А. В. Борщев, Д. И. Молдаванский, Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 34–44

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm2672

Математические заметки

том 79 выпуск 1 январь 2006

УДК 512.543

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

А. В. Борщев, **Д. И. Молдаванский**

Рассматривается класс групп, каждая из которых задается одним определяющим соотношением, зависящим от трех целочисленных параметров, и является HNN-расширением некоторой группы Баумслага–Солитэра. Получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы группы этого класса были изоморфны, а также для того, чтобы каждая из двух неизоморфных групп являлась гомоморфным образом другой. Следствием этого является отрицательный ответ на вопрос 3.33 из "Коуровской тетради".

Библиография: 7 названий.

Введение. В данной статье рассматриваются группы вида

$$G(l,m;k)=\langle a,t;t^{-1}a^{-k}ta^{l}t^{-1}a^{k}t=a^{m}\rangle,$$

где l,m и k – произвольные целые числа, отличные от нуля. Систематическое изучение этих групп впервые предпринял А. М. Бруннер [1], отметивший, в частности, что каждая такая группа изоморфна некоторой группе $G(l,m;k)$, числовые параметры l,m и k, определяющие которую, удовлетворяют условиям $k>0$ и $|l|\geqslant m>0$ (и эти условия предполагаются выполненными всюду ниже). Впрочем, на группы этого класса еще в 1969 году обратил внимание Г. Баумслаг [2], доказав, что все конечные гомоморфные образы группы $G(2,1;1)$ являются циклическими группами (и приведя тем самым еще один пример группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами). Исследования А. М. Бруннера были продолжены затем в работе [3]: при $|l|>m$ найдены образующие и определяющие соотношения группы всех автоморфизмов группы $G(l,m;k)$ (в [1] это сделано в случаях, когда $m=1$ или m не делит l), доказано, что группа $G(l,m;k)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $|l|=m$ (в [1] отмечена необходимость этого условия), и не является хопфовой тогда и только тогда, когда $|l|>m>1$, число m является делителем чисел l и k и числа m и l/m взаимно просты (в [1] доказана достаточность этих условий). Наконец, в работе [4] показано, что группа $G(l,m;k)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда $|l|=m=p^{r}$ и $k=p^{s}$ для некоторых целых чисел $r\geqslant 0$ и $s\geqslant 0$, причем если $l=-m$, то $p=2$ и $s\leqslant r$.

Здесь мы рассматриваем вопрос об изоморфизме групп $G(l,m;k)$. Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема. 1) *Если группы* $G_1 = G(l_1, m_1; k_1)$ *и* $G_2 = G(l_2, m_2; k_2)$ *гомоморфно отображаются друг на друга и выполнено хотя бы одно из неравенств* $|l_1| > m_1$ *и* $|l_2| > m_2$, *то* $l_1 = l_2$ *и* $m_1 = m_2$.

2) *Если* $|l| > m$, *то группы* $G_1 = G(l, m; k_1)$ *и* $G_2 = G(l, m; k_2)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

(2.1) $k_1 = k_2$;

(2.2) $m > 1$, *числа* k_1 *и* k_2 *делятся на наибольший общий делитель чисел* l *и* m *и* $k_1/k_2 = \pm(l/m)^p$ *для некоторого целого числа* $p \neq 0$;

(2.3) $m = 1$ *и частное* k_1/k_2 *является* l-*числом.*

3) *Группы* $G_1 = G(l, m; k_1)$ *и* $G_2 = G(l, m; k_2)$ *гомоморфно отображаются друг на друга и не изоморфны тогда и только тогда, когда* $|l| > m > 1$ *и число* m *является делителем каждого из чисел* l, k_1 *и* k_2, *причем число* $s = l/m$ *взаимно просто с* m *и частное* k_1/k_2 *является* s-*числом, не совпадающим ни с какой степенью (с целочисленным показателем) числа* $\pm s$.

(Здесь, как обычно, утверждение о том, что целое число m является n-*числом*, означает, что m делится лишь на простые числа, делящие целое число n; рациональное число будем называть n-числом, если n-числами являются числитель и знаменатель представляющей его несократимой дроби.)

Попытка указать необходимые и достаточные условия существования изоморфизма между группами рассматриваемого класса была анонсирована в [5]. Однако формулировка приведенной там теоремы оказалась не вполне верной, и пункт 2) нашей теоремы можно рассматривать как ее уточнение в том случае, когда $|l_1| > m_1$ или $|l_2| > m_2$. Вопрос об условиях изоморфности групп G_1 и G_2 в оставшемся случае $|l_1| = m_1$ и $|l_2| = m_2$ остается открытым.

Заметим, впрочем, что если группы G_1 и G_2 гомоморфно отображаются друг на друга и, скажем, $|l_1| = m_1$, то группа G_1, будучи финитно аппроксимируемой, является хопфовой, и потому группа G_2 должна быть изоморфной группе G_1. Следовательно, группа G_2 финитно аппроксимируема, и потому $|l_2| = m_2$. Если предположить, далее, что $l_1 = -m_1$, то, переходя к фактор-группам по коммутантам, получаем $l_1 = l_2$ и $m_1 = m_2$. Таким образом, утверждение пункта 1) нашей теоремы справедливо и в том случае, когда хотя бы для одного значения $i = 1, 2$ выполнено равенство $l_i = -m_i$. Одновременно мы видим, что выполнимость неравенства $|l| > m$ в утверждении пункта 3) нашей теоремы можно считать очевидной.

