УДК 512.543

О СВОЙСТВЕ ХАУСОНА НИСХОДЯЩИХ HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Д. И. Молдаванский (г. Иваново)

Аннотация

Группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение любых двух ее конечно порожденных подгрупп также является конечно порожденной подгруппой. Получен ряд условий, при которых нисходящее HNN-расширение этим свойством не обладает. В частности, из этих результатов и результата Р. Дж. Бернса и А. М. Бруннера следует, что произвольное нисходящее HNN-расширение нециклической свободной группы не обладает свойством Хаусона.

1. Основные результаты

Говорят, что группа G обладает *свойством Хаусона* (является *хаусоновой группой*), если пересечение любых двух ее конечно порожденных подгрупп также является конечно порожденной подгруппой. Это название вошло в обиход после работы А. Хаусона [1], где было доказано, что все свободные группы обладают этим свойством. Обобщая это утверждение, Б. Баумслаг [2] показал, что свободное произведение двух хаусоновых групп является хаусоновой группой. С другой стороны, в работе [3] было замечено, что прямое произведение свободной группы ранга 2 и бесконечной циклической группы не обладает свойством Хаусона. Затем это утверждение было обобщено Р. Дж. Бернсом и А. М. Бруннером [4], установившими, что произвольная группа, являющаяся расширением конечно порожденной нециклической свободной группы при помощи бесконечной циклической группы, не обладает свойством Хаусона. Поскольку произвольное расширение при помощи бесконечной циклической группы расщепляемо, любая такая группа является частным случаем нисходящего HNN-расширения конечно порожденной свободной группы.

Напомним, что *нисходящее* (или — в терминологии ряда авторов — *восходящее*) HNN*-расширение*, являющееся, в свою очередь, частным случаем общей конструкции HNN-расширения, может быть определено следующим образом. Пусть G — некоторая группа и φ — инъективный эндоморфизм группы G. Тогда нисходящим HNN-расширением (базовой) группы G, соответствующим эндоморфизму φ, называется группа $G(\varphi) = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$, порождаемая образующими группы G и еще одним элементом t и определяемая всеми определяющими соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}gt = g\varphi$, где $g \in G$. Очевидно, что если эндоморфизм φ является вдобавок сюръективным, т. е. — автоморфизмом группы G, то группа $G(\varphi)$ оказывается расщепляемым расширением группы G при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t. Поэтому следующее утверждение можно рассматривать как дополнение сформулированного выше результата Бернса – Бруннера:

Теорема 1. *Пусть G — нециклическая свободная группа конечного ранга и φ — инъективный, но не сюръективный эндоморфизм группы G. Тогда нисходящее HNN-расширение $G(\varphi) = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$, не является хаусоновой группой.*

Таким образом из этого утверждения и результат Бернса – Бруннера следует, что *произвольное нисходящее HNN-расширение нециклической свободной группы конечного ранга не обладает свойством Хаусона.*

Предположение о нецикличности базовой группы здесь существенно. В самом деле, произвольное нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы является группой с одним определяющим соотношением, принадлежащей семейству групп Баумслага – Солитэра, а именно — группой вида $G_k = \langle a, t;\ t^{-1}at = a^k \rangle$, где k — целое число, отличное от нуля, а в работе [3] было показано, что все группы G_k являются хаусоновыми. Уместно упомянуть здесь, что этот результат был обобщен в работе [4] следующим образом:

Группа $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m, t;\ t^{-1}ut = v \rangle$, где u и v — непустые несократимые слова в алфавите a_1, a_2, …, a_m, обладает свойством Хаусона при условии, что хотя бы одно из слов u и v не является истинной степенью в соответствующей свободной группе.

Еще одно семейство хаусоновых групп с одним определяющим соотношением доставляет результат из работы [5], утверждающий, что свободное произведение двух свободных групп с объединенными циклическими подгруппами, хотя бы одна из которых изолирована в соответствующем свободном множителе, является хаусоновой группой.

