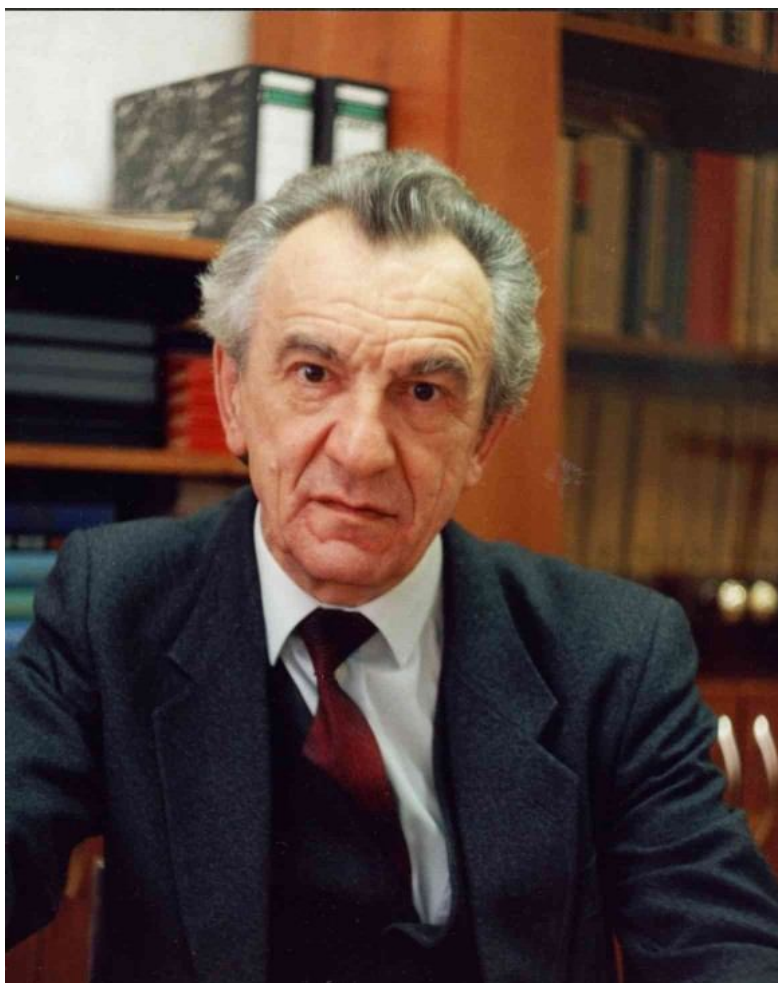


Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости

*Международная научная конференция,
посвященная 75-летию
Д. И. Молдаванского*

Иваново, 2 — 5 декабря 2015 года

Сборник научных трудов



УДК 512.5
ББК 22.1
А 45

Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости [Электронный ресурс] : Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д. И. Молдавского : сборник научных трудов. — Электрон. дан. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2016. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM) ; 12 см. — Систем. требования: программа чтения файлов в формате PDF 1.4.

ISBN 978-5-7807-1169-8

В сборнике представлены доклады участников Международной научной конференции, посвященной 75-летию Д. И. Молдавского, прошедшей в Ивановском государственном университете 2 — 5 декабря 2015 года.

Адресовано ученым, преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся данной проблематикой.

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Ивановского государственного университета*

Редакционная коллегия:

В. Н. Егоров, ректор ИвГУ (Иваново), ответственный редактор
Д. Н. Азаров, ИвГУ (Иваново),
В. Н. Безверхний, Академия МЧС (Химки),
Л. Д. Беклемишев, МИАН им.Стеклова (Москва),
Л. А. Бокуть, ИМ им. С.Л. Соболева (Новосибирск),
Н. А. Вавилов, СПбГУ (С.-Петербург),
В. Г. Дурнев, ЯрГУ (Ярославль),
Л. С. Казарин, ЯрГУ (Ярославль),
А. А. Клячко, МГУ (Москва),
Е. Д. Логинова, ИвГУ (Иваново),
А. Ю. Олышанский, МГУ (Москва), Vanderbilt University (USA)
В. А. Соколов, ЯрГУ (Ярославль),
Б. Я. Солон, ИвГУ, (Иваново),
С. И. Хашин, ИвГУ (Иваново),
P. E. Schupp, University of Illinois at Urbana–Champaign (USA),
L. M. Shneerson, City University of New York (USA)

ISBN 978-5-7807-1169-8

© ФГБОУ ВО «Ивановский
государственный университет», 2016

Д. Н. Азаров¹

Научная и педагогическая деятельность Д. И. Молдаванского

1 декабря 2015 исполнилось 75 лет Давиду Ионовичу Молдаванскому — доктору физико-математических наук, профессору кафедры алгебры и математической логики Ивановского государственного университета, выдающемуся ученому и педагогу.

Мое первое знакомство с Д. И. Молдаванским произошло, когда я был студентом первого курса математического факультета и слушал его лекции по линейной алгебре. Для нас — первокурсников это было первое знакомство с глубокой и содержательной алгебраической теорией. Благодаря мастерству Давида Ионовича мы приобрели бесценный опыт мыслительной работы, который необходим каждому математику. Он научил нас четко и аккуратно излагать любой математический текст, будь то ответ на экзамене, конспект лекции, или научный труд.

Когда на третьем курсе пришло время выбирать научного руководителя по курсовой работе, я записался к Давиду Ионовичу. Уже на первой встрече он предложил мне заняться одной задачей, которая была поставлена Р. Линдоном. Задача была связана с уравнениями над конечными циклическими группами и состояла из двух частей. В первой части была поставлена следующая до сих пор нерешенная проблема: существует ли алгоритм, который по каждому уравнению над конечной циклической группой выясняет, разрешимо ли оно. Во второй части было дано конкретное уравнение над циклической группой и предлагалось выяснить, разрешимо ли оно. По поводу второй части Давид Ионович сказал мне, что возможно стоит попробовать решить это уравнение в какой-нибудь конкретной группе. Именно так я и поступил — решил уравнение в группе подстановок. Мое решение Давида Ионовича очень обрадовало. К сожалению в студенческие годы мне не удалось получить другие значимые результаты по уравнениям над группами.

Как раз в это время Д. И. Молдаванский начинал читать свой спецкурс, который назывался "Финитная аппроксимируемость и свободные конструкции групп". На этом спецкурсе Давид Ионович не только рассказывал об известных результатах, но и ставил научные задачи. Он пред-

© Азаров Д. Н., 2015

¹Ивановский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, 153025 Иваново, ул. Ермака 39, Россия. E-mail: azarovdn@mail.ru.

ложил мне заняться одной из них. Задача оказалась мне по силам, и я под руководством Давида Ионовича продолжил заниматься изучением финитной аппроксимируемости групп.

О своем учителе могу сказать следующее. Вся научная и педагогическая деятельность Д. И. Молдаванского связана с кафедрой алгебры и математической логики и с математическим факультетом Ивановского государственного университета (ранее, педагогического института), на который он поступил в 1958 году. В студенческие годы его научные интересы формировались под влиянием Ивановской алгебраической школы, созданной на кафедре Анатолием Ивановичем Мальцевым. После отъезда Анатолия Ивановича в Новосибирский Академгородок в 1960 году, на кафедре остались работать его ученики, в том числе Дмитрий Матвеевич Смирнов. В том же 1960 году по приглашению Мальцева к работе на кафедре приступил Мартин Давидович Гриндлингер, за два года до этого приехавший из США. Гриндлингер принадлежит к совсем другой алгебраической школе и является учеником В. Магнуса — одного из основателей комбинаторной теории групп. Сфера его научных интересов в то время была связана с особым направлением комбинаторной теории групп, которое называется теорией малых сокращений.

В 1964 Д. И. Молдаванский поступил в аспирантуру к Гриндлингеру и почти сразу заявил, что теория малых сокращений его не совсем привлекает. Дело в том, что к этому времени Давид Ионович познакомился с некоторыми другими направлениями алгебры вообще и теории групп в частности. Это знакомство стало возможным благодаря таким представителям школы А.И. Мальцева как Д.М. Смирнов и его ученик А.И. Черемисин. Как рассказывает Давид Ионович, Гриндлингер с пониманием и уважением отнесся к его заявлению, предложил самому выбрать тему исследований, и для этого передал несколько статей по комбинаторной теории групп. Среди них была обзорная статья американского алгебраиста Г. Баумслэга, опубликованная в 1964 году и посвященная группам с одним определяющим соотношением. В этой статье говорилось, в частности, о двух классических результатах Магнуса для групп с одним соотношением. Первый из них — это теорема о свободе, а второй — теорема об алгоритмической разрешимости проблемы слов. В конце обзора приводились нерешенные проблемы, в частности, ставился вопрос об описании абелевых подгрупп групп с одним соотношением.

Этому вопросу была посвящена одна из первых научных работ Д.И. Молдаванского "О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением" опубликованная в Сибирском математическом журнале (т. 8, вып. 6) в 1967 году. Он доказал, что любая абелева подгруппа группы с одним соотношением является либо конечной циклической, либо свободной абелевой ранга 2, либо группой без кручения ранга 1. Этот результат

докладывался в 1966 году на Международном конгрессе математиков в Москве. В то время Давид Ионович еще не знал, что его работа является очень важным достижением в теории групп с одним соотношением. Это стало понятно позднее, когда последовали многочисленные ссылки на его работу.

Открытие, сделанное Д. И. Молдаванским, было связано не с самим результатом об абелевых подгруппах групп с одним соотношением, а с методом его доказательства. Доказательство было основано на замеченной Давидом Ионовичем связи между группами с одним соотношением и HNN-расширениями. Эта связь состоит в следующем. Если группа G задается одним определяющим словом R , которое содержит хотя бы два порождающих, и в слове R сумма показателей по одному из порождающих равна 0, то группа G является HNN-расширением группы, заданной одним определяющим словом, которое короче чем R .

С помощью этого утверждения были получены более короткие и более простые доказательства ряда классических результатов о группах с одним определяющим соотношением, включая упомянутые теоремы Магнуса. Это было сделано в работах П. Шуппа, Дж. МакКулла и ряда других авторов. С тех пор практически во всех исследованиях групп с одним соотношением используется конструкция HNN-расширения, т.е. метод Д. И. Молдаванского.

Следующая его научная работа была связана с алгоритмическими проблемами. К числу таких проблем, как известно, относятся проблема равенства элементов, проблема сопряженности элементов, а также более сложная проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. К тому времени первые две проблемы уже были в какой то степени изучены для свободных конструкций групп. Например, для свободных групп проблемы равенства и сопряженности элементов решаются тривиально. Давиду Ионовичу удалось получить значительно более глубокий результат для свободных групп, который он опубликовал в журнале "Алгебра и логика" в 1969 году. Он доказал, что в свободных группах алгоритмически разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. Вопросы алгоритмической разрешимости этой проблемы для различных свободных конструкций до сих пор исследуются, например, в работах Владимира Николаевича Безверхнего и его учеников. В дальнейшем Д. И. Молдаванскому удалось усилить свой результат следующим образом: любая свободная группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп. Напомню, что связь финитной аппроксимируемости групп относительно различных предикатов с разрешимостью соответствующих алгоритмических проблем была обнаружена еще А.И. Мальцевым. В этом состоит одна из причин, объясняющих важность изучения свойства финитной аппроксимируемости для комбинаторной теории групп.

Почти сразу после защиты кандидатской диссертации (в 1968 году) Д. И. Молдаванский включился в работу по подготовке аспирантов, считая эту деятельность чрезвычайно важной как для математической науки вообще, так и для математического факультета в частности. Его первый аспирант Александр Петрович Горюшкин доказал вложимость произвольной счетной группы в 2-порожденную простую группу, и тем самым ответил на вопрос, поставленный Ф. Холлом. Он получил также ряд результатов об уравнениях над группами и о свободных произведениях групп.

Следует отметить, что не все ученики Давида Ионовича занимались исключительно теорией групп. Например, Лев Михайлович Шнеерсон занимается теорией полугрупп. Его кандидатская диссертация называлась "Тождества в конечно определенных полугруппах". В том же направлении работал и Анатолий Иванович Зимин — аспирант Давида Ионовича, являющийся также и учеником Льва Михайловича.

Давид Ионович застал то время, когда комбинаторная теория групп формировалась как самостоятельная наука. Он принимал участие в переводе на русский язык фундаментальной книги Магнуса Карраса и Солитэра, которая является первой в мировой литературе монографией по комбинаторной теории групп.

Одно из важных направлений этой теории связано с изучением уравнений над группами. Напомню, что уравнение над группой G имеет вид $w(x) = 1$, где $w(x)$ можно интерпретировать как элемент свободного произведения группы G и бесконечной циклической группы, порожденной элементом x . Уравнение $w(x) = 1$ называется разрешимым над группой G , если существует гомоморфизм данного свободного произведения на некоторую группу, инъективный на G и переводящий $w(x)$ в единицу. Естественно всегда предполагать, что элемент $w(x)$ не сопряжен ни с каким элементом из G . Из теоремы Магнуса о свободе следует, что над свободной группой любое уравнение разрешимо. В 80-е годы прошлого века существенные результаты были получены по двум нетривиальным задачам, связанным с разрешимостью уравнений над группами: первая состоит в описании всех таких групп, над которыми разрешимо любое уравнение, а вторая состоит в описании всех таких уравнений, которые разрешимы над любой группой. Были сформулированы и соответствующие гипотезы 1) над группой без кручения любое уравнение разрешимо и 2) любое степенное уравнение разрешимо над любой группой. Обе гипотезы до сих пор остаются неразрешенными. По первой из них заметное продвижение принадлежит ученику Давида Ионовича Сергею Давидовичу Бродскому, доказавшему знаменитую теорему о разрешимости произвольного уравнения над любой локально индикательной группой (результат опубликован в 1984 году). По второй существенных результатов добился Владимир Николаевич Егоров — ученик Д.И. Молдаванского (в настоящее время рек-

тор Ивановского государственного университета). Владимир Николаевич доказал разрешимость степенных уравнений при определенных дополнительных ограничениях. Как говорит Давид Ионович, результаты Бродского и Егорова до сих пор никому улучшить не удалось. Владимиру Николаевичу Егорову принадлежит также существенное продвижение в связи со следующей (недавно доказанной Д. Вайсом) гипотезой Г. Баумслага: любая группа с одним определяющим соотношением, имеющая кручение, финитно аппроксимируема.

Понятие финитно аппроксимируемой группы было введено А. И. Мальцевым еще в 1940 году в его знаменитой статье "О представлении бесконечных групп матрицами". Об этом свидетельствуют Магнус и Чандлер в своей монографии по истории комбинаторной теории групп. Напомню, группа называется финитно аппроксимируемой, если для каждого ее неединичного элемента существует гомоморфизм этой группы на некоторую конечную группу, при котором образ данного элемента отличен от 1. Исторически одним из первых примеров финитно аппроксимируемых групп являются полициклические группы. Их финитная аппроксимируемость была установлена К. Гиршем в середине прошлого века. Ремесленников доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Кроме того, для каждого простого числа p любая полициклическая группа почти аппроксимируема конечными p -группами, т.е. содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую конечными p -группами. Этот классический результат принадлежит Альфреду Львовичу Шмелькину. При этом совершенно не ясно, в каких терминах для полициклических групп может быть охарактеризовано свойство аппроксимируемости конечными p -группами. Важный подкласс в классе полициклических групп составляют сверхразрешимые группы. Для них свойство аппроксимируемости конечными p -группами полностью исследовано. Это сделано в совместной работе Давида Ионовича и автора настоящей статьи. Кроме того, нам удалось для сверхразрешимых групп изучить и свойство аппроксимируемости конечными p -группами относительно сопряженности.

