Молдаванский Д.И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп. Укр. матем. журн. 1992. Т. 44, № 6. С. 842-845.

1. Пусть G — некоторая группа, H и K — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$ — HNN-расширение группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами H и K. Это означает, что группа G^* в системе порождающих, состоящей из порождающих группы G и элемента t, определяется всеми соотношениями группы G и соотношениями вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$.

Следуя Баумслагу [1], подгруппу N группы G назовем (H, K, φ)-совместимой, если $(H \cap N)\varphi = K \cap N$. Легко видеть, что если U — нормальная подгруппа группы G^*, то подгруппа $N = G \cap U$ группы G является (H, K, φ)-совместимой. Отсюда, очевидно, следует известный факт (см., например, [2]): если группа G^* является финитно аппроксимируемой (ф. а.), то пересечение всех (H, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса (к. и.) группы G совпадает с единичной подгруппой. Известно также, что это условие не является достаточным для ф. а. группы G^*; соответствующие примеры мы находим уже среди групп Баумслага — Солитера $G(l, m) = \langle a, b; a^{-1}b^l a = b^m \rangle$ $(lm \neq 0)$.

Группа $G(l, m)$ является HNN-расширением бесконечной циклической группы $\langle b \rangle$ со связанными подгруппами $\langle b^l \rangle$ и $\langle b^m \rangle$, причем изоморфизм φ переводит элемент b^l в элемент b^m. Для произвольного целого числа $k > 0$ подгруппа $\langle b^k \rangle$ группы $\langle b \rangle$ является $(\langle b^l \rangle, \langle b^m \rangle, \varphi)$-совместимой тогда и только тогда, когда $(l, k) = (m, k)$, и потому пересечение всех таких подгрупп равно единице. С другой стороны, группа $G(l, m)$ ф. а. в точности тогда, когда либо $|l| = 1$, либо $|m| = 1$, либо $|l| = |m|$ [3,4].

HNN-расширение G^* группы G назовем нисходящим, если одна из связанных подгрупп совпадает с группой G. В этом частном случае указанное необходимое условие ф. а. группы G^* является и достаточным.

Теорема 1. *Пусть G — некоторая группа, K — подгруппа группы G, изоморфная этой группе и $\varphi : G \to K$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K, \varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G. Группа G^* является ф. а. тогда и только тогда, когда пересечение всех (G, K, φ)-совместимых нормальных подгрупп к. и. группы G совпадает с единичной подгруппой.*

При $H = G$ условие (H, K, φ)-совместимости подгруппы N группы G принимает вид $N\varphi = K \cap N$. Поэтому в случае, когда и подгруппа K совпадает с группой G, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть G^* — расщепляющееся расширение группы G с помощью бесконечной циклической группы $\langle t \rangle$ и φ — автоморфизм группы G, индуцированный сопряжением с помощью элемента t. Группа G^* является ф. а. тогда и только тогда, когда пересечение всех $\langle \varphi \rangle$-инвариантных нормальных подгрупп к. и. группы G совпадает с единичной подгруппой.*

Поскольку в конечнопорожденной группе G каждая подгруппа к. и. содержит характеристическую подгруппу, имеющую к. и. в G, отсюда, в свою очередь, получается следующий частный случай теоремы А.И. Мальцева [5] (теорема 1).

Следствие 2. *Расширение конечнопорожденной ф. а. группы с помощью бесконечной циклической группы является ф. а. группой.*

Более содержательные применения теоремы 1 основаны на следующем результате.

Теорема 2. *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K, \varphi)$ — нисходящее HNN-расширение конечнопорожденной группы G, причем подгруппа K имеет к. и. по модулю коммутанта G' группы G. Предположим также, что для каждого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел группа G аппроксимируется конечными p-группами. тогда G^* является ф. а. группой.*

Так как свободные группы аппроксимируются конечными p-группами при любом простом p, отсюда получаем такое следствие.

Следствие 3. *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K, \varphi)$ — нисходящее HNN-расширение свободной группы G конечного ранга. Если подгруппа KG' имеет к. и. в группе G, то группа G^* ф. а.*

Вопрос о том, будет ли произвольное нисходящее HNN-расширение свободной группы ф. а. группой, остается открытым.

Если G — свободная нильпотентная группа конечного ранга и K — подгруппа группы G, изоморфная ей, то из теоремы А. Мостового [6] (теорема 42.51) следует, что индекс подгруппы K по модулю G' конечен. Поскольку, к тому же, свободные нильпотентные группы аппроксимируются конечными p-группами при любом простом p, то справедливо такое следствие.

Следствие 4. *Произвольное нисходящее HNN-расширение конечнопорожденной свободной нильпотентной группы является ф. а. группой.*

Используя теорему 1, с помощью простых вычислений можно показать также, что произвольное нисходящее HNN-расширение группы $G(1, m) = \langle a, b; a^{-1}ba = b^m \rangle$ является ф. а. группой. В связи с теоремой 2 интересно отметить, что группа $G(1, m)$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда p является делителем числа $m - 1$.

Некоторые из приведенных здесь результатов были анонсированы в [7].

