Ивановский государственный университет. 20 лет
Юбилейный сборник научных статей. Часть II. Иваново, 1993. С. 18–23.

Д. И. Молдаванский

О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП

В работе доказано, что произвольная конечно порожденная подгруппа свободной группы является сопряженно финитно отделимой. Рассматривается также вопрос о сопряженной финитной отделимости подгрупп в сверхразрешимых группах.

УДК 512.543.

1. Напомним (см. [3]), что подгруппа H группы G называется финитно отделимой (ф. о.), если для любого элемента $a \in G$, не принадлежащего подгруппе H, найдется такой гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу, что элемент $a\varphi$ не входит в подгруппу $H\varphi$ (или, что то же самое, a не входит в подгруппу HN для некоторой нормальной подгруппы N группы G, имеющей в G конечный индекс (к. и.)).

К другому виду отделимости подгрупп мы приходим, заменяя отношение принадлежности подгруппе отношением быть сопряженным с некоторым элементом подгруппы. Более точно, назовем подгруппу H группы G сопряженно финитно отделимой (с. ф. о.), если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из H, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, что элемент $a\varphi$ не сопряжен в группе $G\varphi$ ни с одним элементом из подгруппы $H\varphi$. Другими словами, если $a^G \cap H = \emptyset$, то $a^G \cap HN = \emptyset$ для некоторой нормальной подгруппы N к. и. группы G (здесь, как обычно, a^G обозначает совокупность всех элементов $a^x = x^{-1}ax$, сопряженных с a в группе G).

Как заметил А. И. Мальцев [3], уже произвольная свободная группа F ранга > 1 содержит подгруппу, не являющуюся ф. о. Такой будет, например, нормальная подгруппа H группы F, фактор-группа F/H по которой является бесконечной простой группой. Поскольку произвольная нормальная подгруппа с. ф. о. в точности тогда, когда она ф. о., тот же пример показывает, что в группе F есть подгруппы, не являющиеся с. ф. о.

Тем не менее, конечно порожденные подгруппы свободной группы являются ф. о. Это легко получить из следующей теоремы Холла – Бернса (см.,напр., [2], предложение 3.10):

Пусть F — свободная группа, H — конечно порожденная подгруппа группы F и a — элемент группы F, не лежащий в H. Существует подгруппа U к. и. группы F такая, что H является свободным множителем группы U и элемент a не входит в U.

Эта же теорема позволяет доказать аналогичное утверждение и для свойства с. ф. о.:

Теорема 1. *Произвольная конечно порожденная подгруппа H свободной группы F является с. ф. о.*

В случае, когда подгруппа H является циклической, это утверждение получено в работе Дайер [4]. В той же работе доказано, что произвольная циклическая подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы является с. ф. о. Некоторое усовершенствование рассуждений из [4] позволяет распространить этот результат на класс сверхразрешимых групп, т. е. групп, обладающих нормальным рядом с циклическими факторами:

Теорема 2. *Произвольная циклическая подгруппа сверхразрешимой группы является с. ф. о.*

Естественно возникает вопрос о с. ф. о. произвольной подгруппы сверхразрешимой группы. Отрицательный ответ на него получается из следующих соображений.

Финитная аппроксимируемость конечно определенной группы G (с разрешимой проблемой равенства слов) относительно некоторого свойства означает, в частности, алгоритмическую распознаваемость этого свойства в группе G (см. [3]). Следовательно, если подгруппа H группы G с. ф. о., существует алгоритм, распознающий сопряженность произвольного элемента группы с некоторым элементом из подгруппы H. В работе [5] построен пример конечно порожденной нильпотентной группы, для некоторой подгруппы которой указанная алгоритмическая проблема неразрешима.

Каждая подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы является ф. о. Следовательно, приведенный результат из [5] дает одновременно и пример ф. о. подгруппы, не являющейся с. ф. о. Пример противоположного характера доставляется группой $G = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^2 \rangle$. Хорошо известно (и легко проверяется), что циклическая подгруппа B, порождаемая элементом b, не является ф. о. в G. С другой стороны, нормальное замыкание подгруппы B в группе G покрывается подгруппами, сопряженными с B, и является ф. о. подгруппой. Следовательно, подгруппа B с. ф. о. в G. Таким образом, рассматриваемые свойства отделимости независимы.

2. Доказательство теоремы 1 начнем со следующего вспомогательного утверждения:

Лемма 1. *Пусть $G = A * B$ — свободное произведение групп A и B. Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то каждая из них с. ф. о. в группе G.*

(Разумеется, справедливо и обратное. Если, скажем, элемент $b \in B$ отличен от единицы и лежит в каждой подгруппе к. и. группы B, то $b^G \cap A = \emptyset$, но образ элемента b при любом гомоморфизме группы G на конечную группу равен 1 и потому лежит в образе подгруппы A.)