С другой стороны, приведенное в [5] следствие из упомянутой теоремы является справедливым. В нем указаны условия, достаточные для того, чтобы неизоморфные группы G_1 и G_2 гомоморфно отображались друг на друга (необходимые и достаточные условия даны в пункте 3) теоремы, сформулированной выше). Это позволяет дать отрицательный ответ на вопрос 3.33 из [6]: будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Действительно, уже из условий, сформулированных в [5], следует, что контрпримером могут служить группы $G(18, 2; 2)$ и $G(18, 2; 6)$, а из пункта 3) нашей теоремы следует, что этот пример является в определенном смысле минимальным.

Доказательству теоремы посвящен второй раздел статьи. В первом разделе приводится ряд необходимых нам утверждений, содержащихся в работах [1] и [3] или непосредственно вытекающих из этих работ. Еще раз подчеркнем, что всюду ниже без дополнительных оговорок предполагается, что числовые параметры l, m и k (с одинаковыми индексами или без них) удовлетворяют неравенствам $|l| > m > 0$ и $k > 0$ (ограничение $|l| > m > 0$ существенно, в частности, в ряде ссылок на результаты из [1]).

1. Предварительные замечания. Следуя [1], введем в представление $\langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^lt^{-1}a^kt = a^m\rangle$ группы $G(l, m; k)$ новый образующий b вместе с определяющим соотношением $b = t^{-1}a^kt$. Полученное представление

$$G(l, m; k) = \langle a, b, t; b^{-1}a^lb = a^m,\ t^{-1}a^kt = b\rangle$$

делает очевидным тот факт, что группа $G(l, m; k)$ является HNN-расширением с проходной буквой t группы $H(l, m) = \langle a, b; b^{-1}a^lb = a^m\rangle$, причем связанные подгруппы H^{-1} и H^1 являются бесконечными циклическими, порождаемыми элементами a^k и b соответственно (все необходимые определения и утверждения, относящиеся к конструкции HNN-расширения, можно найти в [7]). Каждая из групп $H(l, m)$ (называемых в литературе группами Баумслага–Солитэра), в свою очередь, является HNN-расширением с проходной буквой b бесконечной циклической группы, порождаемой элементом a. Поэтому нам придется говорить о t-длине и t-приведенной записи и о b-длине и b-приведенной записи элементов группы $G(l, m; k)$.

Символом L будем обозначать нормальное замыкание в группе $H(l, m)$ элемента a. Очевидно, что группа $H(l, m)$ является расщепляемым расширением подгруппы L при помощи бесконечной циклической группы с образующим b и что элемент $h \in H(l, m)$ принадлежит подгруппе L в точности тогда, когда сумма показателей по b в (произвольном) слове от образующих a и b, представляющем элемент h, равна 0. Договоримся также через $C(h)$ обозначать централизатор в группе $H(l, m)$ элемента h этой группы.

Рассматривая одновременно две группы вида $G(l, m; k)$, будем записывать $G_1 = G(l_1, m_1; k_1)$ и $G_2 = G(l_2, m_2; k_2)$ и снабжать соответствующими индексами их образующие a, b, t и подгруппы $H = H(l, m)$, H^{-1}, H^1 и L.

Перечислим некоторые необходимые нам свойства групп $H(l, m)$ и $G(l, m; k)$. Непосредственной индукцией по b-длине элемента h доказывается следующее утверждение, являющееся некоторым уточнением леммы 2.4 из работы [1].

Предложение 1. *Пусть элемент $h \in H(l, m)$ записан в виде $h = b^pv$, где $v \in L$, $p \in \mathbb{Z}$. Пусть $d = (l, m)$ – наибольший общий делитель чисел l и m и $l = l_1d$, $m = m_1d$. Равенство $h^{-1}a^rh = a^s$ имеет место тогда и только тогда, когда $v \in C(a^s)$ и выполнено одно из следующих условий в зависимости от знака p: $r = s$, если $p = 0$, $r = l_1^pdx$ и $s = m_1^pdx$ для некоторого целого числа x, если $p > 0$, и $r = m_1^{-p}dx$ и $s = l_1^{-p}dx$ для некоторого целого числа x, если $p < 0$.*

Предложение 2 [1, лемма 2.3]. *Пусть $h \in H(l, m)$. Если для некоторого целого числа $n \neq 0$ элемент h^n сопряжен с элементом из подгруппы, порожденной элементом a, или из подгруппы, порожденной элементом b, то и элемент h сопряжен с некоторым элементом из той же подгруппы.*

Предложение 3. *Пусть для некоторого элемента $g \in G(l, m; k)$ и некоторого целого числа $n \neq 0$ имеет место включение $g^{-1}a^ng \in H(l, m)$. Тогда элемент $g^{-1}a^ng$ принадлежит подгруппе L в том и только том случае, когда элемент g принадлежит подгруппе $H(l, m)$. При этом, если $g \notin H(l, m)$, то элементы g*

и $g^{-1}a^ng$ имеют соответственно вид $g = b^putv$ и $g^{-1}a^ng = v^{-1}b^sv$, где $s \neq 0$ и p – некоторые целые числа, и u v – элементы из подгруппы L, причем $u \in C(a^{ks})$ и $b^{-p}a^nb^p = a^{ks}$.