Начиная с 90-х годов, Д.И. Молдаванским и возглавляемым им научным коллективом, состоящим из преподавателей, аспирантов и студентов ИвГУ, проводились интенсивные исследования финитной аппроксимируемости и других аппроксимационных свойств свободных конструкций групп — обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Исследования в этом направлении, начатые в США более пятидесяти лет тому назад, до сих пор привлекают внимание многих специалистов в области теории групп. Систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп было начато Г. Баумслагом, которым была разработана "методика" исследований в этом направлении. В уже упомянутом выше спецкурсе Давид Ионович усовершенствовал ме-

тодику Баумслага — распространил ее с финитной аппроксимируемости на аппроксимируемость конечными p -группами, и применил ее не только к обобщенным свободным произведениям, но и к HNN-расширениям. Спецкурс постоянно совершенствовался, в нем ставились научные проблемы и задачи, многие из которых в дальнейшем были решены Д.И. Молдаванским и его учениками.

В настоящее время Давид Ионович работает над монографией по материалам этого спецкурса. На спецкурсе выросло уже не одно поколение исследователей. Среди них — ученики Давида Ионовича, поступившие в аспирантуру в 90-е и в 2000-е годы. Все они по преимуществу занимаются аппроксимационными свойствами свободных конструкций групп. К их числу принадлежат Е.Д. Логинова (аспирантка В.Н. Егорова), Е.В. Соколов, Е.А. Туманова, а также мой ученик А.В. Розов. Все они работают в настоящее время на факультете математики и компьютерных наук ИвГУ. Учениками Давида Ионовича также являются Е.А. Иванова, О.Е. Сенкевич, а также Д. Тьеджо — гражданин Камеруна (они покинули стены нашего университета). Давид Ионович участвует в научной судьбе каждого из своих учеников, независимо от того, являются они в данный момент его аспирантами, или уже давно стали самостоятельными исследователями. Он щедро делится своими идеями и гипотезами с учениками, проявляет в отношениях с ними большую заботу и внимание.

Д. И. Молдаванский возглавляет научно-исследовательский семинар по теории групп. На семинаре происходит тщательная проверка всех представляемых научных результатов. При этом особое внимание уделяется подробным доказательствам полученных результатов, и поэтому многие доклады занимают несколько заседаний семинара. Высокие требования предъявляет Давид Ионович к оформлению научных работ, и вообще любых математических текстов. Он говорит, что оформление научной работы может занять даже больше времени, чем получение самих научных результатов, излагаемых в работе. Научные статьи Д. И. Молдаванского отличаются особой глубиной, четкостью и продуманностью изложения. Все они написаны с большим уважением к читателю. То же самое можно сказать и о замечательных учебных пособиях, написанных Давидом Ионовичем для студентов и аспирантов. Среди них — совершенно уникальное учебное пособие по теории полей, которое он написал по материалам своих лекций.

К числу учеников Давида Ионовича относятся, конечно, не только его аспиранты, но и огромное количество студентов, написавших свои выпускные работы под его руководством. В свое время он установил достаточно высокую планку для дипломных работ — работа заслуживает высокой оценки только в случае, если полученные в ней результаты достойны публикации. Многие результаты, полученные в дипломных работах под руко-

водством Давида Ионовича, были опубликованы. Это конечно не означает, что все его выпускники в дальнейшем стали специалистами в области теории групп. Но многие из них стали замечательными учителями математики благодаря тому, что в студенческие годы им посчастливилось приобщиться к науке благодаря Давиду Ионовичу.

В 2006 году Д.И. Молдаванский в диссертационном совете при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова защитил диссертацию на тему "Аппроксимационные свойства HNN-расширений групп и групп с одним определяющим соотношением" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В связи с этим отметим несколько результатов Давида Ионовича, относящихся к HNN-расширениям групп.

В 1992 году в "Украинском математическом журнале" им опубликован критерий финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения, который лежит в основе доказательств целого ряда результатов. Этот критерий формулируется следующим образом. Пусть f — изоморфизм группы G на ее подгруппу H , и пусть $G(f)$ — HNN-расширение группы G , соответствующее изоморфизму f . Группа $G(f)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных f -совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой. Здесь под f -совместимой подгруппой понимается подгруппа V группы G такая, что образ V относительно f совпадает с пересечением подгрупп V и H . Этот критерий является фильтрационным, и он не дает ответа на вопрос о том, будет ли то или иное конкретное нисходящее HNN-расширение финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, с помощью этого критерия могут быть доказаны многие известные к настоящему времени теоремы, утверждающие финитную аппроксимируемость того или иного нисходящего HNN-расширения, например, следующий хорошо известный результат Д. Вайса: нисходящее HNN-расширение полициклической группы финитно аппроксимируемо. Мне удалось внести свой небольшой вклад в исследования нисходящих HNN-расширений на основе критерия Давида Ионовича. Я размышлял над тем, как можно обобщить теорему Вайса, и здесь мне на помощь пришел результат Альфреда Львовича Шмелькина о почти аппроксимируемости конечными p -группами полициклических групп. Мне удалось в теореме Вайса ослабить требование полициклическости базовой группы HNN-расширения до требования ее почти аппроксимируемости конечными p -группами для всех достаточно больших простых p . Получился довольно общий результат, который обобщает несколько известных к настоящему времени теорем о финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений. В основе его доказательства лежит упомянутый выше критерий Д. И. Молдаванского.

Наряду с финитной аппроксимируемостью HNN-расширений изучается также их аппроксимируемость конечными p -группами. Большинство результатов, полученных в последнее время в данном направлении, основаны на доказанном Давидом Ионовичем критерии аппроксимируемости конечными p -группами HNN-расширения конечной p -группы. Важными примерами HNN-расширений являются так называемые группы Баумслага — Солитэра, представляющие собой HNN-расширения бесконечных циклических групп. Среди этих групп в свое время были найдены первые примеры групп с одним соотношением, не являющихся финитно аппроксимируемыми. Ряд нетривиальных и очень глубоких результатов Давида Ионовича посвящен различным аппроксимационным свойствам групп Баумслага — Солитэра. Некоторые из этих результатов получены им совсем недавно.

Давид Ионович для нас — не только замечательный ученый и преподаватель, но еще и организатор. Возглавляя кафедру алгебры и математической логики на протяжении четырех десятков лет, он создал на ней активно и плодотворно работающий научно-педагогический коллектив. Человеческие качества Давида Ионовича вызывают огромное уважение и признательность у коллег и учеников.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

УДК 512.543

В. Н. Безверхний¹, Н. Б. Безверхняя²

Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина и Кокстера

Ключевые слова: группа, проблема равенства, проблема сопряженности, группы Артина, группы Кокстера.

Keywords: the group, the problem of equality, the problem of conjugate, Artin groups, Coxeter groups.

Группа Артина G задается системой образующих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и системой определяющих соотношений $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ слово длины m_{ij} , состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j , m_{ij} – числа симметрической матрицы Кокстера, соответствующей данной группе: $m_{ij} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$.

Копредставление группы G имеет вид: $G = \langle a_1, \dots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}; i, j \in \overline{1, n} \rangle$.

Добавляя к соотношениям группы G соотношения $a^2 = 1$, $i, j \in \overline{1, n}$ получим копредставление группы Кокстера.

Группа Артина называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера конечна. В этом классе групп Э. Брискорном и К. Сайто были решены проблемы равенства и сопряженности слов [1]. К. Апелем и П. Шуппом [2] были определены группы Артина большого типа, для которых $m_{ij} \geq 3$ и группы Артина экстрабольшого типа, для которых $m_{ij} > 3$. В [2] ими была доказана разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в классе групп Артина и Кокстера экстрабольшого типа.

© Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., 2015

¹Академия гражданской защиты МЧС России, 141435 Московская область, г. Химки, мкрн. Новогорск, Россия. E-mail: vnbezv@rambler.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-41-03222 p_центр_a).

²Академия гражданской защиты МЧС России, 141435 Московская область, г. Химки, мкрн. Новогорск, Россия. E-mail: vnbezv@rambler.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-41-03222 p_центр_a).

В группах Артина большого типа К. Апеллем [9] и независимо В. Н. Безверхний [4] была доказана разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов.

Группам Артина (Кокстера) с образующими $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ можно поставить в соответствие конечный граф Γ , вершинам которого соответствуют образующие a_i , а каждому ребру, соединяющему a_i и a_j – соотношение $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$, других ребер нет. Если граф Γ есть дерево-граф, то соответствующая группа Артина (Кокстера) называется группой Артина (Кокстера) с древесной структурой. В этом классе групп $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$ [5].

Доказано [6], что в группах Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

Рассмотрим группы Артина (Кокстера), соответствующий граф которых состоит из n - угольников, $n \geq 3$. Назовем такие группы группами Артина (Кокстера) с n -угольной структурой. Элементы матрицы Кокстера таких групп удовлетворяют условиям: $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$. В дальнейшем будем рассматривать группы Артина (Кокстера) с n -угольной структурой для $n > 3$.

Каждую группу Артина $G = \langle a_1, \dots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n} \rangle$, можно задать копредставлением $G_{ij} = \langle a_i, a_j \mid R_{ij} \rangle$, где R_{ij} – множество всех нетривиальных циклически несократимых в свободной группе $\langle a_i, a_j \rangle$ слов равных единице в группе G_{ij} . Тогда копредставление группы G на образующих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ можно записать $G = \langle A \mid R \rangle$, где $R = \bigcup_{1 \leq i < j} R_{ij}$.

Обозначим через $|w|$ длину слова в свободной группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, а через $\|w\|$ – словарную длину в свободном произведении бесконечных циклических групп: $F = \prod_{i=1}^n * \langle a_i \rangle$.

Лемма 1.[2] *Если $w \in G_{ij}$, w – нетривиальное слово в свободной группе и w равно единице в группе G_{ij} , то $\|w\| \geq 2m_{ij}$.*

Пусть w циклически приведенное слово не равное единице в группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $w \in \langle R \rangle^F$. Тогда из теоремы Ван-Кампена следует, что существует R -диаграмма с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w , а метками областей – слова из R_{ij} , $1 < i < j < n$.

Выполним следующие преобразования в M :

(а) если области $D^1, D^2 \in M$, $\phi(D^1)$ и $\phi(D^2)$ принадлежат одной подгруппе G_{ij} и $\|\phi(\partial D^1 \cap \partial D^2)\| \geq 1$, то области D^1, D^2 объединяем в одну область D , произведя свободные сокращения в слове на границе области D , которая и будет новой меткой этой области;

(б) если метка области D равна единице в $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то область D вырезаем, а ее границу склеиваем.

Через конечное число шагов получим диаграмму, инвариантную относительно указанных преобразований, причем в полученной диаграмме, если две области D^1, D^2 пересекаются, то $||\Phi(\partial D^1 \cap \partial D^2)|| = 1$. Такая R -диаграмма называется приведенной.

Лемма 2. *Односвязная приведенная R -диаграмма группы Артина с n -угольной структурой при $n > 3$ удовлетворяет условиям $C(4)$ & $T(4)$.*

Определение 1.[7] Граничную область D R -диаграммы M назовем простой, если $\partial M \cap \partial D$ есть правильная часть граничного цикла ∂M .

Определение 2. Простая область $D \subset M$ называется деновской, если $i(D) < 2$, ($i(D)$ - внутренняя часть области D).

Деновским сокращением диаграммы M называется удаление граничного пути $\partial M \cap \partial D$ деновской области D .

Диаграмма M , не содержащая деновских областей, называется R -приведенной. Граничные области приведенной односвязной диаграммы M группы Артина с n -угольной структурой, $n > 3$, удовлетворяют неравенству $\sum (3 - i(D)) \geq 4$. [7]

Определение 3.[8] Пусть M - приведенная односвязная R -диаграммы с n -угольной структурой, $n > 3$, тогда последовательность граничных областей $D_1, D_2, \dots, D_n, n \geq 2$ образуют полосу $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$, если:

- 1) $\forall i, 1 \leq i \leq n, \partial D_i \cap \partial M$ - правильная часть M_i ;
- 2) $\forall i, 1 \leq i \leq n - 1$ границы областей D_i, D_{i+1} пересекаются по ребру, а $D_n \cap D_1$ - пустое множество;
- 3) $i(D_1) = i(D_n) = 2, \forall j, 2 < j < n, i(D_j) = 3$.

Удаление границы полосы $\partial M \cap \partial \Pi$ называется специальным R -сокращением и обозначается $\bar{R}$.

Лемма 3. *Если M - приведенная односвязная R -диаграмма группы Артина с n -угольной структурой, не содержащая деновских областей, то M содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Лемма 4. Пусть $G_{ab} = \langle a, b | \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$ группа Артина, $m_{ab} \geq 2$; в G_{ab} разрешимы следующие проблемы:

- 1) проблема равенства и сопряженности слов [2];
- 2) проблема вхождения в конечно порожденную подгруппу [4];
- 3) для любого нетривиального в свободной группе $\langle a, b \rangle$ слова $w \in G_{ab}$ можно эффективно установить, существуют ли целые числа m и n такие, что $w = a^m b^n$, либо $w = b^m a^n$ [4];
- 4) для любого нетривиального в свободной группе $\langle a, b \rangle$ слова $w \in G_{ab}$ можно эффективно установить существуют ли целые числа m, n и s

такие, что в G_{ab} $w = a^m b^n a^s$, либо $w = b^m a^n b^s$ причем, если такой кортеж существует, то он единственен [3].

Лемма 5.[4] *Существует алгоритм, позволяющий для любых циклических подгрупп $\langle w \rangle, \langle v \rangle$ из G_{ab} найти их пересечение.*

Лемма 6.[4] *Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G_{ab}$ и любых циклических подгрупп $\langle u \rangle, \langle v \rangle$ группы G_{ab} установить пусто или не пусто пересечение $w\langle u \rangle \cap \langle v \rangle$.*

Лемма 7.[4] *Если в группе G_{ab} имеет место равенство $z^{-1}x^mz = y^n$, $x, y \in \{a, b\}$ для некоторого $z \in G_{ab}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то $n = m$.*

Теорема 1. *В группе Артина с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема равенства слов.*

Действительно, выполняя R и $\bar{R}$ -сокращения, то есть, выделяя в граничном цикле $\varphi(\partial M)$ деновские области и полосы, при R и $\bar{R}$ -сокращениях, слоговая длина $\varphi(\partial M)$ уменьшается и через некоторое конечное число шагов выясняем равно ли w единице.

Теорема 2. *В группах Артина с n -угольной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

При доказательстве используются кольцевые диаграммы.[7]

Пусть M – диаграмма сопряженности слов $w, v \in G$, γ и δ ее граничные циклы, где $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v$.

Устанавливается структура кольцевой диаграммы. Предполагаем, что $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)R$ и $\bar{R}$ несократимы, M – приведенная диаграмма. Если M – k -слойная, то есть любые два соседних слоя имеют общий граничный цикл, то все внутренние области состоят из областей D с $\partial(D) = 4$. Внутренние граничные циклы имеют равную слоговую длину, и каждый из циклов является некоторой перестановкой фиксированного набора из N слогов.

Пусть $w \in G$, рассмотрим разбиение w на подслова $w = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$, где каждое Δ_j не равно единице в G и является словом некоторой подгруппы G_{ab} , причем любые два Δ_i, Δ_{i+1} содержатся в разных подгруппах G_{ab} . Такое разбиение слова w назовем Δ -разбиением и обозначим w_Δ . Если Δ_1 и Δ_s содержатся в разных подгруппах, то слово w назовем Δ -циклически несократимым.

Лемма 8. *Если каждая граничная область D кольцевой диаграммы M имеет $i(D) = 3$, то M имеет число слоев ≤ 2 .*

Если диаграмма сопряженности слов w и v является однослойной, и все Δ -подслова слов w и v имеют слоговую длину более трех, то в этом случае, рассматривая циклические перестановки слова w_Δ , обозначенную как w_Δ^* , и используя леммы 5-7 строим сопрягающее слово z , которое должно

быть степенью некоторого образующего, принадлежащего той же подгруппе G_{ab} , которой принадлежит начальное Δ -подслово слова w_{Δ}^* .

