. V. 32, № 2. P. 414–420.
5. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) / В. Я. Блощицын, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин. Новосибирск, 1986. 132 с.

Получено 06.02.91