В самом деле, если $g \in H(l,m)$, включение $g^{-1}a^ng \in L$ очевидно. Предположим, что $g \notin H(l,m)$. Так как по условию $g^{-1}a^ng \in H(l,m)$, из леммы 2.5 работы [1] следует, что тогда элемент g имеет вид $g = wtv$, где $w \in H(l,m)$, $v \in L$. Поскольку запись $v^{-1}t^{-1}w^{-1}a^nwtv$ элемента $g^{-1}a^ng$ не может быть t-приведенной (ввиду его принадлежности подгруппе $H(l,m)$), для подходящего целого числа $s \neq 0$ должно выполняться равенство $w^{-1}a^nw = a^{ks}$. Поэтому $g^{-1}a^ng = v^{-1}b^sv$, и, так как $s \neq 0$, элемент $g^{-1}a^ng$ в этом случае действительно не входит в подгрупу L. Наконец, записывая элемент w в виде $w = b^pu$, где $u \in L$, в силу предложения 1 имеем $u \in C(a^{ks})$, и потому равенство $w^{-1}a^nw = a^{ks}$ принимает вид $b^{-p}a^nb^p = a^{ks}$.

Эндоморфизм φ группы $G(l,m;k)$ назовем *специальным*, если $a\varphi = a^r$ и $b\varphi = bg$ для некоторого целого числа $r \neq 0$ и элемента $g \in L$. Число r будем называть *показателем* эндоморфизма φ. Лемма 3.1 из работы [1] утверждает, в частности, что для любого эндоморфизма ψ группы $G(l,m;k)$ с нециклическим образом существует внутренний автоморфизм τ этой группы такой, что произведение $\psi\tau$ является специальным эндоморфизмом. Кроме того, имеет место следующее утверждение, доказательство которого дословно повторяет соответствующую часть рассуждений, используемых в [1] при доказательстве этой леммы.

Предложение 4. *Пусть φ – специальный эндоморфизм группы $G(l,m;k)$ с показателем r. Тогда для некоторого целого числа $p \geqslant 0$ выполнено равенство $rm^p = l^p$ и элемент $t\varphi$ имеет вид b^putv, где $u,v \in L$ и $u \in C(a^k)$. Кроме того, $b\varphi = v^{-1}bv$ (и потому элемент g из определения специального эндоморфизма совпадает с коммутатором $[b,v]$).*

Предложение 5. 1) *Каждый специальный эндоморфизм группы $G(l,m;k)$ с показателем $r = 1$ инъективен.*

2) *Если группа $G(l,m;k)$ обладает специальным эндоморфизмом с показателем $r \neq \pm 1$, то число m является делителем чисел l и k.*

3) *Если $m > 1$ и специальный эндоморфизм с показателем $r \neq \pm 1$ сюръективен, то он не является инъективным.*

Все утверждения этого предложения можно найти в работе [3]; тем не менее, для удобства читателей ниже приводится их доказательство.

Доказательство предложения 5. Пусть φ – специальный эндоморфизм группы $G(l,m;k)$ с показателем r. Таким образом, в силу определения $a\varphi = a^r$, а в силу предложения 4 $b\varphi = v^{-1}bv$ и $t\varphi = b^putv$ для некоторого целого числа $p \geqslant 0$, удовлетворяющего равенству $rm^p = l^p$, и некоторых элементов $u,v \in L$, причем $u \in C(a^k)$.

Покажем, что если $r = 1$, то эндоморфизм φ инъективен. Очевидно, что подгруппа $H = H(l,m)$ является φ-допустимой, и мы покажем сначала, что при $r = 1$ эндоморфизм φ действует инъективно на этой подгруппе. Пусть элемент $h \in H$ с b-приведенной записью

$$h = a^{s_0}b^{\varepsilon_1}a^{s_1}\cdots b^{\varepsilon_n}a^{s_n}$$

принадлежит ядру эндоморфизма φ. Если $n \geqslant 1$, то, поскольку запись

$$h\varphi = a^{s_0}(v^{-1}bv)^{\varepsilon_1}a^{s_1}\cdots(v^{-1}bv)^{\varepsilon_n}a^{s_n}$$

элемента $h\varphi$ не может быть b-приведенной, для некоторого номера i должно выполняться равенство $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$ и элемент $va^{s_i}v^{-1}$ должен принадлежать подгруппе, порожденной элементом a^l, если $\varepsilon_i = -1$, или подгруппе, порожденной элементом a^m, если $\varepsilon_i = 1$. Иначе говоря, для подходящего целого числа x выполнено равенство $va^{s_i}v^{-1} = a^{lx}$, если $\varepsilon_i = -1$, или равенство $va^{s_i}v^{-1} = a^{mx}$, если $\varepsilon_i = 1$. Так как $v \in L$, из предложения 1 следует, что тогда при $\varepsilon_i = -1$ $s_i = lx$, а при $\varepsilon_i = 1$ $s_i = mx$. Поскольку и то, и другое противоречит b-приведенности записи элемента h, имеем $n = 0$. Но тогда $h\varphi = h$, и потому $h = 1$.