Случай $k = 2$ тривиален.

Если диаграмма сопряженности слов w и v является k -слойной $k > 2$, то определяем параметр p диаграммы M [3] и строим последовательность слов $w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ где каждое последующее получается из предыдущего сопряжением некоторой степенью образующего с показателем не большим p .

Из структуры диаграммы следует, что данная последовательность конечна. На каждом таком шаге выясняем, равно ли w_i слову v либо его циклической Δ -перестановке.

Теорема 3. *В группах Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема равенства и сопряженности слов.*

Определение 4. В группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух наборов слов $\{w_i\}, \{v_i\}, i = \overline{1, n}$, установить существует ли $z \in G$, такой, что $\&_{i=1}^n (z^{-1}w_i z = v_i)$.

Теорема 4. *В группах Артина (Кокстера) с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 5. *Существует алгоритм, позволяющий в группах Артина (Кокстера) с n -угольной структурой, $n > 3$, для любых слов w и v установить существуют ли $n, m \in \mathbb{N}$ и $z \in G$ такие, что $z^{-1}w^n z = v^m$.*

Литература

1. Брискорн Э., Сайто К. *Группы Артина и группы Кокстера* // Математика. 1974. Т. 18, № 6. С. 56–79.
2. Appel K., Schupp P. *Artin groups and infinite Coxeter groups* Invent. Math. 1984. V. 72. P. 210–220.
3. Безверхний В. Н. *Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа* // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1–39.
4. Безверхний В. Н. *Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа* // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1986. С. 26–61.
5. Безверхний В. Н. *О группах Артина, Кокстера с древесной структурой* // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения: тезисы докладов V Международной конференции. Тула, 2003. С. 33–34.
6. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. *Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой* // Известия ТулГУ. Сер.: Математика, Механика, Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 67–82.
7. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп*. М., 1980.

8. Безверхний В. Н. *О нормализаторах элементов в $C(p)$ & $T(q)$ – группах* // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1994. С. 4–58.

9. Appel K. *On Artin groups and Coxeter groups of large type*. Contempor. Math. 1984. V. 33. P. 50–78.

10. Безверхний В. Н. , Безверхняя Н. Б. *Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина экстрабольшого типа* // Абелевы группы. Международный симпозиум, посвященный 100-летию Л. Я. Куликова: тезисы докладов. М., 2014. С. 14–16.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

УДК 512.543

В. Н. Безверхний¹, Е. С. Логачева²

О разрешимости проблемы степенной сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с объединением

Ключевые слова: группа, подгруппа, проблема сопряженности, свободное произведение с объединением, HNN-расширение.

Keywords: the group, the subgroup, the problem of conjugate, free product with amalgamation, HNN-extension.

Рассмотрим конечный дерево-граф Γ . Каждой его вершине v_i поставим в соответствие бесконечную циклическую группу $\langle a_i \rangle$, причем, если вершинам некоторого ребра графа Γ соответствуют образующие a_i, a_j , то самому ребру соответствуют объединяемые подгруппы $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle, \langle a_j^{p_{ji}} \rangle$ и соотношение $a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}}$. Тогда группа G_Γ , соответствующая графу Γ , называется древесным произведением циклических групп с объединением.

Копредставление группы G_Γ имеет вид

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^n * \langle a_k \rangle | a_i^{p_{ij}} = a_j^{p_{ji}}, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty, \rangle$$

где $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle a_j^{p_{ji}} \rangle$ – объединяемые подгруппы.

Определение 1. В группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h = w_2$.

Теорема 1. [1,2] В группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.

Рассмотрим HNN-расширение группы G_Γ с помощью конечной системы правильных проходных букв $t_1, t_2, \dots, t_m$:

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, \dots, t_m | rel(G_\Gamma), t_{ik}^{-1} a_{i_0}^{p_{i_0 k_0}} t_{ik} = a_{k_0}^{p_{k_0 i_0}} \rangle,$$

© Безверхний В. Н., Логачева Е. С., 2015

¹ Академия гражданской защиты МЧС России, 141435 Московская область, г. Химки, мкрн. Новогорск, Россия. E-mail: vnbezv@rambler.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-41-03222 р_центр_a).

² Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого, факультет математики, физики и информатики, 300026 Тула, пр. Ленина 125, Россия. E-mail: logacheva-es@mail.com. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-41-03222 р_центр_a).

где $\langle a_{i_0}^{p_{i_0 k_0}} \rangle$ и $\langle a_{k_0}^{p_{k_0 i_0}} \rangle$ – ассоциированные подгруппы, причем $\langle a_{i_0}^{p_{i_0 k_0}} \rangle < \langle a_i \rangle$, $\langle a_{k_0}^{p_{k_0 i_0}} \rangle < \langle a_k \rangle$, a_i, a_k – образующие группы G_Γ .

Определение 2. Пусть $w \in \overline{G}_\Gamma$. Проекцией w_t слова w на множество $\{t_1^\varepsilon, t_2^\varepsilon, \dots, t_k^\varepsilon | \varepsilon = \pm 1\}$ называется слово, получаемое из w вычеркиванием слогов группы G_Γ .

Лемма 1. Пусть имеет место равенство $w^{-1}a_{i_0}^M w = a_{i_0}^N$, где $a_{i_0}^M \in \langle a_{i_0}^{p_{i_0 k_0}} \rangle$, $w \in \overline{G}_\Gamma$. Элементы $a_{i_0}^M$ и $a_{i_0}^N$ сопряжены в группе $\overline{G}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда они сопряжены элементом w_t .

Лемма 2. Если имеет место равенство $t_j^{-1}t_i^{-1}a_{i_0}^{M_1}t_it_j = a_{i_0}^{M_2}$, то справедливо следующее равенство $t_i^{-1}t_j^{-1}a_{i_0}^{M_1}t_jt_i = a_{i_0}^{M_2}$.

Следствие 1. Если $t_i^\varepsilon t_j^\nu a_{i_0}^{M_1} t_j^{-\nu} t_i^{-\varepsilon} = a_{i_0}^{M_2}$, $\varepsilon, \nu = \pm 1$, то $t_j^\nu t_i^\varepsilon a_{i_0}^{M_1} t_i^{-\varepsilon} t_j^{-\nu} = a_{i_0}^{M_2}$.

Лемма 3. Если $w_t^{-1}a_{i_0}^{M_1}w_t = a_{i_0}^{M_2}$, то в качестве w_t можно взять свободно несократимое слово в свободной группе $\langle t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$ и расположить индексы проходных букв в порядке возрастания.

Лемма 4. Для любых двух элементов $a_{i_0}^M, a_{i_0}^N$, принадлежащих некоторой ассоциированной подгруппе группы $\overline{G}_\Gamma$, существует алгоритм, позволяющий установить, сопряжены они или нет.

Теорема 2. В группе $\overline{G}_\Gamma$ разрешима проблема сопряженности слов.

Доказательство теоремы 2 следует из вышеуказанных лемм и леммы Колинза [3] для HNN-расширения древесного произведения циклических групп с объединением, устанавливающей сопряженность циклически несократимых слов w, v слоговой длины больше 1.

Определение 3. В группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $w_1, w_2 \in G$ установить, существуют ли $m, n \in \mathbb{N}$ и элемент $h \in G$ такие, что $h^{-1}w_1^m h = w_2^n$.

Теорема 3. Существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $w_1, w_2 \in \overline{G}_\Gamma$, $\|w_1\|, \|w_2\| \geq 2$ ($\|w_1\|, \|w_2\|$ – слоговая длина слов w_1, w_2), установить, существуют ли $m, n \in \mathbb{N}$ и элемент $h \in \overline{G}_\Gamma$ такие, что $h^{-1}w_1^m h = w_2^n$.

Литература

1. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 1. С. 43–54.
2. Логачева Е. С. Теорема Магнуса для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Междунар. конф., Тула, 25–30 мая 2015. Тула : Из-во Тул. гос пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2015. С. 84–87.
3. Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 2. С. 50–65.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Н. В. Безверхний¹

Описание классов сопряженности в группах с условиями малого сокращения $C(3) - T(6)$

Введение

В комбинаторной теории групп широко известен класс задач, состоящих в построении алгоритмов, решающих проблемы равенства слов, сопряженности слов, вхождения элемента в данную подгруппу, и другие. Но есть и задачи, состоящие в описании структуры подгрупп данной группы, описании системы образующих подгруппы. В данной работе дается описание всего класса сопряженности фиксированного элемента группы $G = (X; R)$ с условиями малого сокращения $C(3) - T(6)$. Решить эту задачу удастся не для любого элемента группы G , а для одного из двух типов, на которые можно разбить все слова в образующих X группы G .

Для задания группы G используем копредставление $G = (X; R)$, где множество X – образующие элементы группы G , а множество R – определяющие соотношения на этих образующих.

Рассматриваемый в этой работе класс групп с условиями малого сокращения $C(3) - T(6)$ относится к классам с неметрическими условиями малого сокращения $C(p) - T(q)$. Указанные неметрические условия малого сокращения характеризуются тем, что два разных определяющих соотношения в копредставлении $(X; R)$ не могут иметь общее начало, с длиной, превышающей определенную часть длин обоих соотношений. С метрическими условиями малого сокращения $C'(p)$ можно познакомиться в книгах [1, 2, 3].

Следует отметить, что задача описания класса сопряженности в $C(3) - T(6)$ -группе была сформулирована и решена параллельно с другими, близкими к ней алгоритмическими проблемами, возникающими в классе групп с условиями малого сокращения. Перечислим их.

Разрешимость проблемы сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в классе групп с условиями $C(3) - T(6)$ доказана в статье [7]. А именно, в статье [7] доказывается алгоритмическая разрешимость следующей задачи: по данным словам v, w в алфавите X группы $G = (X, R)$ с условиями $C(3) - T(6)$ выяснить, существуют ли целое число n и слово z

в алфавите X , для которых в группе G выполнено равенство $v = z^{-1}w^n z$. При этом предъявляется алгоритм нахождения числа n , а существование слова z только проверяется. Задача нахождения слова z в статье [7] не ставилась.

Интерес представляет не только определение показателя n , но и слова z . Этому посвящена работа [15]. При решении перечисленных задач используется диаграммный метод комбинаторной теории групп, базирующийся на следующих двух теоремах [1, 2, 3].

Первая – лемма Ван Кампена, утверждающая, что слово равно единице в группе тогда и только тогда, когда существует односвязная диаграмма с граничной меткой, равной этому слову.

Вторая – лемма о сопряженных элементах группы, утверждающая, что слова u, v представляют сопряженные элементы данной группы тогда и только тогда, когда существует кольцевая диаграмма с граничными метками, равными u, v^{-1} .

Наибольший интерес при описании класса сопряженности представляют выводы о строении кольцевых диаграмм. В частности, их послойная периодичность, доказанная в статье [15].

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$w_1 \equiv w_2$ – слово w_1 графически равно слову w_2 ,

$w_1 = w_2$ – слова w_1 и w_2 представляют один и тот же элемент группы,

$w \sim v$ – слова представляют сопряженные элементы группы,

$|w|$ – длина слова w ,

∂D – граница области D ,

∂M – граница карты M ,

$d(v)$ – степень вершины v ,

$d(D)$ – степень области D ,

$i(D)$ – число внутренних ребер области D .

1. Кольцевые диаграммы с несократимыми граничными метками

1.1. Диаграммы и карты

Пусть E^2 – евклидова плоскость. Вершина – это некоторая точка из E^2 . Ребро – ограниченное подмножество из E^2 , гомеоморфное открытому единичному интервалу. Область – ограниченное множество, гомеоморфное открытому единичному кругу. Карта M – конечный набор попарно непересекающихся вершин, ребер и областей, удовлетворяющих следующим условиям.

1) Если e – ребро из M , то имеются вершины a и b (не обязательно различные), такие, что $\bar{e} = e \cup \{a\} \cup \{b\}$.

2) Граница ∂D каждой области D из M связна, причем для некоторых ребер $e_1, \dots, e_n$ из M имеем $\partial D = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n$.

Буква M будет использоваться также для обозначения теоретико-множественного объединения своих вершин, ребер и областей. Граница для M будет обозначаться символом ∂M . Если $\bar{e} = e \cup \{a\} \cup \{b\}$, то говорят, что a и b – концы ребра e .

Если e – ориентированное ребро, направленное от концевой точки v_1 к концевой точке v_2 , то v_1 – начальная вершина этого ребра, а v_2 – конечная вершина. Противоположным образом ориентированное ребро, обратное к ребру e , обозначается через e^{-1} и направлено от v_2 к v_1 .

Путь – это последовательность ориентированных замкнутых ребер $e_1, \dots, e_n$, такая, что начальная вершина ребра e_{i+1} – это конечная вершина ребра e_i , $1 \leq i \leq n-1$. Концы пути – это начальная вершина ребра e_1 и конечная вершина ребра e_n .

Замкнутый путь, или цикл, – это такой путь, в котором начальная вершина ребра e_1 является конечной вершиной ребра e_n .

Путь называется приведенным, если он не содержит последовательной пары ребер вида ee^{-1} . Приведенный путь $e_1 \dots e_n$ называется простым, если при $i \neq j$ начальные точки ребер e_i и e_j различны.

Если D – область из M с данной ориентацией, то любой цикл минимальной длины, включающий в себя все ребра из ∂D , в котором все ребра ориентированы в соответствии с ориентацией области D , называется граничным циклом этой области. Если M связна и односвязна, то граничный цикл для M – это цикл α минимальной длины, содержащий все ребра из границы ∂M и не имеющих самопересечений.

Для кольцевой карты M граница $\partial M = \sigma \cup \tau$ – пара граничных циклов: внешний и внутренний.

Будем считать, что граница области ориентирована по часовой стрелке, граница связной односвязной карты – против, внешняя граница кольцевой карты ориентирована против часовой стрелки, а внутренняя – по часовой стрелке.

Подпуть $\partial D \cap \partial M = p$ в граничных циклах области D и карты M называется последовательной частью границы карты M [2].

Граничной вершиной в карте M называется любая вершина, принадлежащая граничному циклу карты M . Вершины, не являющиеся граничными, называются внутренними. Внутренним ребром в карте будем считать общую часть граничных циклов двух областей, гомеоморфную отрезку и являющуюся последовательной частью границы обеих областей. Остальные ребра называются внутренними. Область D называется граничной в карте M , если в ее граничном цикле ∂D есть граничные вершины карты M , то есть $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$.

Диаграммой над группой F называется ориентированная карта M вместе с функцией метки φ , сопоставляющей каждому ориентированному ребру e карты M метку $\varphi(e)$ из F таким образом, что если e – ориентированное

ребро из M , а e^{-1} – противоположным образом ориентированное ребро, то $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1}$.

Если α – путь в M , $\alpha = e_1 \dots e_k$, то положим $\varphi(\alpha) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_k)$. Если D – область из M , то ее меткой называется элемент $\varphi(\alpha)$, где α – граничный цикл области D .

Пара областей (D_1, D_2) с общим ребром e в диаграмме M называется сократимой, если граничная метка односвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ равна единице в свободной группе F . Если в диаграмме M нет сократимых пар областей, то диаграмма M называется приведенной. Можно определить сократимую пару и в случае многосвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ [2].

Подмножество R свободной группы F называется симметризованным, если все элементы из R и их циклические перестановки приведены (то есть не содержат подслов вида xx^{-1}) и вместе с любым словом $r \in R$ все циклические перестановки элементов $r^{\pm 1}$ также лежат в R .

Пусть R – симметризованное подмножество элементов группы F . Диаграмма M называется R -диаграммой, если для любого граничного цикла δ любой области D из M имеем $\varphi(\delta) \in R$.