2. Перейдем к доказательству сформулированных теорем. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$ — HNN-расширение группы G. Если N — (H, K, φ)-совместимая нормальная подгруппа группы G, то отображение φ_N, определяемое по правилу $(aN)\varphi_N = (a\varphi)N$, $a \in H$, является изоморфизмом подгруппы HN/N фактор-группы G/N на подгруппу KN/N. Пусть $G^*_N = (G/N, t; t^{-1}(HN/N)t = KN/N, \varphi_N)$ — HNN-расширение группы G/N. Очевидно, что отображение, совпадающее на группе G с естественным гомоморфизмом группы G на фактор-группу G/N и тождественное на t, определяет гомоморфизм ρ_N группы G^* на группу G^*_N.

Если подгруппа N имеет к. и. в группе G, то группа G^*_N является ф. а. [8]. Поэтому для доказательства ф. а. группы G^* достаточно для произвольного элемента $g \in G$, $g \neq 1$, найти (H, K, φ)-совместимую нормальную подгруппу N к. и. группы G такую, что $g\rho_N \neq 1$.

Предположим теперь, что $H = G$, т.е. G^* — нисходящее HNN-расширение группы G. Легко видеть, что произвольный элемент $g \in G^*$ можно представить в виде $g = t^m a t^{-n}$ для подходящего элемента $a \in G$ и неотрицательных целых чисел m и n (в действительности можно еще потребовать, чтобы при $mn \neq 0$ элемент a не входил в подгруппу K, и тогда указанная запись элемента g будет и единственной; тем не менее, здесь это нам не понадобится). Отсюда следует, что произвольный элемент группы G^* сопряжен с элементом вида $t^k a$, $a \in G$, и можно ограничиться рассмотрением лишь таких элементов.

Пусть элемент $g = t^k a$ группы G^* отличен от 1. Если $k \neq 0$, то для любой (G, K, φ)-совместимой нормальной подгруппы N группы G элемент $g\rho_N = t^k(aN)$ группы G^*_N, очевидно, отличен от 1. Если же $k = 0$, то $a \neq 1$ и по условию существует $(G, K\varphi)$-совместимая нормальная подгруппа N к. и. группы G такая, что $a \notin N$. Тогда $g\rho_N = aN$ — отличный от единицы элемент группы G^*_N. Теорема 1, таким образом, доказана.

Для доказательства теоремы 2 заметим сначала, что нормальная подгруппа N к. и. группы G является (G, K, φ)-совместимой, т.е. удовлетворяет равенству $N\varphi = K \cap N$, тогда и только тогда, когда $N\varphi \subseteq N$ и $KN = G$.

В самом деле, если $N\varphi = K \cap N$, то включение $N\varphi \subseteq N$ очевидно, а равенство $KN = G$ вытекает из того, что отображение φ_N, определенное выше, является изоморфизмом конечной группы G/N на ее подгруппу KN/N.

Наоборот, если подгруппа N φ-допустима и $KN = G$, то эндоморфизм $\bar{\varphi}$ фактор-группы G/N, индуцированный эндоморфизмом φ, является сюръективным, а потому — и инъективным. Поэтому, если $x \in K \cap N$ и элемент $y \neq G$ такой, что $x = y\varphi$, то $(yN)\varphi = (y\varphi)N = xN = N$ и потому $y \in N$. Отсюда $K \cap N \subseteq N\varphi$. Противоположное включение очевидно.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условиям теоремы 2. Ввиду теоремы 1 и предыдущего замечания достаточно для произвольного элемента $g \in G$, отличного от 1, указать вполне характеристическую подгруппу N к. и. группы G, не содержащую элемента g и удовлетворяющую равенству $KN = G$.

Пусть $m = [G : KG']$. По условию существует простое число p, не делящее числа m, такое, что группа G аппроксимируется конечными p-группами. Поэтому для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует нормальная подгруппа N к. и. группы G, не содержащая элемента g, фактор-группа по которой является p-группой. Заменив, если нужно, подгруппу N вербальной подгруппой группы G, определяемой всеми тождествами фактор-группы G/N, можем считать подгруппу N вполне характеристической (см. [6] теорема 15.71). Остается показать, что $KN = G$.

Поскольку фактор-группа G/N нильпотентна, в подгруппе N содержится некоторый член $\gamma_c(G)$ нижнего центрального ряда группы G. По лемме 4.4 из [9] подгруппа $K\gamma_c(G)$ имеет к. и. в группе G, причем этот индекс является m-числом (т.е.

все его простые делители являются делителями числа m). Так как $K\gamma_c(G) \subseteq KN$, m-числом является и $[G : KN]$. С другой стороны, из включения $N \subseteq KN$ следует, что $[G : KN]$ должно быть степенью числа p. В силу выбора этого числа получаем $[G : KN] = 1$, т.е. $G = KN$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, P. 193 – 209.
2. *Shirvani M.*. On residually finite HNN-extentions // Arch. Math. 1985. V. 44, P. 110 – 115.
3. *Baumslag G., Solitar D.* Some two generator one relator nonHopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, P. 199 – 201.
4. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164, P. 105 – 114.
5. *Мальцев А.И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иванов. пед. ин-та. 1958. V. 18, P. 49 – 60.
6. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир. 1969.
7. *Молдованский Д.И.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп // XI Всесоюзн. симп. по теории групп: Тезисы докладов. Свердловск, 1989.
8. *Baumslag G., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extentions // Commun. Algebra. 1978. V. 6, P. 179 – 194.
9. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика, Сб. пер. 1968. V. 12, P. 3 – 36.