Пусть теперь $g \in G(l, m; k)$ – произвольный элемент ядра отображения φ и пусть

$$g = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$$

– t-приведенная запись этого элемента. Так как при $r = 1$ из равенства $rm^p = l^p$ (и неравенства $|l| > m > 0$) следует, что $p = 0$, имеем $t\varphi = utv$, и потому образ элемента g записывается в виде

$$g\varphi = (h_0\varphi)(utv)^{\varepsilon_1}(h_1\varphi) \cdots (utv)^{\varepsilon_n}(h_n\varphi).$$

Так как при $n \geqslant 1$ эта запись не может быть t-приведенной, то в этом случае для некоторого номера i должно выполняться равенство $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, причем если $\varepsilon_i = -1$, то элемент $u^{-1}(h_i\varphi)u$ должен принадлежать подгруппе H^{-1}, а если $\varepsilon_i = 1$, то элемент $v(h_i\varphi)v^{-1}$ должен принадлежать подгруппе H^1. Таким образом, при $\varepsilon_i = -1$ для некоторого целого числа x выполнено равенство $u^{-1}(h_i\varphi)u = a^{kx}$. Ввиду включения $u \in C(a^k)$ имеем тогда $h_i\varphi = a^{kx} = (a^{kx})\varphi$, откуда в силу инъективности действия φ на подгруппе H получаем $h_i = a^{kx}$, что противоречит t-приведенности записи элемента g. Аналогично, при $\varepsilon_i = 1$ должно выполняться равенство $v(h_i\varphi)v^{-1} = b^x$, откуда имеем $h_i\varphi = v^{-1}b^x v = (b^x)\varphi$, и потому $h_i = b^x$, что снова противоречит t-приведенности записи элемента g. Следовательно, длина n t-приведенной записи элемента g оказывается равной нулю, т.е. $g \in H$, и потому ввиду инъективности действия φ на подгруппе H имеем $g = 1$. Утверждение 1) предложения 5 доказано.

Если предположить теперь, что $r \neq \pm 1$, то в равенстве $rm^p = l^p$ число p будет положительным, и потому из этого равенства следует, что m является делителем l. Равенство $(t\varphi)^{-1}(a\varphi)^k(t\varphi) = b\varphi$, переписанное в виде

$$v^{-1}t^{-1}u^{-1}b^{-p}a^{kr}b^p utv = v^{-1}bv,$$

после несложных преобразований принимает вид $a^{kr} = b^p a^k b^{-p}$. Так как $p > 0$ и запись правой части не может быть b-приведенной, отсюда следует, что число k должно делиться на m, и утверждение 2) также доказано.

Предположим, наконец, считая по-прежнему $r \neq \pm 1$, что $m > 1$ и что эндоморфизм φ сюръективен. Фиксируем произвольный элемент $g \in G(l, m; k)$ такой, что $g\varphi = a$. Так как коммутатор $[g, a]$ при отображении φ переходит в 1, для доказательства утверждения 3) достаточно показать, что этот коммутатор является неединичным элементом группы $G(l, m; k)$.

Пусть сначала элемент g лежит в подгруппе H и его b-приведенная запись имеет вид

$$g = a^{s_0} b^{\varepsilon_1} a^{s_1} \cdots b^{\varepsilon_n} a^{s_n}.$$

Так как $(a^{s_0})\varphi = a^{rs_0} \neq a$, длина n этой записи должна быть положительной. Но тогда запись

$$a^{-s_n}b^{-\varepsilon_n}\cdots a^{-s_1}b^{-\varepsilon_1}a^{-1}b^{\varepsilon_1}a^{s_1}\cdots b^{\varepsilon_n}a^{s_n+1}$$

коммутатора $[g,a]$ имеет положительную длину и является b-приведенной, поскольку $m > 1$. Следовательно, в этом случае $[g,a] \neq 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда t-длина элемента g положительна. Пусть t-приведенная запись этого элемента имеет вид

$$g = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n,$$

где $n \geqslant 1$. Тогда коммутатор $[g,a]$ записывается в виде

$$[g,a] = h_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} \cdots h_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} h_0^{-1} a^{-1} h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n a,$$

и мы покажем, что эта запись t-приведена.

Действительно, в противном случае к этой записи должны быть применимы t-редукции, а так как в группе H элемент $h_0^{-1}ah_0$ не входит в подгруппу H^1, это возможно лишь в случае, когда $\varepsilon_1 = 1$ и $h_0^{-1}ah_0 = a^{kx}$ для некоторого целого числа x. Из доказанного только что утверждения 2) следует, что сумма показателей по a в любом слове, равном единице в группе $G(l,m;k)$, должна делиться на m. Поэтому последнее равенство дает делимость на m числа $kx-1$. Но это невозможно, так как k делится на m и $m > 1$. Таким образом, и в этом случае коммутатор $[g,a]$ отличен от единицы, поскольку его t-длина положительна. Предложение 5 доказано.