Пусть R – симметризованное подмножество свободной группы F и N – нормальное замыкание в F множества R . Если w – произвольный элемент из F , то $w \in N$ тогда и только тогда, когда существует связная односвязная R -диаграмма M , такая, что метка на границе карты M равна w .

Поскольку слово w представляет единичный элемент группы $G = F/N$ тогда и только тогда, когда $w \in N$, то последнее утверждение является переформулировкой приведенной выше леммы Ван Кампена.

1.2. Группы с условиями малого сокращения

Пусть группа G задана копредставлением $G = (X; R)$. Предположим, что r_1 и r_2 – различные элементы из R , такие, что r_{11} и r_{22} . В этом случае элемент b называется куском относительно множества R .

Предположения о малом сокращении состоят в том, что куски – относительно малые части элементов из R .

Условие $C(p)$. Никакой элемент из R не является произведением менее чем p кусков.

Условие $T(q)$. Пусть $3 \leq h < q$. Предположим, что $r_1, \dots, r_h$ – элементы из R , такие, что последовательные элементы r_i, r_{i+1} не являются взаимно обратными. Тогда по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ приведено.

Если v – вершина карты M , то $d(v)$ – степень вершины v – есть число неориентированных ребер, инцидентных вершине v . Если оба конца некоторого ребра e совпадают с v , мы считаем e дважды. Если D – область из M , то $d(D)$ – степень области D – есть число ребер в граничном цикле для

D . Символ $i(D)$ обозначает число внутренних ребер из D , причем снова ребро, встречающееся в граничном цикле для D дважды, считается два раза.

Ребро e называется шипом в карте M , если его концы u, v не совпадают, и для одного из них, например u , $d(u) = 1$, а для другого $d(v) > 1$. Наличие шипа в диаграмме означает, что граничная метка $\varphi(\partial M)$ содержит подслово вида xx^{-1} . Будем считать, что рассматриваемые в данной статье карты (диаграммы) не содержат шипов и вершин нулевой степени.

Пусть M – связная односвязная карта, не содержащая шипов. Граничный слой карты M состоит из всех граничных вершин, граничных ребер и граничных областей карты M вместе с их границами. Для кольцевой карты граничных слоев два: внешний и внутренний. В некоторых специальных случаях, которые будут рассмотрены ниже при классификации кольцевых диаграмм, граничный слой может оказаться единственным, или не содержащим областей.

Следующая теорема дает геометрическую интерпретацию условий $C(p)$ и $T(q)$.

Теорема 1 [2]. Пусть R – симметризованное множество элементов свободной группы F и M – приведенная R -диаграмма.

1) Если R удовлетворяет условию $C(k)$, то каждая область D из M , такая, что $\partial D \cup \partial M$ не содержит ребер, имеет степень $d(D) \geq k$.

2) Если R удовлетворяет $T(m)$, то каждая внутренняя вершина v карты M имеет степень $d(v) \geq m$.

1.3. Сокращения в $C(3) - T(6)$ -группах

В группах с условиями $C(p) - T(q)$ длина произвольного куска может быть отлична от единицы. Но если $q > 4$, то все куски имеют единичную длину [24].

Действительно, предположим, что $r_1 \equiv abr'_1$, $r_2 \equiv abr'_2$ – различные определяющие соотношения, где a, b, r_1, r_2 – непустые слова в алфавите X . Рассмотрим слова из R , обратные к r_1, r_2 и их циклические перестановки: $u_1 \equiv br'_1a$, $u_2 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$, $u_3 \equiv br'_1a$, $u_4 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$. Последовательность u_1, u_2, u_3, u_4, u_1 противоречит условию $T(6)$. Значит, общее начало ab двух определяющих соотношений из R имеет единичную длину.

Будем говорить, что в слове w есть R -сокращение [5,6,7], если существует элемент $r \in R$ такой, что:

1. $r \equiv r_1r_2$,
2. $w \equiv w_1w_2w_3$,
3. $r_1 \equiv w_2$,
4. слово r_2 либо пусто, либо является куском,
5. слова $w_1r_2^{-1}, r_2^{-1}w_3$ несократимы в свободной группе.

В случае замены слова w равным ему в группе G словом $w_1 r_2^{-1} w_3$ будем говорить, что в w выполнено R -сокращение.

R -сокращение в слове w , являющемся степенью некоторого слова v : $w = v^s$, называется длинным, если $|w_2| \geq |v|$. Если же $|w_2| < |v|$, то R -сокращение называется коротким.

Если не требуется перечисления всех образующих и определяющих слов, будем писать $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, подразумевая при этом, что в X содержатся также $x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$, а в R – все циклические перестановки и инверсии слов $r_1, \dots, r_m$.

Приведем два примера. Пусть дана группа $G = (X; R)$, где $X = \{a, b, c\}$, $R = \{abc, acb\}$. Рассмотрим слово wb . Используя определяющее соотношение $r_1 c$, заменяем в слове w подслово ab куском c^{-1} . Получаем $w = c^{-1}b$. Таким образом, мы выполнили в слове w короткое R -сокращение.

Рассмотрим теперь слово $w = v^2$, где vb , то есть $wbacb$. Используя определяющее соотношение $r_2 b$, заменяем первое вхождение acb в w пустым словом. В данном случае мы выполнили длинное R -сокращение в слове w , так как $|acb| = |v|$.

Если в любой циклической перестановке слова w нет R -сокращений, то слово w называется циклически R -несократимым.

Определим понятие $\bar{R}$ -сокращения с использованием диаграмм. Также дадим геометрическое определение R -сокращения.

Область $D \subset M$ называется дэновской [8], если

1. $\partial D \cap \partial M$ – последовательная часть границы ∂M (то есть $\partial D \cap \partial M = p$ – подпуть в граничных циклах области D и диаграммы M);
2. $i(D) \in \{0, 1\}$.

Полосой [8] в диаграмме M называется поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^k D_i$ со свойствами:

1. $\partial D_i \cap \partial M = p$ – последовательная часть границы ∂M ;
2. $\partial \Pi \cap \partial M = p$ – последовательная часть границы ∂M ;
3. при $k = 3$ $i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$, причем соседние области имеют общее ребро, а все три области полосы имеют общую вершину;
при $k > 3$, $k = 2l + 1$ $i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2l}) = i(D_{2l+1}) = 2$,
 $i(D_3) = i(D_5) = \dots = i(D_{2l-3}) = i(D_{2l-1}) = 3$,
 $i(D_4) = i(D_6) = i(D_{2l-4}) = i(D_{2l-2}) = 2$;
4. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ – ребро ($i = 1, \dots, k - 1$).

Пусть Π – полоса в диаграмме M . Граничным словом области $D_i \subset \Pi$ называется метка пути $\partial D_i \cap \partial M$, прочитанная в соответствии с ориентацией области D_i . Граничным словом полосы Π называется метка пути $\partial \Pi \cap \partial M$, прочитанная в направлении, противоположном ориентации границы ∂M .

Будем говорить, что в слове v есть R -сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует дэновская область, граничное слово которой является подсловом в v^{-1} . В слове v есть $\bar{R}$ -сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует полоса Π , граничное слово которой является подсловом в v^{-1} .

Заметим, что полоса в диаграмме M с циклически несократимой в свободной группе, циклически R -несократимой граничной меткой $\Phi(\partial M)$ является приведенной диаграммой [13].

Доказано, что для любого циклически несократимого в свободной группе слова w , не равного единице в группе G , существует циклически R -, $\bar{R}$ -несократимое слово w_0 , сопряженное с w в G [13].

1.4. Нормальные формы элементов в $C(3) - T(6)$ -группах

Легко проверить, исходя из определений R -, $\bar{R}$ -сокращений, что при выполнении любого из этих сокращений, длина слова строго уменьшается. Поэтому любое кратчайшее слово является R -, $\bar{R}$ -несократимым. Обратное, к сожалению, неверно. И тем не менее, большой интерес представляют R -, $\bar{R}$ -несократимые слова. Слова такого типа во многом определяют строение диаграмм, если являются их граничными метками.

Слово w_0 , сопряженное некоторой степени слова w в группе G и обладающее свойством R -, $\bar{R}$ -несократимости всех своих степеней, называется нормальной формой слова w .

Следующие теоремы гарантируют существование нормальных форм, но не обеспечивают их единственности.

Теорема 2 [6]. Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3) - T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически несократимо в свободной группе и циклически R -, $\bar{R}$ -несократимо. Пусть $m = \max_{r \in R} |r|$.

1) Если для некоторого $n' \in \mathbb{N}$ слово $w^{n'}$ R -сократимо, то существует $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, для которого слово w^n R -сократимо.

2) Если число m' удовлетворяет неравенствам $1 < m' \leq m$, и для некоторой циклической перестановки w^* слово $(w^*)^{m'}$ R -сократимо, причем ни при каком $m'' < m'$ в слове $(w^*)^{m''}$ нет R -сокращений, то в результате выполнения этого сокращения получается слово $w_0 = (w^*)^{m'}$ (равенство в группе G), любая степень которого R -несократима.

Теорема 3 [6]. Если слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3) - T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически $\bar{R}$ -несократимо, а все его степени w^n R -несократимы, то

если слово w^2 $\bar{R}$ -несократимо, то любая степень w^n $\bar{R}$ -несократима;
если же в слове w^2 есть $\bar{R}$ -сокращение, то либо

1) все степени слова $w_1 = w^2$ (равенство в группе G), полученного из w^2 в результате этого $\bar{R}$ -сокращения, $R, \bar{R}$ -несократимы;

либо

2) существует конечный алгоритм, строящий последовательность сопряженных в группе G слов $w, w_1, \dots, w_t$, в которой $t < |w|$, и слово w_t $R, \bar{R}$ -несократимо вместе со своими степенями.

1.5. Классификация кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками

Рассмотрим кольцевую диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cap \tau$. Предположим, что $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Рассмотрим поддиаграмму K_σ , состоящую из всех областей D , граничные циклы которых содержат вершины из σ . Назовем эту поддиаграмму K_σ -слоем диаграммы M . По сути, K_σ -слой является одним из двух граничных слоев кольцевой диаграммы. Рассмотрим диаграмму $M_1 = M \setminus K_\sigma$, полученную из M удалением слоя K_σ . Обозначим граничные циклы диаграммы M_1 через σ_1, τ . Слой K_σ является кольцевой диаграммой с непересекающимися граничными циклами σ, σ_1 .

Если $\sigma_1 \cap \tau = \emptyset$, то аналогично определяется слой K_{σ_1} с граничными циклами σ_1, σ_2 . И так далее, до тех пор, пока $\sigma_i \cap \tau = \emptyset$, определяются слои K_{σ_i} .

Пусть M кольцевая диаграмма с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, и слова $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ циклически $\bar{R}, R$ -несократимы.

В статье [8] приводится следующая классификация кольцевых диаграмм над $C(p) - T(q)$ -группами при $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$.

1. Кольцевая диаграмма M называется вырожденной, если $|M| = 0$.

2. Кольцевая диаграмма M называется простой, если ее граничные циклы σ и τ имеют непустое пересечение, и при этом $|M| > 0$, то есть M содержит хотя бы одну область.

3. Кольцевая диаграмма M называется k -слойной, если после удаления из нее k граничных слоев $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{k-1}}$ получается вырожденная диаграмма.

4. Кольцевая диаграмма M называется C - k -слойной, если после удаления из M k граничных слоев получается простая кольцевая диаграмма. Таким образом, C - k -слойная кольцевая диаграмма является объединением простой и k -слойной диаграмм, имеющих общий граничный цикл.

Следует отметить, что данная классификация имеет место только для кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками. Снятие требования несократимости граничных меток значительно усложнило бы структуру кольцевых диаграмм. Это видно из приводимых ниже определений и леммы 1.

Определение 1. Область $D \subset M$ называется простой, если множество $\partial D \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы области D .

Определение 2. Связная односвязная карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простым диском, если $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ – две вершины, и все области в M простые.

Определение 3. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется островом в M , если $M = M_1 \cup M_2 \cup p$, где p – простой подпуть в ∂M , возможно нулевой длины, не имеющий ребер в граничных циклах областей карт M_1 и M_2 и имеющий по одной вершине в циклах ∂M_1 и в ∂M_2 , $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$. Будем говорить, что M_1 – остров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Определение 4. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется полуостровом в M , если существует область $D_0 \subset M$: $M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$, $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$, причем карта $M_1 \cup M_0$ не является связной. Будем говорить, что M_1 – полуостров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Лемма 1 [7]. Пусть M – связная односвязная или кольцевая карта. Пусть s – подпуть в граничном цикле ∂M для односвязной карты M или в одном из граничных циклов σ, τ для кольцевой карты M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда если в карте M нет полос Π и дэновских областей D , для которых $\partial \Pi \cap \partial M$ – подпуть в s , и $\partial D \cap \partial M$ – подпуть в s , то в M нет островов и полуостровов на участке границы s .

Так же, как это было сделано для кольцевой диаграммы, можно определить граничные слои K_σ, K_τ для простого диска M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$.

Определение 5. Пару областей в слое K_σ (K_τ) диаграммы M , имеющих внутреннюю степень i , и имеющих общее внутреннее ребро, будем называть i -парой. При различных i, j i -пару и j -пару будем называть разноименными. Область внутренней степени i будем называть i -областью.

Лемма 2 [7]. Пусть M – простой диск. Если M – диаграмма над $C(3) - T(6)$ -группой, и граничные слои K_σ, K_τ не содержат полос и дэновских областей, то верно следующее:

1) для каждой из вершин $\{A, B\}$ в M существует единственная область D_A, D_B , соответственно, такая, что $A \in \partial D_A, B \in \partial D_B$;

2) $i(D_A) = i(D_B) = 2$;

3) слои K_σ, K_τ содержат только области внутренней степени 2 и 3, причем, в каждой из поддиаграмм $K_\sigma \setminus (D_B \cup D_A), K_\tau \setminus (D_B \cup D_A)$ областей первого типа на две больше, чем второго;

4) в слоях K_σ, K_τ могут встречаться только 2-пары и 3-пары и нет 2-троек, 3-троек, и т. д., причем, в каждом из слоев число 2-пар на 1 больше, чем 3-пар, а разноименные пары чередуются в каждом из слоев K_σ, K_τ . То же верно и для областей: в K_σ, K_τ могут встречаться только 2- и 3-области.

Из леммы 2 получаем вывод о строении простой кольцевой диаграммы с $\bar{R}$, R - несократимыми граничными метками: она является объединением простых дисков, граничные слои которых устроены, как в лемме 2.

Следующая лемма очень важна для нас. Она разделяет множество всех n -слойных диаграмм с $\bar{R}$, R - несократимыми граничными метками на два класса: содержащие 2-пары и 3-пары областей в своих граничных слоях и не содержащие таких 2-пар. Доказана периодичность диаграмм, принадлежащих первому из двух классов.

Лемма 3 [13]. Пусть M – кольцевая n -слойная диаграмма при $n > 1$ с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и граничными слоями K_σ, K_τ , не содержащими полос и дэновских областей (что эквивалентно несократимости граничных меток).

Тогда либо в граничных слоях карты M есть только отдельные 2-области и 3-области, причем они чередуются между собой, либо в граничных слоях M есть 2- и 3-пары, которые чередуются между собой, а между ними могут встречаться отдельные 2- и 3-области. При этом граничные слои не содержат 2-троек и 3-троек, 2-четверок и 3-четверок, и так далее.

Лемма 4 уточняет приведенную выше классификацию кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками: оказывается, множество таких диаграмм содержит на один тип диаграмм меньше, если ограничиться диаграммами над $C(3) - T(6)$ - группами.

Лемма 4 [13]. Не существует приведенных кольцевых C - n -слойных диаграмм, граничные метки которых $\bar{R}$, R - несократимы.