С другой стороны, многие группы с одним определяющим соотношением свойством Хаусона не обладают. Так, еще в работе [3] было доказано, что если группа с одним определяющим соотношением обладает нетривиальным центром, не является абелевой и не изоморфна группе $G_{-1} = \langle a, t;\ t^{-1}at = a^{-1} \rangle$, то она не является хаусоновой. Отметим, что это утверждение является непосредственным следствием приведенной выше теоремы Бернса – Бруннера, поскольку нециклическая группа с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром является расширением свободной группы конечного ранга при помощи бесконечной циклической [6]. В последнее время новые примеры групп с одним определяющим соотношением, не обладающих свойством Хаусона, были указаны в работах [7], [8] и [9]. Можно заметить, однако, что каждая из приведенных в этих работах групп является нисходящим HNN-расширением нециклической свободной группы конечного ранга. Таким образом, невыполнимость свойства Хаусона во всех известных примерах нехаусоновых групп с одним определяющим соотношением вытекает из теоремы Бернса – Бруннера и сформулированной выше теоремы 1.

Утверждение теоремы 1 является частным случаем следующего более общего результата. Будем говорить, что подгруппа H группы G является *свободно дополняемой*, если для некоторой неединичной подгруппы K группы G подгруппа, порождаемая подгруппами H и K, является их свободным произведением.

Теорема 2. *Пусть G — конечно порожденная группа, , φ — инъективный, но не сюръективный эндоморфизм группы G и $H = G\varphi$. Если подгруппа H группы G свободно дополняема, то нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ не является хаусоновой группой.*

Для вывода утверждения теоремы 1 из теоремы 2 достаточно заметить, что если G — нециклическая свободная группа конечного ранга и φ — инъективный, но не сюръективный эндоморфизм группы G, то подгруппа $H = G\varphi$ свободно дополняема. Действительно, поскольку ранг подгруппы H совпадает с рангом G и H является собственной подгруппой группы G, известная формула Шрейера говорит о том, что индекс подгруппы H в группе G бесконечен, и потому свободная дополняемость подгруппы H вытекает из теоремы Холла – Бернса (см., напр., [10, с. 34]).

Приведем еще одно применение теоремы 2.

Следствие. *Пусть конечно порожденная группа G является свободным произведением неединичных групп A и B. Если φ — такой инъективный, но не сюръективный эндоморфизм группы G, что $A\varphi \subseteq A$ и $B\varphi \subseteq B$, то группа $G(\varphi)$ не является хаусоновой.*

Действительно, в этом случае подгруппа $H = G\varphi$ порождается подгруппами $A\varphi$ и $B\varphi$ (и является их свободным произведением), и поскольку $H\varphi \neq G$, то $A\varphi \neq A$ или $B\varphi \neq B$. Поэтому, как легко видеть, индекс подгруппы H в группе G бесконечен, и, следовательно (см., напр., [11, с. 27]), подгруппа H свободно дополняема.

Похожее утверждение имеет место для группы, разложимой в прямое произведение:

Теорема 3. *Пусть группа G является прямым произведением неединичных групп A и B и пусть φ — такой инъективный эндоморфизм группы G, что $A\varphi \subseteq A$ и $B\varphi \subseteq B$. Если $A\varphi \neq A$, $B\varphi \neq B$ и хотя бы одна из подгрупп A или B конечно порождена, то группа $G(\varphi)$ не является хаусоновой.*

Из этой теоремы следует, в частности, что если G — свободная абелева группа конечного ранга, большего единицы, и φ — ее инъективный эндоморфизм, матрица которого в некоторой системе свободных порождающих группы G имеет блочно-диагональный вид, причем абсолютная величина определителей хотя бы двух диагональных блоков больше единицы, то группа $G(\varphi)$ не является хаусоновой. Вопрос о хаусоновости произвольных нисходящих HNN-расширений свободной абелевой группы остается открытым.

2. Доказательство теоремы 2.

Пусть φ — инъективный, но не сюръективный эндоморфизм конечно порожденной группы G, $H = G\varphi$ и K — неединичная подгруппа группы G такая, что подгруппа L, порождаемая подгруппами H и K, является их свободным произведением. Очевидно, что подгруппу K можно считать конечно порожденной.