2. Доказательство теоремы. Пусть группы $G_1 = G(l_1, m_1, k_1)$ и $G_2 = G(l_2, m_2, k_2)$ являются гомоморфными образами друг друга и φ – сюръективный гомоморфизм группы G_1 на группу G_2. Тогда в группе G_2 должно выполняться равенство

$$(b_1\varphi)^{-1}(a_1\varphi)^{l_1}(b_1\varphi) = (a_1\varphi)^{m_1}, \tag{1}$$

и так как $|l_1| > m_1$, из леммы Коллинза [7, с. 254] следует, что элемент $a_1\varphi$ сопряжен с некоторым элементом из подгруппы H_2. Поэтому, умножив отображение φ на подходящий внутренний автоморфизм группы G_2, можно без потери общности считать, что $a_1\varphi \in H_2$. Покажем, что в действительности можно предполагать даже (снова домножая φ на подходящий внутренний автоморфизм группы G_2), что для некоторого целого числа $r_1 \neq 0$ имеет место равенство

$$a_1\varphi = a_2^{r_1} \tag{2}$$

и что, кроме того, $b_1\varphi \in H_2$. В самом деле, если для отображения φ включение $b_1\varphi \in H_2$ уже имеет место, то из равенства (1) и леммы Коллинза, примененной на этот раз к группе H_2, следует, что элемент $a_1\varphi$ сопряжен в H_2 с некоторой степенью элемента a_2. Если же t_2-длина элемента $b_1\varphi$ положительна, то из (1) и леммы Бриттона следует, что элемент $(a_1\varphi)^{l_1}$ сопряжен в группе H_2 с элементом одной из подгрупп H_2^{-1} и H_2^1. В силу предложения 2 можно утверждать, что тогда и элемент $a_1\varphi$ сопряжен соответственно с некоторой степенью элемента a_2 или с элементом из подгруппы H_2^1. Так как подгруппы

H_2^{-1} и H_2^1 сопряжены в группе G_2, существование числа r_1, удовлетворяющего равенству (2), можно считать доказанным и в этом случае. При этом из сюръективности отображения φ и нецикличности группы G_2 следует, что $r_1 \neq 0$. Наконец, поскольку в силу (1) теперь имеет место включение $(b_1\varphi)^{-1}a_2^{r_1 l_1}(b_1\varphi) \in L_2$, из предложения 3 получаем, что $b_1\varphi \in H_2$.

Так как образы элементов a_1 и b_1 лежат в подгруппе H_2, то ввиду сюръективности гомоморфизма φ элемент $t_1\varphi$ в эту подгруппу не входит. Кроме того, выполненное в группе G_2 соотношение

$$(t_1\varphi)^{-1}(a_1\varphi)^{k_1}(t_1\varphi) = b_1\varphi$$

теперь принимает вид $(t_1\varphi)^{-1}a_2^{r_1k_1}(t_1\varphi) = b_1\varphi$, и поэтому из предложения 3 следует, что элементы $t_1\varphi$ и $(t_1\varphi)^{-1}a_2^{r_1k_1}(t_1\varphi)$ имеют вид $b_2^{p_1}u_1t_2v_1$ и $v_1^{-1}b_2^{s_1}v_1$ соответственно, где $s_1 \neq 0$ и p_1 – некоторые целые числа, u_1 и v_1 – элементы из подгруппы L_2, причем $u_1 \in C(a_2^{k_2s_1})$ и

$$b_2^{-p_1}a_2^{r_1k_1}b_2^{p_1} = a_2^{k_2s_1}. \tag{3}$$

Следовательно, $b_1\varphi = v_1^{-1}b_2^{s_1}v_1$, и соотношение (1) принимает вид

$$v_1^{-1}b_2^{-s_1}v_1a_2^{r_1l_1}v_1^{-1}b_2^{s_1}v_1 = a_2^{r_1m_1}. \tag{4}$$

Теперь из предложения 1 (с учетом неравенств $|l_i| > m_i$, $i = 1,2$) следует, что $s_1 > 0$ и для подходящего целого числа x выполнены равенства

$$r_1l_1 = l_{21}^{s_1}d_2x, \qquad r_1m_1 = m_{21}^{s_1}d_2x, \tag{5}$$

где $d_2 = (l_2, m_2)$, $l_2 = l_{21}d_2$, $m_2 = m_{21}d_2$. Отсюда получаем

$$\frac{l_1}{m_1} = \left(\frac{l_2}{m_2}\right)^{s_1}. \tag{6}$$

Аналогичные рассуждения применимы и к произвольному сюръективному гомоморфизму ψ группы G_2 на группу G_1. В частности, можно считать, что для подходящих целых чисел $r_2 \neq 0$ и $s_2 > 0$ и элемента $v_2 \in L_1$ выполнены равенства $a_2\psi = a_1^{r_2}$, $b_2\psi = v_2^{-1}b_1^{s_2}v_2$ и что

$$\frac{l_2}{m_2} = \left(\frac{l_1}{m_1}\right)^{s_2}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что $l_1/m_1 = (l_1/m_1)^{s_1s_2}$, и так как $|l_1| > m_1$, отсюда получаем $s_1 = s_2 = 1$ и $l_1/m_1 = l_2/m_2$.

Итогом этих рассуждений является

Лемма 1. *Пусть группы $G_1 = G(l_1, m_1, k_1)$ и $G_2 = G(l_2, m_2, k_2)$ гомоморфно отображаются друг на друга. Тогда $l_1/m_1 = l_2/m_2$ и с точностью до множителей, являющихся внутренними автоморфизмами соответствующих групп, произвольные сюрьективные гомоморфизмы φ группы G_1 на группу G_2 и ψ группы G_2 на группу G_1 таковы, что $a_1\varphi = a_2^{r_1}$, $b_1\varphi = v_1^{-1}b_2v_1$ и $a_2\psi = a_1^{r_2}$, $b_2\psi = v_2^{-1}b_1v_2$ для* *подходящих отличных от нуля целых чисел r_1 и r_2 и элементов $v_1 \in L_2$ и $v_2 \in L_1$. При этом для некоторых целых чисел p_1 и p_2 имеют место соотношения*

$$b_2^{-p_1} a_2^{r_1 k_1} b_2^{p_1} = a_2^{k_2} \qquad \text{и} \qquad b_1^{-p_2} a_1^{r_2 k_2} b_1^{p_2} = a_1^{k_1}, \tag{8}$$

$$v_1^{-1} b_2^{-1} v_1 a_2^{r_1 l_1} v_1^{-1} b_2 v_1 = a_2^{r_1 m_1} \qquad \text{и} \qquad v_2^{-1} b_1^{-1} v_2 a_1^{r_2 l_2} v_2^{-1} b_1 v_2 = a_1^{r_2 m_2}, \tag{9}$$