2. Кольцевые диаграммы с периодическими метками

Определение 6. Пусть M – k -слойная кольцевая диаграмма над группой $G = (X; R)$ с периодической меткой граничного цикла $\varphi(\sigma) \equiv w^n$. Будем говорить, что граничный слой K_σ является периодическим в соответствии с периодичностью граничной метки с основанием w , если он состоит из nm областей $D_1, \dots, D_{nm}$, граничные метки которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(\partial D_1) &\equiv \varphi(\partial D_{m+1}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+1}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+1}), \\ \varphi(\partial D_2) &\equiv \varphi(\partial D_{m+2}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+2}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+2}), \dots \\ \varphi(\partial D_m) &\equiv \varphi(\partial D_{2m}) \equiv \varphi(\partial D_{3m}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{nm}), \end{aligned}$$

и весь слой K_σ является объединением n односвязных поддиаграмм, каждая из которых является копией односвязной поддиаграммы, состоящей из областей $D_1, \dots, D_m$.

Очевидно, метка внутреннего граничного цикла $\varphi(\sigma_1)$ кольцевой диаграммы K_σ тоже является степенью некоторого слова w_1 : $\varphi(\sigma_1) \equiv w_1^{-n}$. Здесь показатель степени равен $-n$, поскольку внутренняя граница кольца всегда имеет ориентацию, противоположную внешней.

Лемма 5 [13]. Если приведенная диаграмма M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над $C(3) - T(6)$ - группой $G = (X; R)$ является k - слойной, граничные метки $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{2m}$ являются $\bar{R}, R$ - несократимыми, и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то все слои диаграммы M являются периодическими в соответствии с периодичностью граничной метки $\varphi(\sigma)$ с основанием w^2 .

Такая структура слоев позволяет вырезать большую часть диаграммы M , удалив из каждого слоя $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{k-1}}$ по $2(n-1)d$ областей и замкнув оставшиеся $2d$ областей в кольцо, что возможно благодаря периодичности слоев. Из k таких кольцевых слоев, содержащих по $2d$ областей склеивается кольцевая k -слойная диаграмма M_{2d} .

Приведенные рассуждения позволяют доказать следующую теорему о степенной сопряженности слов.

Теорема 4 [13]. Предположим, что слова w^n и v^m сопряжены в группе G с условиями $C(3) - T(6)$. Пусть при этом диаграмма сопряженности M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над $C(3) - T(6)$ - группой $G = (X; R)$ является k - слойной при некотором целом k , а ее граничные метки, не теряя общности рассуждений, можно считать четными степенями слов w, v : $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{2m}$. Если, кроме того, эти метки являются $\bar{R}, R$ - несократимыми, и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то существуют целые числа $a, b \leq C = 2(\max(|w^2|, |v^2|))^2$, для которых $w^a \sim v^b$ в группе G , и проверка сопряженности степеней слов w, v сводится к конечному числу применений алгоритма, проверяющего сопряженность в $C(3) - T(6)$ - группах [2].

Доказательство этой теоремы опирается на предположение о том, что граничные слои диаграммы M сопряженности слов w^n и v^m содержат 2-пары областей. Предполагая $R, \bar{R}$ - несократимость этих слов, с помощью леммы 3 приходим к выводу о том, что все слои диаграммы M содержат чередующиеся между собой 2-пары и 3-пары областей. Лемма 4 гарантирует, что диаграмма M не является C - k -слойной.

Определение 7. Предположим, что слово w обладает следующими свойствами: все его степени $R, \bar{R}$ - несократимы, и при некотором n существует n -слойная кольцевая диаграмма с граничной меткой, являющейся степенью слова w , причем граничный слой с такой меткой содержит 2-пары и 3-пары областей. Указанное свойство слова w будем называть кольцевым свойством этого слова.

Сделанное предположение о слове w обеспечивает выполнение следующего свойства кольцевых диаграмм, одна из граничных меток которых равна w^k : любая приведенная диаграмма сопряженности слова w^k и любого другого $R, \bar{R}$ - несократимого слова v^l является n - слойной, все ее слои содержат 2-пары и 3-пары областей, и диаграмма M является периодической как вдоль границы, так и по слоям.

Действительно, диаграмма M с периодическими граничными метками содержащая в своих слоях 2-пары и 3-пары областей, обладает свойством периодичности по слоям.

Лемма 6 [15]. Если приведенная кольцевая диаграмма M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над $C(3) - T(6)$ -группой $G = (X; R)$ является k -слойной, граничные метки $\varphi(\sigma) \equiv w^{-n}$, $\varphi(\tau) \equiv v^m$ являются $\bar{R}$, R - несократимыми, и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то слои диаграммы M периодически повторяются при движении от граничного цикла σ к граничному циклу τ .

Из леммы 6 следует, что можно не рассматривать k -слойные диаграммы сопряженности слов w^n и v^m с 2-парами областей при $k > |R|^t$. А поскольку слова w, v в рассматриваемой задаче равноправны, то аналогичную оценку для k можно получить в виде: $k < |R|^s$, где $s = T/m$.

3. Описание класса сопряженности с данным представителем

Теорема 5. Если слово w , представляющее элемент бесконечного порядка, обладает кольцевым свойством, то класс сопряженности с представителем w конечен, и число элементов в нем ограничено величиной $|w|^{|R|}$, где через $|R|$ обозначено количество элементов в симметризованном множестве определяющих соотношений группы G .

Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из цикличности кольцевых диаграмм, метка которых обладает кольцевым свойством.

Заметим, что для любого слова w существует нормальная форма w_0 , все степени которой $\bar{R}$, R -несократимы. При этом кольцевое свойство может не выполняться для w_0 по одной причине: кольцевая диаграмма из определения 7 может не содержать 2- и 3-пары областей. К словам такого типа теорема 5 неприменима. Для них не удастся доказать периодичность кольцевых диаграмм ни по слоям, ни вдоль границ.

Таким образом, множество всех элементов бесконечного порядка $C(3) - T(6)$ -группы G распадается на 2 класса: обладающие кольцевым свойством и не обладающие им. Для первого класса теорема 5 дает описание всех сопряженных элементов.

Для элементов конечного порядка тоже можно ввести понятие нормальной формы. Если порядок элемента больше, чем $m = \max |r|$, $r \in R$ (см. Теорему 2), то нормальная форма определяется так же, как и для элементов бесконечного порядка. И тогда применима теорема 5, описывающая весь класс сопряженных элементов.

Литература

- [1] Магнус Д., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп : пер. с англ. М. : Наука, 1974.
- [2] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп : пер. с англ. М. : Мир, 1980.

- [3] Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука, 1989.
- [4] Новиков П.С. Труды Математического ин-та АН СССР. 1955. Т. 44. С. 1–444.
- [5] Безверхний Н.В. Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$ // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 39–46.
- [6] Безверхний Н.В. Нормальные формы для элементов бесконечного порядка в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 6–25.
- [7] Безверхний Н.В. Проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$ // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 4. С. 27–46.
- [8] Безверхний В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p)$ - $T(q)$ -группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп : межвузовский сборник научных трудов. Тула : изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 1994. С. 4–58.
- [9] Безверхний В.Н., Паршикова Е.В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(4)$ - $T(4)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп : межвузовский сборник научных трудов. Тула : изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2001. С. 120–139.
- [10] Паршикова Е.В. Проблема слабой степенной сопряженности в группах с условием $C(4)$ - $T(4)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп : межвузовский сборник научных трудов. Тула : изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2001. С. 179–185.
- [11] Безверхний Н.В. О кручении ϕ и разрешимости проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$. Деп. ВИНТИ 1995, 2033-B95.
- [12] Безверхний Н.В., Чернышева О.А. Односторонние функции, основанные на проблеме дискретного логарифмирования в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$ // Наука и образование. 2014.
- [13] Безверхний Н.В. Кольцевые диаграммы с периодическими метками и проблема степенной сопряженности в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$ // Наука и образование. 2014.
- [14] Безверхний Н.В. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$ // Наука и образование. 2011.
- [15] Безверхний Н.В. Односторонние функции и композиция проблем сопряженности и дискретного логарифмирования в $C(3)$ - $T(6)$ -группах // Наука и образование. 2015.
- [16] Глухов М.М. К анализу некоторых систем открытого распределения ключей, основанных на неабелевых группах // Математические вопросы криптографии. 2010. Т. 1, № 4. С. 5–22.
- [17] Anshel I., Anshel M., Goldfeld D. An algebraic method for public key cryptography // Math/ Res/ Lett. 1999. V. 6. P. 287–291.
- [18] Koo K.H., Lee S.J., Cheon J.H., Han J.W., Kang J., Park C. New publickey cryptosystem using braide groups // CRYPTO 2000, Lect. Notes Comput Sci. 2000. V. 1880. P. 166–183.
- [19] Yamamura A. Public key cryptosystem using the modular group // PKC, Lect. Notes Comput. Sci. 1998. V. 1431. P. 203–216.

[20] Yamamura A. A functional cryptosistem using a group action // ACISP, Lect. Notes Comput. Sci. 1999. V. 1587. P. 314–325.

[21] Paeng S.H., Ha K.C., Kim J.H., Chee S., Park C. New public key cryptosistem using finite nonabelian groups // CRYPTO2001, Lect. Notes Comput. Sci. 2001. V. 2139. P. 470–485.

[22] Paeng S.H., Kwon D., Ha K., Kim J.H. Improved public key cryptosystem using non abelian groups // eprint.iacr.org/2001/066.

[23] Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations // Pros. of the Edinburg Math. Soc. 1992. V. 35. P. 1–39.

[24] Gersten, Short. Small cancellation theory and automatic groups // 1990. Invent. math. 102. P. 305–334.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Методы удвоения растровых изображений

Ключевые слова: NEDI, растровое изображение, интерполяция.

Keywords: NEDI, image resizing.

Все алгоритмы масштабирования растровой графики можно разбить на два класса, а именно: адаптивные методы (интерполяционная функция подстраивается под контекст изображения) и неадаптивные.

У неадаптивных методов существует ряд недостатков, проявляемых в виде возникновения артефактов (эффект Гиббса, алиасинг, размытие) на увеличенных изображениях. Цель адаптивных алгоритмов состоит в выборе оптимальной (с точки зрения точности и сокращения артефактов) интерполяционной функции для каждой аппроксимируемой точки.

Цель работы состояла в проведении сравнительного анализа некоторых алгоритмов увеличения изображений, полученных посредством уменьшения прореживанием.

В качестве оценки точности интерполяционного алгоритма использовалось следующее соотношение:

$$\varphi(f, g, t) = 100 \cdot \frac{MSE(f, g)}{MSE(f, t)},$$

где $MSE(f, g)$ – среднеквадратичное отклонение истинных значений от приближенных, а $MSE(f, t)$ – СКО истинных значений от аппроксимации, найденной методом ближайшего соседа.

Для проведения эксперимента использовался набор стандартных изображений [3].

Среди проанализированных алгоритмов для случая прореженных изображений, лучший результат показал адаптивный 4-х точечный метод DCCI (Directional Cubic Convolution Interpolation) [1].

Алгоритм DCCI включает в себя три шага:

1) Инициализация четных точек значениями уменьшенного изображения;

2) Вычисление значений в нечетных точках, посредством кубической свертки с диагональными точками по отношению к аппроксимируемой;

3) Вычисление значений в нечетно-четных и четно-нечетных точках, посредством кубической свертки с вертикальными или горизонтальными точками по отношению к аппроксимируемой.

Ядро свертки имеет вид:

$$\overline{K} = \left(-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\right).$$

Для нахождения приближения вычисляются суммы абсолютных градиентов по вертикальному (G_v) и горизонтальному (G_h) или по двум диагональным направлениям в некоторой окрестности к аппроксимируемой точке.

Свертка применяется к точкам, расположенным ортогонально по отношению к направлению градиента. Если область порожденная окрестными точками к интерполируемой не содержит ярко выраженных границ (textured region), то аппроксимация вычисляется как взвешенное диагональных (вертикальных и горизонтальных в третьем шаге) точек относительно прогнозируемой.

Иными словами. Пусть T – некоторое вещественное число, представляющее собой пороговое значение для определения границ (в [1] $T = 1.15$), тогда:

- Если $\frac{G_v+1}{G_h+1} > T$, то точка расположена на вертикальной границе;
- Если $\frac{G_h+1}{G_v+1} > T$, то точка расположена на горизонтальной границе;
- Иначе точка расположена в области не содержащей ярко выраженных границ.

Усредненные значения оценочной функции $\varphi(f, g, t)$ для набора тестовых изображений [3] представлены в следующей таблице, где в качестве тривиальной интерполяции использовался метод ближайшего соседа.

Метод	% от тривиального
Trivial	100
NEDI r=4	62, 48
Bilinear	61, 21
NEDI r=6	60, 11
Cubic B-Spline	59, 92
NEDI r=10	59, 49
NEDI r=8	59, 32
DCCI	58, 85

Метод DCCI показывает значительное превосходство над методом NEDI [2], так как он обладает большей точностью и стабильностью, а также меньшим порядком роста сложности. В силу своей простоты и эффективности, данный алгоритм может послужить базой для дальнейших модификаций улучшающих точность аппроксимации.

Литература

1. Zhou D., Shen X., Dong W., Image zooming using directional cubic convolution interpolation // Image Processing, IET, 2012.
2. Li, X., Orchard, M. T., New edge-directed interpolation // IEEE Transactions on image Processing, 2001.
3. Набор тестовых изображений [Электронный ресурс]. URL: http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/Khashin/bmp_ex/index.html (дата обращения: 22.12.2015).

Поступила в редакцию 26.11.2015.

О некоторой проблеме в группах Кокстера с древесной структурой

Ключевые слова: группа Кокстера с древесной структурой, подгруппа, сопряженность, свободное произведение с объединением.

Keywords: Coxeter group with tree structure, subgroup, conjugacy, amalgamated free products.

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, заданная копредставлением $G = \langle a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n} \rangle$, где m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, причем $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$, группе G соответствует конечный связный деревограф Γ такой, что если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j , то ребру e соответствует соотношение вида $(a_i a_j)^{m_{ij}}$ [1].

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\bar{\Gamma}$ следующим образом: вершинам каждого ребра $\bar{e}$ графа $\bar{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} \rangle$, а ребру $\bar{e}$ – циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 \rangle$.

В данной работе рассматривается вопрос о сопряженности конечных множеств подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой, то есть вопрос существования алгоритма, позволяющего для любых двух множеств конечно порожденных подгрупп $\{H_i\}$ и $\{H'_i\}$ группы G установить, имеется ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n z^{-1} H_i z = H'_i$.

Определение 1. Под проблемой вхождения будем понимать проблему нахождения алгоритма, позволяющего для данной конечно определенной группы G и данной в ней конечной системы элементов M определить,

© Добрынина И. В., Инченко О. В., 2015

¹Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого (ТГПУ), 300026 Тула, пр. Ленина 125, Россия. E-mail: dobrynirina@yandex.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N15-41-03222 p_центр_a.

²Тульский Государственный Педагогический Университет имени Л. Н. Толстого (ТГПУ), 300026 Тула, пр. Ленина 125, Россия. E-mail: inchenko_ov@mail.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N15-41-03222 p_центр_a.

принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G подгруппе, порожденной множеством M .

Определение 2. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, \dots, H_s$ группы G и любых слов $w_1, \dots, w_s \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить, пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap \dots \cap w_s H_s$.

В. Н. Безверхним [2] получен следующий результат:

Теорема 1. Пусть группа G есть древесное произведение групп

$$G = \langle \prod_{s=1}^n *G_s; \text{rel}G_1, \dots, \text{rel}G_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle,$$

объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$ и $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы

- 1) проблема вхождения;
 - 2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;
 - 3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,
- то в группе G разрешима проблема вхождения.

Конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, рассматриваемая как свободное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам, удовлетворяет условиям данной теоремы, поэтому для данного класса групп справедливо

Следствие 1. В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

В работе [3] доказана

Теорема 2. В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.

В [4] получена

Теорема 3. Пересечение конечного числа конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.

Теорема 4. В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.

Теорема 5. Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера G с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.

Этот результат анонсирован в [5].

Теорема 6. *Существует алгоритм, позволяющий установить для любых двух множеств конечно порожденных подгрупп $\{H_i\}$ и $\{H'_i\}$ группы G , имеется ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n z^{-1} H_i z = H'_i$.*

Данная проблема рассмотрена в [6] для свободных произведений групп.

В работе используется метод специального множества слов, аналогичный [7].

Рассмотрим свободное произведение $\overline{G}$ дупорожденных групп Кокстера $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} \rangle$, объединенных по циклической подгруппе $\langle a_j; a_j^2 \rangle$:

$$\overline{G} = \langle a_i, a_j, a'_j, a_k; a_i^2, a_j^2, a_k^2, a_j'^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, (a'_j a_k)^{m_{jk}}, a_j = a'_j \rangle.$$

Слово из группы $\overline{G}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \quad (1)$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} – представители правых классов смежности группы G_{ij} по $\langle a_j; a_j^2 \rangle$ и G_{jk} по $\langle a_j; a_j^2 \rangle$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. K_g – ядро слова g . Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы $\overline{G}$, а K_g – другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 3. Если в (1) $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1} \quad (2)$$

называется трансформой.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \quad (3)$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$. Слово вида (1) будем называть нетрансформой нечетной длины, слово вида (3) нетрансформой четной длины.

Определение 4. Подслово $g = l_{1g} \dots l_{ng} (r_{ng} \dots r_{1g})$ называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ ($K_g r_{ng} \dots r_{1g}$) – большим начальным (конечным) отрезком.

Определение 5. Левая (правая) половина слова

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

называется изолированной в множестве $\{w_j\}_{j \in \overline{1, N}}$, если ни у одного из слов $w_j^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, множества $(\{w_j\} \setminus w_i) \cup (\{w_j^{-1}\} \setminus w_i^{-1})$ нельзя выделить

$l_{1w_i} \dots l_{mw_i} (r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова, то есть $w_j^\varepsilon \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^\varepsilon (w_j^\varepsilon \neq w_{j1}^\varepsilon r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$.

Далее будем рассматривать специальное множество слов, аналогичное введенному в [7].

Определение 6. Конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ группы $\overline{G}$ назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Левая половина нетрансформы из множества W изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолирована и левая, и правая половины.

2. Длину нетрансформы w_j нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{w_i\} \setminus w_j$. Длину произвольного элемента w_j нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $L(w_j)$, принадлежащее подгруппе $\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}} \rangle$.

3. Если $w_i^\varepsilon = l_{1w'_i} \dots l_{nw'_i} K_{w'_i} r_{nw'_i} \dots r_{s+1w'_i} r_{sw'_i} \dots r_{1w'_i}, \varepsilon = \pm 1, s < n$, — нетрансформа из множества W и $\{w_i^{\prime \varepsilon} = l_{1w''_i} \dots l_{nw''_i} K_{w''_i} r_{nw''_i} \dots r_{s+1w''_i} r_{sw''_i} \dots r_{1w''_i}, \varepsilon = \pm 1\}$ — подмножество нетрансформ из $W \setminus \{w'_i\} \cup W \setminus \{w_i^{-1}\}$, правые половины которых оканчиваются подсловом $r_{sw'_i} \dots r_{1w'_i}$, тогда если подгруппа $\langle w_i, i = \overline{1, n} \rangle \cap r_{1w'_i}^{-1} \dots r_{sw'_i}^{-1} D r_{sw'_i} \dots r_{1w'_i} = B$, где $D = G_{ij}$, если $r_{s+1w'_i} \in G_{ij}$, либо $D = G_{jk}$, если $r_{s+1w'_i} \in G_{jk}$, то для $u \in B$ выполняются неравенства $L(w'_i u) \geq L(w'_i), L(w'_i w_i^{\prime \varepsilon}) \geq L(w'_i)$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$, $w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ — слова из W , не обязательно различные, $s \leq m \leq n$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы, порожденной W , такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Аналогично вводится понятие специального множества для групп Кокстера G с древесной структурой.

Определение 7. Группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq \dots$ стабилизируется, то есть существует такое натуральное число N , что для любого $n, n > N, H_n = H_{n+1} = \dots$

В работе [7] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $G = G_1 *_U G_2$, U обладает свойством максимальности. Тогда любое конечное множество слов группы G можно преобразовать в специальное.

Из данной леммы получается

Теорема 6. Всякое конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ группы Кокстера с древесной структурой можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.

Кроме того, в [7] показана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть $G = G_1 *_U G_2$ и

- 1) U обладает свойством максимальности;
- 2) в G_1, G_2 разрешимы проблемы вхождения;
- 3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1, 2}$, и любого элемента $w \in G_i, i = \overline{1, 2}$, установить, пусто или нет пересечение $wH \cap U$;

4) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1, 2}$, и подгруппы U образующие их пересечения,

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G в специальное.

Теорема 7. Существует алгоритм, позволяющий всякое конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ группы Кокстера G с древесной структурой привести к конечному специальному, порождающему ту же подгруппу.

Литература

1. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 1-1. С. 5–13.
2. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1986. С. 3–22.
3. Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула : ТулГУ, 2008. С. 66.
4. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. № 2. С. 16–31.
5. Добрынина И. В. О нормализаторах подгрупп в свободных произведениях с объединением // Материалы XIII Международной конференции "Алгебра,

теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения". Тула : ТГПУ, 2015. С. 65–67.

6. Безверхняя И. С. *О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп* // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 102–116.

7. Безверхний В. Н. *О пересечении подгрупп в HNN-группах* // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 1. С. 199–222.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

И. В. Добрынина¹, Д. З. Каган²

Ширина вербальных подгрупп для различных групповых конструкций

Ключевые слова: ширина вербальной подгруппы, свободные произведения с объединением, HN - расширения, группы с одним определяющим соотношением.

Keywords: width of verbal subgroup, amalgamated free products, HN - extensions, groups with one defining relation.

Под шириной [1] вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V , будем понимать наименьшее $m \in \mathcal{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов из $V^{\pm 1}$. Ширина вербальной подгруппы, в общем случае, зависит от множества слов V . Будем рассматривать конечное множество слов V , так как для любой вербальной подгруппы $V(G)$, можно подобрать такое бесконечное множество слов W , что $V(G) = W(G)$, а ширина $W(G)$ равна единице.

Множество слов V будем называть собственным, а подгруппу $V(G)$ – собственной, если в свободной группе F_2 вербальная подгруппа $V(F_2)$ отлична от единичной и самой группы $F_2 : V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$. Слово v из свободной группы F_n называется коммутаторным, если оно лежит в коммутанте F'_n . Множество слов V группы G называется коммутаторным, а определяемая этим множеством вербальная подгруппа $V(G)$ – коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова.

Многие авторы изучали вопрос: как меняется ширина вербальных подгрупп при различных групповых конструкциях.

В этом направлении А. Х. Ремтулла [2] доказал, что в нетривиальном свободном произведении $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$.

В. А. Файзиев [3] в 2001 году доказал, что для свободных произведений с объединением $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна.

© Добрынина И. В., Каган Д. З., 2015

¹Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого (ТГ-ПУ), 300026 Тула, пр. Ленина 125, Россия. E-mail: dobrynirina@yandex.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N15-41-03222 p_центр_a.

²Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 127994 Москва, ул. Образцова 9, Россия. E-mail: dmikagan@gmail.com. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N15-41-03222 p_центр_a.

И. В. Добрыниной [4] показано, что в свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна. Кроме того, если $|A : U| \leq 2$ и $|B : U| \leq 2$, то ширина вербальной подгруппы $\Phi(G)$ бесконечна тогда и только тогда, когда ширина $\Phi(U)$ бесконечна.

В. Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы для HNN -расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Для HNN -расширений, где хотя бы одна из связных подгрупп совпадает с базовой группой, вида $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; t^{-1}a_1t = a_{i+1}, i = \overline{1, n-1}, t^{-1}a_nt = w(a_1, \dots, a_n) \rangle$, где $w(a_1, \dots, a_n)$ — непустое слово в свободной полугруппе $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ были получены результаты в работе [6] И. В. Добрыниной и В. Н. Безверхнего. Показывается, что если $w = a_1v(a_1, a_2, \dots, a_n)a_1$, a_1, a_1^2 , то ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна.

В. Г. Бардаковым [5] доказано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы для групп с одним определяющим соотношением и тремя образующими бесконечна. Распространить данный результат на группы с двумя порождающими и одним определяющим соотношением не удастся, так как это неверно для групп $G_n = \langle a, t; t^{-1}at = a^n, n \in \mathbb{Z} \setminus 0 \rangle$.

Р. И. Григорчуком [7] доказана бесконечность ширины любой собственной коммутантной вербальной подгруппы для свободных произведений с объединением при некоторых ограничениях и для HNN -расширений, в которых связные подгруппы отличны от базовой группы.

В. Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ для HNN -расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

И. В. Добрыниной и В. Н. Безверхним [8] изучалась ширина собственной вербальной подгруппы $V(G)$ для группы $G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w(a, b) \rangle$, где $w(a, b)$ — непустое слово в свободной полугруппе $\langle\langle a, b \rangle\rangle$. Доказывается, что если $w(a, b) = av(a, b)a$, a, a^2 , то ширина $V(G)$ бесконечна.

Рассмотрим группу $G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = av(a, b)b^\mu \rangle$, где $v(a, b)$ — непустое слово в свободной полугруппе $\langle\langle a, b \rangle\rangle$.

Положим $b = ca^\mu$. Тогда данную группу можно рассматривать в виде $G = \langle a, c, t; t^{-1}at = ca^\mu, t^{-1}ct = w(a, ca^\mu) \rangle$, где $w(a, ca^\mu) = a \dots ca^{\mu+i}$, $i > 1$.

Пусть $\log_a x$ означает сумму показателей при a в слове x .

Теорема 1 Пусть $G = \langle a, c, t; t^{-1}at = ca^\mu, t^{-1}ct = w(a, ca^\mu) \rangle$, $w(a, ca^\mu) = a \dots ca^{\mu+i}$, $i > 1$, — положительное слово. Если существует такое простое число p в разложении $\log_a w$ на простые множители, что $\mu \equiv 1 \pmod{p}$, то ширина собственной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна.

Теорема 2 Пусть $G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = ab^u \rangle$. Тогда произвольная собственная вербальная подгруппа имеет бесконечную ширину.

Д. З. Каганом изучалась ширина коммутантных вербальных подгрупп для групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением. Вопрос об условиях бесконечности ширины удалось полностью решить для таких групп с нетривиальным центром.

Теорема 3 Пусть G — группа с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна, за исключением следующих случаев: группа G — циклическая; группа G — свободная абелева второго ранга: $G = \langle t, a | ta = at \rangle$.

В общем случае группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими $G = \langle a, t | r(a, t) = 1 \rangle$ сводятся к HNN -расширениям. Самый сложный случай возникает, когда одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой. Тогда соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = U_0(a_0, \dots, a_{n-1})$. Несократимая запись элемента U_0 определенным образом разбивается на слоги $U_0 \equiv U_{01}U_{00}U_{02}$. Здесь U_{00} — часть слова U_0 , которая содержит все буквы с минимальным индексом $a_0^{\pm 1}$, лежащие в U_0 и ограничена ими.

Теорема 4 [8] Пусть группа с одним определяющим соотношением $G = \langle t, a | r(t, a) = 1 \rangle$ сводится к HNN -расширению $G = \langle t, a_0, \dots, a_n | s(a_i) = 1, ta_it^{-1} = a_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1 \rangle$, $n > 1$, где база совпадает с одной из изоморфных подгрупп. Пусть соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = U_0(a_0, \dots, a_{n-1}) = U_{01}U_{00}U_{02}$. Если U_{00} — циклически несократимо и U_{00} содержит в несократимой записи порождающий a_i с максимальным индексом $a_{n-1}^{\pm 1}$, то для группы G ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы бесконечна.

Аномальным произведением $A_w B$ групп A и B называется факторгруппа их свободного произведения $F = A * B$ по нормальному замыканию циклически несократимого элемента $w \in F : G = F / \langle w^F \rangle$. Группа называется локально индикабельной, если любая конечно порожденная подгруппа обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу.

Д. З. Каганом для аномальных произведений двух локально индикабельных групп доказана теорема:

Теорема 5 [9] Для аномальных произведений двух локально индикабельных групп $G = A_w B$, где одна из групп не является конечно порожденной, а другая не является циклической, ширина всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы бесконечна.

Для аномальных произведений с бесконечной циклической группой получен следующий результат:

Теорема 6 [10] Пусть $G = A_w B$ — аномальное произведение бесконечной циклической группы $A = \langle x \rangle$ и локально индикабельной, не являющейся циклической, группы B . Пусть сумма показателей при x в несо-

кратимой записи $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$ равняется 0: $\log_x w = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной коммутантной подгруппы бесконечна.

Литература

1. Мерзляков Ю. И. *Рациональные группы*. М. : Наука, 1987.
2. Rhemtulla A. H. *A problem of bounded expressibility in free products* // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64, № 3. P. 573–584.
3. Faiziev V. A. *A problem of expressibility in some amalgamated products of groups* // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105–115.
4. Добрынина И. В. *Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением* // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, № 1. С. 23–30.
5. Бардаков В. Г. *О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций* // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 494–517.
6. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. *О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 95–102.
7. Григорчук Р. И. *Ограниченные когомологии групповых конструкций* // Математические заметки. 1996. Т. 59, № 4. С. 546–550.
8. Каган Д. З. *Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов* // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 2. С. 167–176.
9. Каган Д. З. *О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп* // Вестник МГУ. 2004. № 6. С. 24–28.
10. Каган Д. З. *Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп* // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 3. С. 55–64.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

F. A. Dudkin¹

On the isomorphism and embedding problems for generalized Baumslag-Solitar groups

Keywords: embedding problem, isomorphism problem, generalized Baumslag-Solitar groups.

Call a finitely generated group G a *generalized Baumslag-Solitar group* or a *GBS* group if G can act on a tree so that the stabilizers of vertices and edges are infinite cyclic groups. By the Bass-Serre theorem, G is representable as $\pi_1(\mathbb{A})$, the fundamental group of a graph of groups $\mathbb{A}$ (see [1]).

Given a *GBS* group G , we can present the corresponding graph of groups $\mathbb{A}$ by a labeled graph (A, λ) , where A is a finite connected graph and $\lambda: E(A) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ labels the edges of A . The label λ_e of an edge e with the source vertex v defines an embedding $\alpha_e: e \rightarrow v^{\lambda_e}$ of the cyclic edge group $\langle e \rangle$ into the cyclic vertex group $\langle v \rangle$. Using the notion of expansion for labeled graphs, we can easily see that every *GBS* group can be presented by infinitely many labeled graphs.

Recently *GBS* groups have been quite actively studied [2], [3], [4]. In particular, the *isomorphism* problem for *GBS* groups has been discussed: to determine algorithmically when two given labeled graphs define isomorphic *GBS* groups. Despite that, the isomorphism problem is solved only in several special cases [5], [6], [7], the general solution is not established.

If two labeled graphs $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ define isomorphic *GBS* groups $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$ and $\pi_1(\mathbb{A})$ is not isomorphic to $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ or Klein bottle group then there exists a finite sequence of *expansion* and *collapse* (see fig.1) moves connecting $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ [8]. A labeled graph is called *reduced* if it admits no collapse move (equivalently, the labeled graph contains no edges with distinct endpoints and labels ± 1).

© Dudkin F. A., 2015

¹Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, Russia.