Для произвольного целого числа n полагаем $K_n = t^{-n}Kt^n$. Обозначим также через N подгруппу, порождаемую в группе $G(\varphi)$ всеми подгруппами K_n, а через M — подгруппу, порожденную всеми подгруппами K_n, у которых $n \geqslant 0$. Заметим, что при $n \geqslant 0$ имеем, очевидно, $K_n = K\varphi^n$, и потому подгруппа M содержится в базовой группе G HNN-расширения $G(\varphi)$.

Лемма 1. *Подгруппа N является свободным произведением семейства подгрупп K_n, $n \in \mathbb{Z}$. В частности, подгруппы N и M не являются конечно порожденными.*

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что подгруппа, порожденная произвольным конечным множеством подгрупп K_n, является их свободным произведением, а для этого, в свою очередь, достаточно показать, что для любого $r \geqslant 1$ подгруппа M_r, порождаемая подгруппами $K_0 = K\varphi^0$, $K_1 = K\varphi$, $\ldots$, $K_r = K\varphi^r$, является свободным произведением этих подгрупп.

Так как $L = H * K = H * K_0$ и $K\varphi \leqslant H$, при $r = 1$ это очевидно. Пусть для некоторого $r \geqslant 1$ подгруппа M_r является свободным произведением подгрупп $K_0, K_1, \ldots, K_r$. Тогда, поскольку отображение φ является изоморфизмом группы G на подгруппу H и при $i \geqslant 0$ $K_i\varphi = K_{i+1}$, подгруппа $M_r\varphi$ является свободным произведением подгрупп $K_1, K_2, \ldots, K_{r+1}$. Так как подгруппа M_{r+1} порождается подгруппами K_0 и $M_r\varphi$ и $M_r\varphi \leqslant H$, отсюда следует, что подгруппа M_{r+1} является свободным произведением подгрупп $K_0, K_1, \ldots, K_{r+1}$, и наше утверждение доказано.

Лемма 2. $N \cap G = M$.

Доказательство. Поскольку включение $M \subseteq N \cap G$ очевидно, достаточно установить справедливость противоположного включения. Произвольный неединичный элемент u подгруппы N может быть записан в виде

$$u = v_1 v_2 \cdots v_r,$$

где $r \geqslant 1$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ v_i — неединичный элемент из подгруппы K_{n_i}, $v_i = t^{-n_i} g_i t^{n_i}$ для неединичного элемента $g_i \in K$, и при $r > 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, r-1$ $n_i \neq n_{i+1}$.

Покажем, что если среди чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$ хотя бы одно отрицательно, то элемент u не входит в подгруппу G. Поскольку в оставшихся случаях включение $u \in M$ очевидно, тем самым лемма будет доказана.

Итак, предположим, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, выполнено неравенство $n_i < 0$. Если $r = 1$, то поскольку элемент g_1 не входит в подгруппу H, запись

$u = t^{-n_1} g_1 t^{n_1}$ является приведенной в HNN-расширении $G(\varphi)$, и потому $u \notin G$ в силу леммы Бриттона.

Будем считать теперь, что $r > 1$, и обозначим через n наименьшее из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Предположим, рассуждая от противного, что элемент u принадлежит подгруппе G. Тогда, поскольку $n \leqslant -1$, элемент $t^n u t^{-n} = u\varphi^{-n}$ входит в подгруппу H.

С другой стороны, для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ ввиду того, что $n - n_i \leqslant 0$, имеем

$$t^n v_i t^{-n} = t^{n-n_i} g_i t^{-(n-n_i)} = g_i \varphi^{n_i - n} \in K\varphi^{n_i - n},$$

и так как для любого $i = 1, 2, \ldots, r-1$ числа $n_i - n$ и $n_{i+1} - n$ различны, запись

$$t^{-n} u t^n = g_1 \varphi^{n_1 - n} \cdot g_2 \varphi^{n_2 - n} \cdot \cdots \cdot g_r \varphi^{n_r - n}$$