и для подходящих целых чисел x, y имеют место равенства

$$r_1 l_1 = l_2 x, \quad r_1 m_1 = m_2 x \qquad \text{и} \qquad r_2 l_2 = l_1 y, \quad r_2 m_2 = m_1 y. \tag{10}$$

Каждый из эндоморфизмов $\varphi\psi$ группы G_1 и $\psi\varphi$ группы G_2 является специальным с показателем $r_1 r_2$, и потому для некоторого целого числа $p \geqslant 0$ выполнены равенства

$$r_1 r_2 m_1^p = l_1^p \qquad \text{и} \qquad r_1 r_2 m_2^p = l_2^p. \tag{11}$$

В самом деле, поскольку равенства (8), (9) и (10) вытекают из равенств (3), (4) и (5) (и их аналогов для отображения ψ) соответственно, в доказательстве нуждается лишь последнее утверждение леммы 1. Покажем, например, что отображение $\varphi\psi$ является специальным эндоморфизмом группы G_1 с показателем $r_1 r_2$. Действительно, равенство $a_1(\varphi\psi) = a_1^{r_1 r_2}$ является очевидным, а так как $b_1\varphi = v_1^{-1} b_2 v_1$ и $b_2\psi = v_2^{-1} b_1 v_2$, где $v_1 \in L_2$ и $v_2 \in L_1$, имеем

$$b_1(\varphi\psi) = (v_1^{-1} b_2 v_1)\psi = (v_2(v_1\psi))^{-1} b_1 (v_2(v_1\psi)) = b_1 g,$$

где $g = [b_1, v_2(v_1\psi)] \in L_1$. Существование числа $p \geqslant 0$, удовлетворяющего равенствам (11), следует теперь из предложения 4 и равенства $l_1/m_1 = l_2/m_2$.

В следующих трех леммах предполагается, что φ и ψ – сюръективные гомоморфизмы группы G_1 на группу G_2 и группы G_2 на группу G_1 соответственно, имеющие вид, указанный в лемме 1, а также используются связанные с ними обозначения и соотношения из формулировки этой леммы.

Лемма 2. *Пусть $|r_1 r_2| = 1$. Тогда $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$ и если $k_1 \neq k_2$, то числа k_1 и k_2 делятся на наибольший общий делитель чисел l_1 и m_1 и $k_1/k_2 = \pm(l_1/m_1)^q$ для некоторого целого числа $q \neq 0$.*

В самом деле, поскольку тогда $r_1 = \pm 1$, из равенств (10) следует, в частности, что $\pm m_1 = m_2 x$, и потому m_2 является делителем m_1. Аналогично, m_1 является делителем m_2, и потому $m_1 = m_2$. Так как $l_1/m_1 = l_2/m_2$, имеем $l_1 = l_2$. Кроме того, первое из соотношений (8) дает равенство $b_2^{-p_1} a_2^{\varepsilon k_1} b_2^{p_1} = a_2^{k_2}$ (где $\varepsilon = \pm 1$), которое ввиду предложения 1 (и положительности чисел k_1 и k_2) имеет место тогда и только тогда, когда либо $k_1 = k_2$, либо $p_1 \neq 0$, числа k_1 и k_2 делятся на наибольший общий делитель чисел l_1 и m_1 и $k_1/k_2 = \varepsilon(l_1/m_1)^{p_1}$.

Лемма 3. *Пусть $|r_1 r_2| > 1$, $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$. Тогда $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$, число m_1 является делителем чисел l_1, k_1 и k_2, число $s = l_1/m_1$ взаимно просто с m_1 и k_1/k_2 является s-числом.*

Доказательство. Поскольку эндоморфизм $\varphi\psi$ группы G_1 является специальным с показателем r_1r_2, из пункта 2) предложения 5 следует, что число m_1 должно быть делителем чисел l_1 и k_1. Если $l_1 = m_1s$, то в силу (11) имеем $r_1r_2 = s^p$, причем $p > 0$. Покажем, что числа m_1 и s взаимно просты.

Так как эндоморфизм $\varphi\psi$ сюръективен, для некоторого элемента $w \in G_1$ мы должны иметь $a_1 = w(\varphi\psi)$. Записывая элемент w в виде слова $w(a_1, b_1, t_1)$ от порождающих группы G_1, получаем равенство $a_1 = v(a_1, b_1, t_1)$, где слово

$$v(a_1, b_1, t_1) = w(a_1^{s^p}, b_1(\varphi\psi), t_1(\varphi\psi))$$

получено заменой в слове $w(a_1, b_1, t_1)$ каждого образующего некоторым словом, равным его $\varphi\psi$-образу.