Напомним, что произвольный элемент w группы G обладает единственной несократимой записью, т. е. записью вида

$$w = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

где каждый сомножитель x_i лежит в одной из подгрупп A или B и если $n > 1$, любые соседние сомножители x_i и x_{i+1} лежат в разных подгруппах; в частности, при $n > 1$ все сомножители отличны от 1. Число n сомножителей (или слогов) несократимой записи w называется длиной этого элемента и обозначается $l(w)$. Элемент w называется циклически несократимым, если либо $l(w) = 1$, либо $l(w) > 1$ и первый и последний слоги его лежат в разных подгруппах A и B. Каждый элемент группы G сопряжен с циклически несократимым элементом. Циклически несократимый элемент w имеет наименьшую длину среди элементов множества w^G.

Пусть w — такой элемент группы G, что $w^G \cap A = \emptyset$. Существование нормальной подгруппы N к. и. группы G, удовлетворяющей условию $w^G \cap AN = \emptyset$, будем доказывать индукцией по $l(w)$.

Если $l(w) = 1$, то $w \in B$, $w \neq 1$, и потому существует гомоморфизм σ группы B на конечную группу, при котором $w\sigma \neq 1$. Пусть еще ρ — гомоморфизм группы G на группу B, тождественный на B и переводящий в единицу элементы из A. Очевидно, что $w^G \cap AN = \emptyset$, где N — ядро гомоморфизма $\rho\sigma$.

Пусть $l(w) > 1$. Индуктивные соображения позволяют считать, что w циклически несократим. Поскольку группы A и B являются финитно аппроксимируемыми, существуют такие нормальные подгруппы L и M к. и. групп A и B соответственно, что L не содержит всех A-слогов несократимой записи w, а M не содержит всех B-слогов этой записи. Обозначим через N ядро гомоморфизма группы G на группу $G' = A/L * B/M$, продолжающего естественные отображения групп A и B. Тогда элемент wN группы G' имеет длину, равную $l(w)$, и является циклически несократимым. Следовательно, $(wN)^{G'} \cap AN/N = \emptyset$. Если теперь U/N — нормальная подгруппа к. и. группы G' такая, что $(wN)^{G'} \cap (AN/N)(U/N) = \emptyset$, то в группе G выполнено равенство $w^G \cap AU = \emptyset$. Мы видим, таким образом, что группы A и B можно считать конечными.

Пусть R — нормальное замыкание в группе G подгруппы A. Тогда $G/R \simeq B$ — конечная группа, и если $w \notin R$, то $w^G \cap R = \emptyset$. Таким образом, остается рассмотреть лишь случай, когда $w \in R$.

Хорошо известно, что группа R является свободным произведением подгрупп $A^b = b^{-1}Ab$, где $b \in B$. Обозначив через R_1 подгруппу группы R, порождаемую всеми подгруппами A^b, где $b \neq 1$, очевидно, имеем $R = A * R_1$. Т. к. $G = BR$, множество w^G является объединением конечного семейства множеств $(w^b)^R$, где $b \in B$. Легко видеть, что длина каждого элемента w^b относительно разложения $R = A * R_1$ группы R меньше длины w, и по индукции для каждого $b \in B$ существует нормальная подгруппа N_b группы R имеющая к. и. в группе R и такая, что $(w^b)^R \cap AN_b = \emptyset$. Тогда пересечение N_0 всех подгрупп N_b является нормальной подгруппой к. и. группы R, причем $w^G \cap AN_0 = \emptyset$. Т. к. N_0 имеет к. и. в группе G, существует нормальная подгруппа N к. и. группы G, лежащая в подгруппе N_0. Она и является искомой.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть H — конечно порожденная подгруппа свободной группы F и пусть f — такой элемент группы F, что $f^F \cap H = \emptyset$. По теореме Холла – Бернса существует такая подгруппа U к. и. группы F, что $U = H * K$ для некоторой подгруппы K. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — система представителей левых смежных классов группы F по подгруппе U. Тогда множество f^F является объединением подмножеств $(f^{a_i})^U$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Для любого $i = 1, 2, \dots, m$ определим нормальную подгруппу N_i группы U следующим образом. Если $f^{a_i} \in U$, N_i — такая нормальная подгруппа к. и.группы U, что $(f^{a_i})^U \cap HN_i = \emptyset$; ее существование обеспечивается леммой 1. Если же $f^{a_i} \notin U$, полагаем $N_i = U$; ясно, что при этом также $(f^{a_i})^U \cap HN_i = \emptyset$. Если теперь $N_0 = \bigcap_{i=1}^m N_i$, то N_0 — подгруппа к. и. группы F. Поэтому существует нормальная подгруппа N группы F, лежащая в подгруппе N_0 и имеющая к. и. в группе F. Тогда $f^F \cap HN = \emptyset$, и теорема 1 доказана.