E-mail: dudkinf@ngs.ru.

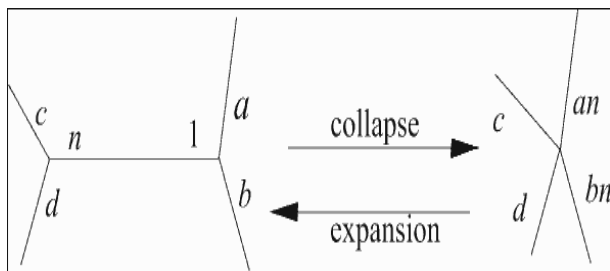


Fig. 1: Expansion and collapse moves

Given a labeled graph $\mathbb{A}$ (a GBS group G), denote the set of reduced labeled graphs with the fundamental group isomorphic to $\pi_1(\mathbb{A})$ (resp. G) by $R(\mathbb{A})$ (resp. $R(G)$).

Three types of transformations of labeled graphs plays an important role in studying GBS groups: slide, induction, $\mathbb{A}^{\pm 1}$ -moves (see [6] for details). We will focus on slides (see fig. 2).

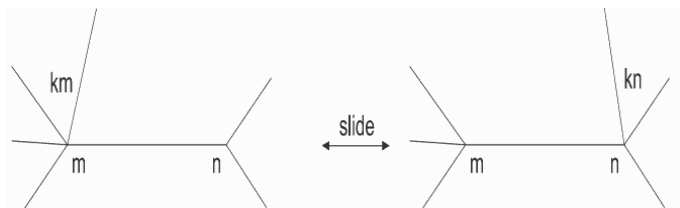


Fig. 2: Slide

Theorem (Clay M., Forester M. [2]) *Given GBS group G and $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in R(G)$, then $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ related by a finite sequence of slides, inductions and $\mathbb{A}^{\pm 1}$ -moves, with all intermediate labeled graphs reduced.*

An edge e of a labeled graph $\mathbb{A}$ is called *mobile* (see [6]), if there exists $t \in \pi_1(\mathbb{A})$ such that $G_e^t \subset G_e$. There G_e is an edge cyclic group, corresponding to the edge e . In [6] it is proved that there is an algorithm to decide if given edge e mobile or not.

First main result of this paper is another piece of the isomorphism problem for GBS groups:

Theorem 1. *Given labeled graph $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$. Suppose that $\mathbb{A}$ has no more than one mobile edge. Then there is an algorithm to decide whether groups $\pi_1(\mathbb{A})$*

and $\pi_1(\mathbb{B})$ isomorphic or not. If answer is positive then we can describe it algorithmically.

Another classical algorithmic problem we studying for GBS groups is *embedding problem*: to define algorithmically when two given labeled graphs $\mathbb{A}_1 = (\Gamma_1, \lambda_1)$ and $\mathbb{A}_2 = (\Gamma_2, \lambda_2)$ define such GBS groups that group $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ is embedable into $\pi_1(\mathbb{A}_2)$.

In 1993 H. Bass [9] elaborated the covering theory for graphs of groups. It is powerful analogue of covering theory for manifolds and it's fundamental groups. One of the main notion of this theory is the *immersion* of $\mathbb{A}$ into $\mathbb{B}$ (where $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are graphs of groups). This notion is quite useful for discussion of embedding problem because H. Bass proved that $\pi_1(\mathbb{A})$ is emendable into $\pi_1(\mathbb{B})$ if and only if there exists graph of groups $\mathbb{C}$ such that $\pi_1(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{A})$ and $\mathbb{C}$ immersible into $\mathbb{B}$.

At first sight is solves the embedding problem, but it turns out that it is not easy to check up the existence of immersion even for two fixed labeled graphs. And it is even more complicated to find labeled graph $\mathbb{C}$ such that $\pi_1(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{A})$ and $\mathbb{C}$ immersible into $\mathbb{B}$. In [9] embedding problem was solved only in very special case (when all vertex groups are finite).

Second main result was obtained using results of H. Bass:

Theorem 2. *Let $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ be labeled graphs. If $|R(\mathbb{A}_1)| < \infty$ then embedding problem $\pi_1(\mathbb{A}_1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{A}_2)$ is decidable. If embedding exists then we can describe it algorithmically.*

References

1. Serre J. P., *Trees*. – Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1980. 164 p.
2. Clay M., Forester M., *Whitehead moves for G-trees* // Bull. London Math. Soc. 2009. Vol 41, no. 2. P. 205–212.
3. Forester M., *On uniqueness of JSJ decomposition of finitely generated groups* // Comm. Math. Helv. 2003. Vol. 78. P. 740–751.
4. Clay M., *Deformation spaces of G-trees and automorphisms of Baumslag-Solitar groups* // Groups Geom. Dyn. 2009. no. 3. P. 39–69.
5. Forester M., *Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups* // Geometriae Dedicata. 2006. Vol. 121, no. 1. P. 43–59.
6. Clay M., Forester M., *On the isomorphism problem for generalized Baumslag-Solitar groups* // Algebraic & Geometric Topology. 2008. no. 8. P. 2289–2322.

7. Levitt G., *On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups* // Geometry & Topology. 2007. Vol. 11, P. 473–515.
8. Forester M., *Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees* // Geometry & Topology. 2002. no. 6. P. 219–267.
9. Bass H., *Covering theory for graphs of groups* // Journal of Pure and Applied Algebra, 89, N 1(1993), 3–47.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Об уравнениях в свободных группах

Ключевые слова: свободные группы, уравнения в группах, NP-трудные проблемы.

Keywords: free groups, equations in groups, NP-hard problems.

Устанавливается алгоритмическая неразрешимость проблемы разрешимости в свободной группе F_2 ранга 2 со свободными образующими a и b для систем уравнений с ограничениями на решения вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = [a, b] \& \bigwedge_{i=1}^t x_i \in F_2^{(1)}$$

и вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = [a, b] \& x_1 \in F_2^{(2)},$$

где $w(x_1, \dots, x_n)$ – слово в алфавите неизвестных $\{x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ – коммутатор свободных образующих a и b , $F_2^{(1)}$ – коммутант группы F_2 , а $F_2^{(2)}$ – ее второй коммутант.

Устанавливается существование полиномиального алгоритма, позволяющего по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = g(a, b),$$

где $w(x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово в алфавите неизвестных, а $g(a, b)$ – элемент длины меньше 4 свободной группы F_2 , определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(s)}, \dots, x_t \in F_2^{(s)},$$

где t – произвольное фиксированное число между 1 и n , а $F_2^{(s)}$ – s -ый коммутант группы F_2 .

Устанавливается алгоритмическая разрешимость аналогичных проблем для уравнений с одним неизвестным.

Устанавливается алгоритмическая неразрешимость проблемы разрешимости в свободной группе F_3 ранга 3 со свободными образующими a , b и c для систем уравнений с ограничениями на решения вида

$$w(x_1, \dots, x_n, a, b, c) = 1 \& x_1 \in P_3,$$

где P_3 – подгруппа чистых или гладких элементов группы F_3 .

Доказывается финитная неаппроксимируемость для уравнений с шестью неизвестными в свободных группах, разрешенных относительно неизвестных.

Устанавливается NP -трудность проблемы разрешимости в свободной группе для уравнений вида $w(x_1, \dots, x_n) = [a, b]$.

Показана полиномиальная разрешимость проблемы разрешимости для уравнений вида $w(x_1, \dots, x_n) = g$, где g – групповое слово длины меньше 4 в алфавите $\{a, b\}$ свободных образующих группы F_2 .

Показывается, что коммутант свободной нециклической группы не является формульной подгруппой, что дает ответ на один вопрос А. И. Мальцева из “Коуровской тетради”.

Уравнения в свободных группах, разрешенные относительно неизвестных, с ограничениями на решения

Обозначим через F_m – свободную группу ранга m со свободными образующими $a_1, \dots, a_m$. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно.

Уточним некоторые определения, относящиеся к системам уравнений в свободных группах.

Системой уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ в свободной группе F_m называется выражение вида

$$\bigwedge_{i=1}^k w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \quad (1)$$

где $w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ и $u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ – слова в алфавите

$$\{x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}, a_1, a_1^{-1}, \dots, a_m, a_m^{-1}\}.$$

Набор $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ элементов группы F_m называется *решением* системы (1), если при любом i ($i = 1, \dots, k$) в группе F_m выполняется равенство

$$w_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m).$$

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Используя уравнение

$$[x, a] = ([x, b]y^2)^2,$$

имеющее в свободной группе F_m при любом $m \geq 2$ лишь тривиальное решение $x = 1, y = 1$, любую систему уравнений (1) можно заменить одним, ей равносильным, уравнением.

Для уравнений в свободных группах традиционно рассматриваются две основные задачи: проблема существования решения и проблема описания множества всех решений.

Исследование разрешимости уравнений в свободных группах было начато американскими математиками в конце 50-х годов в связи с проблемой разрешимости элементарных теорий свободных групп, поставленной А. Тарским [1]. В начале исследовались лишь отдельные уравнения, а в 1960г. Р. Линдон [2] нашел для произвольного уравнения с одним неизвестным описание множества всех его решений с помощью параметрических слов, т.е. выражений, полученных из образующих рассматриваемой свободной группы с помощью операций группового умножения и возведения в степень с переменным целочисленным показателем. Позже А.А. Лоренц [3] и К.И. Аппель [4] уточнили это описание Р. Линдона, доказав, что общее решение любого уравнения с одним неизвестным в свободной группе представимо конечным числом формул вида AB^tC , где A, B, C – конкретные слова, а t – параметр, принимающий произвольные целочисленные значения. Дальнейшее продвижение в этом вопросе было достигнуто в 1970 году Ю.И. Хмелевским [5].

В 1982 году Г.С. Маканин [6] получил полное решение проблемы распознавания разрешимости уравнений в свободной группе. Он доказал, что если данное уравнение с длиной записи d имеет решение в свободной группе, то длина каждой компоненты минимального (по максимальной длине компоненты) решения не превосходит числа $\Phi(d)$, где $\Phi(x)$ – некоторая рекурсивная функция. Это дает переборный алгоритм для распознавания разрешимости произвольного уравнения в свободной группе.

В связи с уже упоминавшейся выше проблемой А. Тарского о разрешимости элементарной теории произвольной свободной группы представляет интерес исследование алгоритмической природы фрагментов этой теории. Основные на сегодняшний день результаты в этой области получены Г.С. Маканиным. Вскоре после опубликования работы [6] ему удалось на том же пути доказать разрешимость экзистенциальной (универсальной) и позитивной теорий любой свободной группы [7]. При доказательстве разрешимости позитивной теории свободной группы Г.С. Маканин использовал результат Ю.И. Мерзлякова [8] об устранимости кванторов общности в позитивных формулах, относящихся к свободным группам.

А.А. Разборов [9] дал описание множества решений произвольной совместной системы уравнений в свободной группе.

После построения Г.С. Маканиным [6] разрешающего алгоритма для систем уравнений в свободной группе F_m , особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными “не слишком сложными” ограничениями на решения.

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной группы был сведен Ю.И. Мерзляковым [8] к следующей проблеме

существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе счетного ранга определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \dots, g_n$, что

$$g_1 \in F_{m_1}, g_2 \in F_{m_2}, \dots, g_t \in F_{m_t},$$

где $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_t$, F_{m_i} - свободная группа с образующими $a_1, \dots, a_{m_i}$.

Г.С. Маканиным [7] построил искомый алгоритм, и тем самым доказал разрешимость позитивной теории свободной группы.

Хорошо известно, что вопрос о точности матричного представления Гасснер [10], [11] группы крашенных кос эквивалентен вопросу об отсутствии нетривиального решения в свободной группе F_m уравнения

$$x_1 a_1 x_1^{-1} \cdot x_2 a_2 x_2^{-1} \cdots x_m a_m x_m^{-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_m,$$

удовлетворяющего условию

$$x_1 \in F_m^{(2)}, \dots, x_n \in F_m^{(2)},$$

где $F_m^{(2)}$ - второй коммутант свободной группы F_m . Напомним, что для произвольной группы G через $G^{(2)}$ обозначается ее второй коммутант, т.е. $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}]$, где $G^{(1)} = [G, G]$ - коммутант группы G . Кроме того при произвольном t $G^{(t+1)} = [G^{(t)}, G^{(t)}]$ и $G^{(0)} = G$.

Обобщая эти ситуации Г.С. Маканин поставил в "Коуровской тетради" [12] следующую проблему для уравнений в свободных группах

"9.25. Указать алгоритм, который по уравнению

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списке конечно порожденных подгрупп $H_1, \dots, H_n$ группы F_m позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n''.$$

Первые положительные результаты в направлении решения этой проблемы были получены А.Ш. Малхасяном [13].

В. Диекерт [14] показал, что проблема определения по произвольному уравнению

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списке регулярных подмножеств (языков) $H_1, \dots, H_n$ группы F_m узнать, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n''$$

разрешима и принадлежит классу $PSPACE$. Так как конечно порожденные подгруппы являются регулярными подмножествами, то тем самым решается и проблема Г.С. Маканина.

Представляет интерес дальнейшее исследование различных обобщений проблемы Г.С. Маканина для свободных групп, получающихся путем ослабления ограничений, налагаемых на подгруппы $H_1, \dots, H_n$.

Одна из причин, по которым в формулировке задачи 9.25 речь идет именно о *конечно порожденных подгруппах*, заключается в том, что для *конечно порожденных подгрупп свободной группы разрешима проблема вхождения*.

В то же время проблема вхождения разрешима и для многих бесконечно порожденных подгрупп свободной группы, причем, например, для первого $F_m^{(1)}$ и второго $F_m^{(2)}$ коммутантов свободной группы F_m проблема вхождения решается чрезвычайно просто, значительно проще, чем для некоторых конечно порожденных подгрупп. Поэтому представляется достаточно естественным следующее обобщение задачи 9.25.

“9.25а. *Существует ли алгоритм, который по уравнению*

$$w(x_1, \dots, x_n a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списке подгрупп $H_1, \dots, H_n$ с разрешимыми проблемами вхождения позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$?”.

В работе [15] был получен следующий результат.

Теорема 1. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, константами a и b и параметром x , что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in [F_2, F_2], \dots, x_t \in [F_2, F_2],$$

где t – некоторое фиксированное число между 1 и n .

Далее существенно усиливается этот результат. Причем в определенном смысле это усиление близко к окончательно возможному.

В ряде работ [16], [5], [17], [18], [19] рассматривались уравнения вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = g(a_1, \dots, a_m),$$

где $w(x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово в алфавите неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. не содержит констант $a_1, \dots, a_m$, а $g(a_1, \dots, a_m)$ – слово в алфавите констант $a_1, \dots, a_m$, т. е. не содержит неизвестных. Они получили название уравнений, разрешенных относительно неизвестных, или уравнений

с правой частью. Проблема разрешимости для таких уравнений иногда называется проблемой подстановки или проблемой сравнения с образцом.

Обозначим через $[u, v]$ коммутатор элементов u и v , т. е. $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$.

Теорема 2. В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений

$$w(x^k, x_1, \dots, x_n) = [a, b],$$

где $w(x^k, x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово в алфавите неизвестных $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(x^k, x_1, \dots, x_n) = [a, b],$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in [F_2, F_2], \dots, x_t \in [F_2, F_2],$$

где t – некоторое фиксированное число между 1 и n .

Теорема 3. Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = [a, b]$$

в свободной группе F_2 определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \dots, g_n$, что

$$g_1 \in F_2^{(2)}.$$

Заметим, что слово $[a, b]$, стоящее в правой части рассматриваемых в доказанной теореме уравнений, имеет длину 4. Следующая теорема показывает невозможность дальнейшего уменьшения длины правой части.