Подсчитаем сумму показателей по a_1 в слове $v(a_1, b_1, t_1)$. Отметим, прежде всего, что в силу предложения 4 можно считать, что в слове, определяющем элемент $b_1(\varphi\psi)$, сумма показателей по a_1 равна 0. Далее, из вида элемента $t_1(\varphi\psi)$, указанного в предложении 4, следует, что сумма показателей по t_1 в слове $v(a_1, b_1, t_1)$ совпадает с суммой показателей по t_1 в слове $w(a_1, b_1, t_1)$. С другой стороны, сумма показателей по t_1 в произвольном слове, равном единице в группе G_1, должна быть равна 0. Из равенства $a_1 = v(a_1, b_1, t_1)$ поэтому следует, что сумма показателей по t_1 в слове $v(a_1, b_1, t_1)$, а потому и в слове $w(a_1, b_1, t_1)$, равна 0. Таким образом, сумма показателей по a_1 в слове $v(a_1, b_1, t_1)$ равна ns^p, где n – сумма показателей по a_1 в слове $w(a_1, b_1, t_1)$.

Так как число m_1 является делителем чисел l_1 и k_1, сумма показателей по a_1 в определяющих словах группы G_1, а потому и в произвольном слове, равном единице в этой группе, кратна числу m_1. Поэтому из равенства $a_1 = v(a_1, b_1, t_1)$ следует сравнение $ns^p \equiv 1 \pmod{m_1}$, из которого, в свою очередь, следует взаимная простота чисел m_1 и s.

Те же рассуждения применительно к эндоморфизму $\psi\varphi$ группы G_2 (с учетом равенства $l_1/m_1 = l_2/m_2$) дают равенство $l_2 = m_2s$ и взаимную простоту чисел m_2 и s.

Второе из равенств (10) говорит о том, что число m_2 является делителем числа r_1m_1. Но так как $r_1r_2 = s^p$, то r_1 является s-числом и потому взаимно просто с m_2. Следовательно, m_2 является делителем числа m_1. Аналогично, m_1 является делителем m_2, откуда и получаем $m_1 = m_2$ и $l_1 = l_2$.

Наконец, так как $l_1 = m_1s$, из первого из соотношений (8) и предложения 1 следует, что $r_1k_1 = s^{p_1}k_2$. Поэтому k_1/k_2 является s-числом, и лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если одно из чисел m_1 и m_2 равно 1, то и другое равно 1. Если $m_1 = m_2 = 1$, то $l_1 = l_2$ и k_1/k_2 является l_1-числом.*

Доказательство. Предположим, напротив, что $m_1 > 1$ и $m_2 = 1$. Из леммы 2 следует, что тогда $|r_1r_2| > 1$, и потому ввиду предложения 5 эндоморфизм $\varphi\psi$ группы G_1 не является инъективным.

С другой стороны, из (11) следует, что $r_1r_2 = l_2^p$. Поэтому, произведение эндоморфизма $\psi\varphi$ на внутренний автоморфизм группы G_2, производимый элементом b_2^p, оставляет элемент a_2 неподвижным, т.е. является специальным эндоморфизмом с показателем 1. Из предложения 5 теперь следует, что эндоморфизм $\psi\varphi$ инъективен, откуда ввиду сюръективности ψ следует инъективность отображений φ и ψ, а потому и отображения $\varphi\psi$, – противоречие. Первое утверждение леммы доказано.

Если теперь $m_1 = m_2 = 1$, то очевидно, что $l_1 = l_2$. Так как в этом случае первое из соотношений (8) равносильно равенству $r_1 k_1 = l_1^{p_1} k_2$ и так как в силу (11) r_1 является l_1-числом, то k_1/k_2 является l_1-числом, и лемма 4 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждений теоремы.

Пусть группы $G_1 = G(l_1, m_1, k_1)$ и $G_2 = G(l_2, m_2, k_2)$ гомоморфно отображаются друг на друга. Тогда по лемме 1 имеет место равенство $l_1/m_1 = l_2/m_2$, и если $m_1 = m_2 = 1$, то и $l_1 = l_2$. В оставшемся (ввиду леммы 4) случае, когда $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$, утверждение пункта 1) следует из лемм 2 и 3.

Для доказательства утверждения пункта 2) предположим сначала, что группы $G_1 = G(l, m, k_1)$ и $G_2 = G(l, m, k_2)$ изоморфны, и пусть φ и ψ – изоморфные отображения соответственно группы G_1 на группу G_2 и группы G_2 на группу G_1. Без потери общности можно предполагать, что эти отображения имеют вид, указанный в лемме 1. Пусть $k_1 \neq k_2$. Так как при $m > 1$ ввиду биективности отображения $\varphi\psi$ из предложения 5 следует равенство $|r_1 r_2| = 1$, то справедливость утверждения (2.2) следует из леммы 2. Утверждение (2.3) является следствием леммы 4.