элемента $t^n u t^{-n}$ является несократимой в разложении подгруппы M, указанном в лемме 1. При этом, в силу выбора числа n хотя бы для одного номера i выполнено равенство $n - n_i = 0$; пусть $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ — все номера слогов, для которых это равенство выполнено. Остальные слоги этой записи принадлежат подгруппе H, и объединяя все такие слоги, идущие подряд, получаем запись элемента $t^n u t^{-n}$ вида

$$t^n u t^{-n} = w_0 g_{i_1} w_1 g_{i_2} w_2 \ldots w_{s-1} g_{i_s} w_s,$$

где все w_j — элементы подгруппы H и все они, кроме, быть может, w_0 и w_s, отличны от 1. В любом случае эта запись является, очевидно, несократимой в разложении $L = H * K$ подгруппы L, и поскольку по меньшей мере один из слогов этой записи принадлежит подгруппе K, это противоречит включению $t^n u t^{-n} \in H$. Лемма 2 доказана.

Переходя теперь непосредственно к доказательству теоремы 2, обозначим через F подгруппу группы $G(\varphi)$, порождаемую подгруппой K и элементом t. Покажем, что $F \cap G = M$. Поскольку подгруппы F и G являются конечно порожденными, а подгруппа M не является конечно порожденной, это и будет означать, что в группе $G(\varphi)$ свойство Хаусона не выполняется.

Произвольный элемент $f \in F$ записывается в виде $f = g_0 t^{n_1} g_1 t^{n_2} \cdots t^{n_r} g_r$ для некоторых элементов $g_0, g_1, \ldots, g_r$ из подгруппы K и целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Если элемент f принадлежит подгруппе G, то факторизация группы $G(\varphi)$ по нормальному замыканию подгруппы G показывает, что $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = 0$, и потому элемент f входит в подгруппу N. Таким образом, имеет место включение $F \cap G \subseteq N$, откуда с учетом включения $M \subseteq F$ и леммы 2 получаем

$$F \cap G = F \cap G \cap N = F \cap M = M,$$

что и требовалось.

3. Доказательство теоремы 3.

Пусть $G = A \times B$ и пусть φ — такой инъективный эндоморфизм группы G, что $A\varphi \subseteq A$ и $B\varphi \subseteq B$. Предположим также, что $A\varphi \neq A$, $B\varphi \neq B$ и подгруппа A конечно порождена. Обозначая через φ и ограничение эндоморфизма φ на подгруппу B, наряду с группой $G(\varphi)$ введем в рассмотрение соответствующее нисходящее HNN-расширение $B(\varphi) = \bigl(B, t;\ t^{-1}bt = b\varphi\ (b \in B)\bigr)$ группы B.

Пусть π — проектирование группы G на группу B. Легко видеть, что существует гомоморфизм ρ группы $G(\varphi)$ в группу $B(\varphi)$, который проходную букву группы $G(\varphi)$ переводит в проходную букву группы $B(\varphi)$ и действие которого на группе G совпадает с действием отображения π. Утверждается, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с подгруппой $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} t^k A t^{-k}$.

Действительно, поскольку $A\rho = A\pi = 1$, включение $U \subseteq \operatorname{Ker}\rho$ очевидно. Обратно, произвольный элемент из $\operatorname{Ker}\rho$ (как и любой элемент группы $G(\varphi)$) может быть записан в виде $t^m g t^{-n}$ для некоторых неотрицательных целых чисел m и n и элемента $g \in G$. Записав элемент g в виде $g = ab$, где $a \in A$ и $b \in B$, получаем в группе $B(\varphi)$ равенство $t^m b t^{-n} = 1$. Поскольку базовая группа произвольного HNN-расширения тривиально пересекается с циклической подгруппой, порождаемой проходной буквой, имеем $b = 1$ и $m = n$. Таким образом, $t^m g t^{-n} = t^m a t^{-m} \in U$, что и доказывает противоположное включение.

Равенство $\operatorname{Ker}\rho = U$, таким образом, доказано. Отметим также, что поскольку $A\varphi \neq A$, подгруппа U является объединением строго возрастающей последовательности подгрупп и потому не является конечно порожденной.