3. Для доказательства теоремы 2 воспользуемся индукцией по рангу Хирша сверхразрешимой группы G, т. е. по числу бесконечных факторов нормального ряда этой группы с циклическими факторами. Если это число равно нулю, то группа G является конечной, и наше утверждение тривиально. Для индуктивного шага нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2. *Бесконечная сверхразрешимая группа обладает бесконечной циклической нормальной подгруппой.*

В самом деле, пусть

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$$

— нормальный ряд группы G с циклическими факторами. Пусть r — наименьшее число такое, что фактор G_r/G_{r-1} является бесконечной группой, a — элемент группы G_r, порождающий ее по модулю G_{r-1}, и $A = (a)$ — подгруппа группы G, порождаемая элементом a. Тогда $G_r = AG_{r-1}$ и поскольку подгруппа G_{r-1} конечна, A имеет к. и. в группе G_r. Т. к. всякая подгруппа к. и. конечно порожденной группы содержит характеристическую подгруппу к. и. этой группы, для некоторого $m > 0$ подгруппа $A^m = (a^m)$ является характеристической подгруппой группы G_r и потому — искомой нормальной подгруппой группы G.

Лемма 3. *Пусть h — элемент бесконечного порядка сверхразрешимой группы G. Если для некоторых целых чисел r и s элементы h^r и h^s сопряжены в группе G, то $|r| = |s|$.*

Доказательство. Пусть $H = (h)$ и пусть $A = (a)$ — бесконечная циклическая нормальная подгруппа группы G.

Если $H \cap A \neq 1$, то для некоторого целого числа $m > 0$ $h^m \in A$. Поэтому для любого элемента $g \in G$ выполнено равенство $g^{-1}h^m g = h^{m\varepsilon}$ при подходящем $\varepsilon = \pm 1$. Следовательно, если для некоторого элемента g выполнено равенство $g^{-1}h^r g = h^s$, то мы должны иметь $h^{mr\epsilon} = h^{ms}$, так что $r\epsilon = s$.

Это замечание обеспечивает справедливость доказываемого утверждения в случае, когда подгруппа A имеет конечный индекс в группе G (базис индукции по рангу Хирша), а также — индуктивного шага, если $H \cap A \neq 1$. Если же $H \cap A$=1, то элемент h имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы A, и можно воспользоваться индуктивным предположением.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 2. Пусть H — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом h, и g — элемент из G такой, что $g^G \cap H = \emptyset$. Т. к. произвольная сверхразрешимая группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности (см.[1]), мы можем считать подгруппу H бесконечной. Более того, т.к. $g^G \cap H(H \cap A) = g^G \cap H = \emptyset$, можно считать, исходя из индуктивных соображений, что $H \cap A = 1$, где $A = (a)$ — снова бесконечная циклическая нормальная подгруппа группы G.

Если, далее, $g^G \cap HA = \emptyset$, то поскольку ранг Хирша фактор-группы G/A меньше ранга Хирша группы G, мы можем воспользоваться индуктивным предположением. Поэтому остается рассмотреть случай, когда элемент g имеет вид $g = h^r a^k$ для некоторых целых чисел r и k.

Т. к. элемент g не сопряжен в группе G ни с одним из элементов h^r и h^{-r}, существует гомоморфизм группы G в некоторую конечную группу, в которой образ элемента g не сопряжен с образами элементов h^r и h^{-r}. Пусть образ элемента a при этом гомоморфизме имеет порядок m. Тогда элемент g не сопряжен с элементами h^r и h^{-r} по модулю подгруппы A^m. Покажем, что $g^G \cap HA^m = \emptyset$.

В самом деле, если элемент $g = h^r a^k$ сопряжен с элементом вида $h^s a^{lm}$ для некоторых чисел s и l, то элементы $(hA)^r$ и $(hA)^s$ оказываются сопряженными в фактор-группе G/A. Т. к. $H \cap A = 1$, из леммы 3 следует, что $s = r$ или $s = -r$. Следовательно, элемент g сопряжен с h^r или h^{-r} по модулю A^m, что противоречит выбору m.

По индуктивному предположению существует такая нормальная подгруппа N/A^m к. и. фактор-группы G/A^m, что элемент gA^m не сопряжен с элементами из HN/A^m. Отсюда $g^G \cap HN = \emptyset$, и теорема доказана.

Список использованной литературы

1. *Каргаполов М. И.* Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности // Алгебра и логика. 1967. Т. 6. С. 63–68.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М., 1980. 445 с.
3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
4. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extentions // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1980. Vol. 29. P. 35–51.
5. *Segal D.* Decidable properties of policyclic groups // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61. P. 497–528.