Обратно, предположим сначала, что выполнено условие (2.2), т.е. числа k_1 и k_2 делятся на наибольший общий делитель d чисел l и m и для подходящих $\varepsilon = \pm 1$ и целого числа $p \neq 0$ выполнено равенство $k_1/k_2 = \varepsilon (l/m)^p$. Легко видеть, что тогда для некоторого целого числа x $\varepsilon k_1 = l_1^p dx$ и $k_2 = m_1^p dx$, если $p > 0$, и $\varepsilon k_1 = m_1^{-p} dx$ и $k_2 = l_1^{-p} dx$, если $p < 0$ (где $l_1 = l/d$ и $m_1 = m/d$). Непосредственно проверяется (см., впрочем, предложение 1), что в любом случае в группах G_2 и G_1 выполнены равенства $b_2^{-p} a_2^{\varepsilon k_1} b_2^p = a_2^{k_2}$ и $b_1^p a_1^{\varepsilon k_2} b_1^{-p} = a_1^{k_1}$ соответственно. Поэтому отображения

$$a_1 \mapsto a_2^{\varepsilon}, \quad b_1 \mapsto b_2, \quad t_1 \mapsto b_2^p t_2 \qquad \text{и} \qquad a_2 \mapsto a_1^{\varepsilon}, \quad b_2 \mapsto b_1, \quad t_2 \mapsto b_1^{-p} t_1$$

определяют взаимно обратные изоморфизмы группы G_1 на группу G_2 и группы G_2 на группу G_1 соответственно.

Если теперь имеет место условие (2.3), то для подходяших целых l-чисел x и y выполнено равенство $xk_1 = yk_2$. Выберем целое число $p > 0$ так, чтобы для некоторого целого z выполнялось равенство $l^p = yz$. Тогда при $r = xz$ имеем $rk_1 = l^p k_2$, и снова непосредственная проверка показывает, что в группе G_2 выполнено равенство $b_2^{-p} a_2^{rk_1} b_2^p = a_2^{k_2}$. Поэтому отображение $a_1 \mapsto a_2^r$, $b_1 \mapsto b_2$, $t_1 \mapsto b_2^p t_2$ определяет гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. Легко видеть при этом, что поскольку r является l-числом, этот гомоморфизм сюръективен. Аналогично устанавливается существование сюръективного гомоморфизма группы G_2 в группу G_1. Но так как $m = 1$, группы G_1 и G_2 хопфовы (в силу сформулированного во введении критерия из работы [3]), и потому они изоморфны. Утверждение пункта 2) теоремы доказано полностью.

Для доказательства утверждения пункта 3) предположим сначала, что группы $G_1 = G(l, m, k_1)$ и $G_2 = G(l, m, k_2)$ неизоморфны и что φ и ψ – сюръективные гомоморфные отображения, указанного в лемме 1 вида, группы G_1 на группу G_2 и группы G_2 на группу G_1 соответственно. Из лемм 2 и 4 и уже доказанных утверждений пункта 2) получаем, что $|r_1 r_2| > 1$ и $m > 1$. Поэтому необходимость условий утверждения пункта 3) следует из леммы 3 и того, что если бы при этом число k_1/k_2 являлось степенью числа $\pm s$, то в силу утверждения (2.2) группы G_1 и G_2 оказались бы изоморфными.

Обратно, покажем, что если $l = ms$, числа m и s взаимно просты, m является делителем каждого из чисел k_1 и k_2 и $xk_1 = yk_2$ для некоторых целых s-чисел x и y, то группы

G_1 и G_2 гомоморфно отображаются друг на друга. Пусть целое число $p > 0$ таково, что $s^p = yz$ для некоторого целого z. Так как тогда $k_1 r = s^p k_2$, где $r = xz$, и числа k_1 и k_2 делятся на m, в группе G_2 выполнено соотношение $b_2^{-p} a_2^{k_1 r} b_2^p = a_2^{k_2}$. Следовательно, отображение

$$a_1 \mapsto a_2^r, \qquad b_1 \mapsto b_2, \qquad t_1 \mapsto b_2^p t_2$$

определяет гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. Для доказательства сюръективности этого гомоморфизма достаточно понять, что для любого s-числа r элементы a_2^r и b_2 порождают группу H_2. Пусть, в самом деле, n – наименьшее положительное s-число такое, что подгруппа группы H_2, порожденная этими элементами, содержит a^n. Предположив, что $n > 1$, обозначим через q простой делитель числа n. Тогда, записывая $n = n_1 q$ и $s = s_1 q$, видим, что этой подгруппе принадлежит элемент $b_2^{-1} a_2^{nms_1} b_2 = b_2^{-1} a_2^{n_1 ms} b_2 = a_2^{n_1 m}$, а потому и элемент $a_2^{n_1}$. Таким образом, $n = 1$, и сюръективность гомоморфизма доказана. Аналогично доказывается существование сюръективного гомоморфизма группы G_2 в группу G_1.

Остается заметить, что если, к тому же, $m > 1$ и число k_1/k_2 не является степенью числа $\pm s$, то группы G_1 и G_2 в силу условия (2.2) не изоморфны, и теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Brunner A. M. On a class of one-relator groups // Canad. J. Math. 1980. V. 32. №2. P. 414–420.

[2] Baumslag G. A noncyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. №3–4. P. 497–498.

[3] Кавуцкий М. А., Молдаванский Д. И. Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы. Межвузовский сб. научн. тр. Ивановского гос. ун-та. Иваново, 1988. С. 35–48.

[4] Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Ивановского гос. ун-та. 2000. №3. С. 129–140.

[5] Борщев А. В. О проблеме изоморфизма для одного класса групп с одним определяющим соотношением // Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти Д. К. Фаддеева. Тезисы докладов. С.-Петербург, 1997. С. 170–171.

[6] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 15-е. Новосибирск, 2002.

[7] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Ивановский государственный университет

E-mail: `moldav@ivanovo.ac.ru`

Поступило
27.10.2003
Исправленный вариант
10.05.2005