Обозначим через C подгруппу группы $G(\varphi)$, порожденную подгруппой A и элементом t, а через D — подгруппу, порожденную подгруппой A и элементом tb, где $b \in B \setminus B\varphi$.

Очевидно, что $U \leqslant C$, и легко видеть, что и подгруппа D содержит U. Действительно, $A \leqslant D$, и если для некоторого $k \geqslant 0$ D содержит подгруппу $t^k A t^{-k}$, то и подгруппа $(tb)\, t^k A t^{-k} (tb)^{-1}$ лежит в D. Но так как $bt^k = t^k\, b\varphi^k$, имеем $(tb)\, t^k A t^{-k} (tb)^{-1} = t^{k+1} A t^{-(k+1)}$.

Таким образом, подгруппа U содержится в пересечении подгрупп C и D. Покажем, что в действительности пересечение подгрупп C и D совпадает с U. Поскольку подгруппы C и D конечно порождены. а подгруппа U не является конечно порожденной, тем самым теорема будет доказана.

Очевидно, что при гомоморфизме ρ группы $G(\varphi)$ на группу $B(\varphi)$ подгруппа C переходит в циклическую подгруппу, порожденную элементом t, а подгруппа D переходит в циклическую подгруппу, порожденную элементом tb. Если пересечение этих подгрупп группы $B(\varphi)$ нетривиально, то для некоторых ненулевых целых чисел m и n должно выполняться равенство $t^m = (tb)^n$. Переход к фактор-группе группы $B(\varphi)$ по нормальному замыканию подгруппы B показывает, что тогда $m = n$. Следовательно, в группе $B(\varphi)$ выполнено равенство $t^m = (tb)^m$, причем число m можно считать положительным. Поскольку

$$(tb)^m = t^m \cdot t^{-(m-1)} b t^{m-1}\, t^{-(m-2)} b t^{m-2}\, \cdots\, t^{-1} b t\, b = t^m \cdot b\varphi^{m-1}\, b\varphi^{m-2}\, \cdots\, b\varphi\, b,$$

получаем $b\varphi^{m-1}\, b\varphi^{m-2}\, \cdots\, b\varphi\, b = 1$, откуда следует включение $b \in B\varphi$, что противоречит выбору элемента b.

Таким образом, пересечение подгрупп $C\rho$ и $D\rho$ совпадает с единичной подгруппой, и потому $(C \cap D)\rho = 1$. Поскольку ядро гомоморфизма ρ совпадает с подгруппой U, отсюда получаем требуемое включение $C \cap D \subseteq U$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Howson A. G. On the intersection of finitely generated free groups // J. London Math. Soc. 29. 1954. P. 428 – 434.

[2] Baumslag B. Intersections of finitely generated subgroups in free products // J. London Math. Soc. 41. 1966. P. 673 – 679.

[3] Молдаванский Д. И. О пересечении конечно порожденных подгрупп // Сиб. матем. журн. 1968. № 9, С. 1422 – 1426.

[4] Бернс Р., Бруннер А. Два замечания о групповом свойстве Хаусона // Алгебра и логика, 18, № 5 (1979). С. 513 – 522.

[5] Burns R. On finitely generated subgroups of an amalgameted product of two subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 169 (1972). P. 293–306.

[6] Baumslag G., Taylor T. The center of groups with one defining relator // MathȦnn. 1968. V. 175, P. 315 – 319.

[7] Kapovich I. Howson property and one-relator groups // Communs in algebra. 1999. V. 27. P. 1057 – 1072.

[8] Безверхняя Н. Б. О свойстве Хаусона и гиперболичности некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула. 2001.

[9] Безверхняя Н. Б. О свойстве Хаусона некоторого класса групп с одним определяющим соотношением // Чебышевский сб. Т. 2 (2001), С. 14 – 18.

[10] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[11] Горюшкин А.П., Горюшкин В.А. Свободная разложимость и сбалансированность групп. П.-Камчатский: Изд-во Камчат. гос. пед. ун-та, 2005.