Теорема 4. Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = g(a, b),$$

где $w(x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово в алфавите неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $g(a, b)$ – элемент длины меньше 4 свободной группы F_2 со свободными образующими a и b определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(s)}, \dots, x_t \in F_2^{(s)},$$

где t – произвольное фиксированное число между 1 и n .

Для уравнений с одним неизвестным ситуация иная.

Пусть $\mathbb{N}$ – r -й коммутант $F_n^{(r)}$ свободной группы F_r или r -й член $(F_m)_r$ ее нижнего центрального ряда.

Теорема 5. *Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по любому уравнению с одним неизвестным*

$$w(x_1, a_1, \dots, a_n) = 1$$

в свободной группе F_n определить имеет ли оно такое решение x_1 , что $x_1 \in \mathbb{N}$

Уравнения в свободной группе с одним ограничением на решения

Обозначим через φ_i следующий эндоморфизм свободной группы F_m ранга m со свободными образующими $a_1, \dots, a_m$

$$\varphi_i(a_j) = a_j \text{ п } j \neq i, \quad \varphi_i(a_i) = 1.$$

По аналогии с группой кос эндоморфизм φ_i назовем “эндоморфизмом выдергивания i -ой образующей”.

Полагаем

$$P_n^{(i)} = \text{Ker } \varphi_i \quad P_m = \bigcap_{i=1}^m P_m^{(i)}$$

и назовем $P_m^{(i)}$ подгруппой i -чистых элементов, а P_m – подгруппой чистых или гладких элементов.

Ясно, что P_m – нормальная подгруппа группы F_m , содержащаяся в ее коммутанте $F_m^{(1)}$ ($P_m \subseteq F_m^{(1)}$) и $P_2 = F_2^{(1)}$, но при $m \geq 3$ $P_m \neq F_m^{(1)}$.

Теорема 6. *При $m \geq 3$ невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению в группе F_m*

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

определить имеет ли оно такое решение $x_1, \dots, x_n$, что $x_1 \in P_m$.

О финитной аппроксимируемости для уравнений в свободных группах

Хорошо известно, что свободная группа F_n является финитно аппроксимируемой [?]. Это означает, что для любого неединичного элемента g группы F_n существует конечная факторгруппа F_n/N , в которой образ элемента g отличен от единичного элемента. А. И. Мальцев [21] указал на важность изучения свойств финитной аппроксимируемости групп относительно различных предикатов: из их наличия в группе вытекает разрешимость соответствующей алгоритмической проблемы. Пусть G – группа, ρ – предикат, определенный на группе G и ее гомоморфных образах. Говорят, что группа G финитно аппроксимируема относительно ρ , если для любых элементов группы G , на которых предикат ρ ложен, существует такая конечная факторгруппа G/N , что предикат ρ ложен для образов в

G/N этих элементов. В ряде работ изучалась финитная аппроксимируемость, в частности, свободных групп, относительно таких предикатов, как сопряженность элементов, возможность извлечения корня n -ой степени и т.д. Г. Баумслаг [22] установил финитную аппроксимируемость свободных групп относительно сопряженности и возможности извлечения корня простой степени, т.е. относительно разрешимости уравнений вида $x^{-1}hx = g$ и $x^p = g$, где h и g – элементы свободной группы. В работе [23] установлена финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $[x, y] = g$ и $x^n = g$. В этой же работе построено уравнение вида $w(x_1, \dots, x_4, a_1, a_2) = 1$ такое, что оно не имеет решения в свободной группе F_2 со свободными образующими a_1 и a_2 , но уравнение $w(x_1, \dots, x_4, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 1$ имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N , где $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ – образы в факторгруппе F_2/N при естественном гомоморфизме свободных образующих a_1 и a_2 группы F_2 .

В настоящей заметке усиливается этот результат – строится обладающее аналогичным свойством уравнение, разрешенное относительно неизвестных, т.е. имеющее вид $w(x_1, \dots, x_m) = g$, где g – некоторый фиксированный элемент группы F_2 , а слово $w(x_1, \dots, x_m)$ не содержит констант, т.е. слово только от переменных.

Теорема 7. *При любом $n \geq 2$ и любых неотрицательных m , p и q уравнение*

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+qt^{2m+3}})^4[u, v] = [a_1, a_2]$$

не имеет решения в свободной группе F_n , однако уравнение

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+qt^{2m+3}})^4[u, v] = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$$

имеет решение в любой конечной факторгруппе F_n/N , где через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ обозначены образы свободных образующих a_1 и a_2 свободной группы F_n относительно ее естественного гомоморфизма на факторгруппу F_n/N .

Рассмотренное в теореме уравнение имеет вид $w(x_1, \dots, x_6) = [a_1, a_2]$. Представляет интерес вопрос о возможности уменьшения числа неизвестных в левой части уравнения. Ясно, что оно не меньше двух, так как при $m = 1$ уравнение $w(x_1, \dots, x_m) = g$ принимает вид $x_1^n = g$, а в работе [23] показано, что такое уравнение имеет решение в свободной группе F_2 тогда и только тогда, когда оно имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N .

NP-трудность проблемы разрешимости для уравнений с простой правой частью в свободной группе

Теорема 8. *Проблема разрешимости в свободной группе F_2 для уравнений вида $w(x_1, \dots, x_n) = [a, b]$, где $w(x_1, \dots, x_n)$ – слово в алфавите неизвестных, а $[a, b]$ – коммутатор свободных образующих a и b группы F_2 является NP-трудной.*

Заметим, что слово $[a, b]$ имеет длину 4. Для слов g длины меньше 4 ситуация принципиально иная как показывает следующая теорема.

Теорема 9. *Проблема разрешимости для уравнений вида $w(x_1, \dots, x_n) = g$, где $w(x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, а g – групповое слово длины меньше 4 в алфавите $\{a, b\}$ свободных образующих группы F_2 полиномиально разрешима.*

Об одном вопросе А. И. Мальцева из “Коуровской тетради”

В “Коуровскую тетрадь” [12] под номером 1.19 Ю. Л. Ершов включил вопрос А. И. Мальцева о формульно определимых подгруппах и подмножествах свободной группы, заключительная часть которого звучит следующим образом “... будет ли коммутант формульно (или относительно элементарно) определим в свободной группе?”.

В настоящей заметке показывается, что из результата автора заметки [15] и результата О. Харлампович и А. Мясникова [25] о разрешимости элементарной теории любой свободной группы можно получить отрицательный ответ на эту часть вопроса 1.19.

Теорема 10. *При любом $m \geq 2$ невозможно построить формулу $CF_m(x)$ языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции $\cdot$, обращения $^{-1}$ и константные символы для свободных образующих $a_1, \dots, a_m$, с одной свободной переменной x такую, что для произвольного элемента g свободной группы F_m справедлива эквивалентность:*

формула $CF_m(g)$ истинна на группе F_m тогда и только тогда, когда элемент g принадлежит коммутанту $F_m^{(1)}$ группы F_m .

Литература

1. Tarski A., Mostowski A., Robinson R.M. Undecidable theories. NY., 1953.
2. Lyndon R.C. Equations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Volume 96. P. 445–457.
3. Лоренц А.А. О представлении множеств решений систем уравнений с одним неизвестным в свободных группах // Доклады АН СССР. 1968. Т. 178. № 2. С. 290–292.
4. Appel K.I. One-variable equations in free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 19. P. 912–918.
5. Хмелевский Ю.И. Системы уравнений в свободной группе. I, II. // Известия АН СССР. Серия математика. 1971. Т. 35, № 6. С. 1237–1268; 1972. Т. 36, № 1. С. 110–179.
6. Маканин Г.С. Уравнения в свободной группе // Известия АН СССР. Серия математика. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199–1273.
7. Маканин Г.С. Универсальная теория и позитивная теория свободной группы // Известия АН СССР. Серия математика. 1984. Т. 48, № 4. С. 735–749.
8. Мерзляков Ю.И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 4. С. 25–42.

9. Разборов А.А. О системах уравнений в свободной группе // Известия АН СССР. Серия математика. 1984. Т. 48, № 4. С. 779–832.
10. Gassner B.J. On braid groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1961. Vol. 25. P. 10–22.
11. Birman J.S. Braids, links and mapping class groups. Ann.of Math. Studies № 82. Princeton University Press. Princeton, 1974.
12. Коуровская тетрадь. Изд. 17-е, доп. и включающее Архив решенных задач. Новосибирск : Институт математики СО РАН. 2010.
13. Малхасян А.Ш. О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Прикладная математика : сб. 1986. Т. 2. С. 42–47.
14. Diekert V. Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. Preliminary version of the chapter in M. Lothaire. Algebraic Combinatorics on Words. Report Nr. 1998/02. Fakultat Informatik. Universitat Stuttgart. 1998.
15. Дурнев В.Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 717–724.
16. Мальцев А.И. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 45–50.
17. Schupp P.E. On the substitution problem for free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. P. 421–423.
18. Edmunds C.C. On the endomorphisms problem for free group // Com. Algebra. 1975. Vol. 3. P. 7–20.
19. Дурнев В.Г. О проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 832–845.
20. Bormotov D., Gilman R., Myasnikov A. Solving one-variable equation in free groups // J. Group Theory. 2009. Vol. 12, № 2. P. 317–330.
21. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
22. Baumslag G. Residual nilpotency and relations in free groups // J. of Algebra. 1965. Vol. 2. P. 271–282.
23. Khelif A. Some properies of free groups and their profinite completions. In preperation.
24. Coulbois T. and Khelif A. Equations in free groups are not finitely approximable// Proceedings of the American mathemetical society. 1999. Vol. 127, № 4. P. 963–965.
25. Kharlampovich O., Myasnikov A. Elementary theory of free non-abelian groups // Journal of Algebra. 2006. Vol. 302, № 2. P. 451–552.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

УДК 510.53

Л. С. Казарин¹

Распознавание групп с помощью спектра и разрешимого графа

Ключевые слова: Спектр группы, разрешимый граф, простая группа.

Keywords: Spectrum of a group, soluble graph, simple group.

Рассматриваются только конечные группы. Пусть G – группа. Через $\omega(G)$ обозначен *спектр*, т.е. множество всех порядков элементов группы G . Говорят, что группа G *распознаваема* по спектру (в классе конечных групп), если всякая конечная группа, имеющая тот же спектр, что и G , изоморфна G (см.[1]).

В работе [1] В.Д.Мазуровым перечислены все известные к настоящему времени простые конечные группы, не распознаваемые по спектру. Если рассматривать проблему распознаваемости групп по спектру при условии, что порядок группы с тем же спектром, что и исходной простой группы тот же самый, то оказывается, что распознаваемость имеет место.

В настоящем сообщении предлагается рассматривать распознаваемость простых групп из списка [1] вместе с *разрешимым графом* соответствующей группы. Напомним, что разрешимый граф $\Gamma_{sol}(G)$ группы G был введен в статье [2] С.Абе и Н.Йори следующим образом. Множество вершин графа $V(\Gamma_{sol}(G)) = \pi(G)$ это множество всех простых делителей порядка G , причем вершины $p, q \in \pi(G)$ образуют ребро, если в группе G есть разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq .

В статье [1] перечислены 13 типов простых групп, нераспознаваемых по спектру. Основной результат, полученный автором сообщения состоит в следующем.

© Казарин Л. С., 2015

¹Ярославский государственный университет, 150003 Ярославль, ул. Советская 14, Россия. E-mail: lsk46@mail.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00324.

Теорема. Пусть G – одна из следующих простых групп: $U_3(3)$, $U_3(7)$, $U_4(2)$, $U_5(2)$, $L_3(3)$, $L_4(q)$, A_{10} . Тогда G распознаваема по паре $(\omega(G), \Gamma_{sol}(G))$.

В силу [1] для группы $L_4(q)$ мы предполагаем, что $q = 13^{24}$. Как отмечено в [1], не исключено, что подобные примеры могут встретиться для некоторых других значений q . Заметим, что для групп A_6 , ${}^3D_4(2)$ и J_2 существуют неизоморфные им группы с теми же спектром и разрешимым графом.

Литература

1. Мазуров В. Д. *Нераспознаваемые по спектру конечные простые группы и изоспектральные им группы* // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 47–55.
2. Abe S. Iiyori N. *A generalization of prime graphs of finite groups* // Hokkaido Math. J. 2000. V. 29. P. 391–407.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Л. С. Казарин¹

Группы с факторизацией и характеры конечных групп

Ключевые слова: Группа лиева типа, факторизация, подстановочное представление, неприводимый характер.

Keywords: Lie type group, factorization, permutation representation, irreducible character.

Рассматриваются только конечные группы. Пусть G – группа, A и B – ее собственные подгруппы. Говорят, что G имеет факторизацию вида $G = AB$, если каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = ab$, где $a \in A, b \in B$. В этом случае строение группы можно при определенных условиях определить. При этом существенную помощь оказывает информация о характерах группы G или фрагмент таблицы неприводимых характеров. В частности, автором было получено усиление известного критерия простоты конечной группы, принадлежащего В.Бернсайду. Большинство конечных групп обладает нетривиальной факторизацией вида $G = AB$ или $G = ABA$. В последнем случае каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = aba'$, где $a, a' \in A, b \in B$. К примеру, все простые неабелевы группы лиева типа обладают факторизацией такого вида для A , являющейся борелевской подгруппой группы G лиева типа, а B – подгруппой из нормализатора ее подгруппы Картана.

Другой пример доставляют группы подстановок ранга ≤ 3 . И в этом случае появляется факторизация вида ABA , где A – стабилизатор точки в представлении группы как группы подстановок. Использование неприводимых характеров группы также оказывается весьма полезным. Справедливо утверждение: Конечная группа G не обладает нетривиальной факто-

© Казарин Л. С., 2015

¹Ярославский государственный университет, 150003 Ярославль, ул. Советская 14, Россия. E-mail: lsk46@mail.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00324.

ризацией вида $G = AB$ или $G = ABA$ тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ – простая группа, не имеющая нетривиальной факторизацией указанного вида (здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G). Существуют ли простые неабелевы группы с этим свойством неизвестно.

В докладе приводятся примеры исследования конечных групп с помощью неприводимых представлений и их характеров.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

УДК 510.53

П. Н. Никонова¹, Е. И. Компанцева²

Ассоциативные кольца на абелевых группах без кручения

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, полупростая группа, полупростое кольцо.

Keywords: abelian group, ring on a group, semisimple group, semisimple ring.

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G . Исследованию зависимости между строением абелевой группы и свойствами колец на ней посвящены работы Фукса Л., Селе Т., Бьюмонта Р.А., Пирса Р.С. и др. Одним из направлений этих исследований является описание в некотором классе абелевых групп тех групп, на которых существует кольцо с заданным свойством. Бьюмонт Р.А. и Лоувер Д.А. [1] сформулировали проблему изучения абелевых групп, на которых существует хотя бы одно ассоциативное полупростое кольцо, такие группы называют полупростыми. Изучению полупростых групп посвящены работы [2-6] и др.

Проблема исследования полупростых групп тесно связана с проблемой описания абсолютного радикала Джекобсона абелевой группы G , под абсолютным радикалом Джекобсона группы G понимается пересечение $J^*(G)$ соответствующих радикалов всех ассоциативных колец на G . Очевидно, класс полупростых групп содержится в классе абелевых групп с нулевым абсолютным радикалом Джекобсона.

В [4] показано, что если абелева группа без кручения G содержит ненулевую делимую подгруппу, то $J^*(G) = 0$. Возникает вопрос, реализуется ли $J^*(G)$ в качестве квазирегулярного радикала некоторого ассоциативного кольца на G [7], другими словами, является ли нередуцированная абелева группа без кручения полупростой.

Настоящая работа является продолжением исследований, связанных с описанием полупростых групп в различных классах абелевых групп. В работе изучаются полупростые абелевы группы без кручения, содержащие ненулевую делимую подгруппу. Проблема описания полупростых групп сводится к случаю редуцированных групп, если делимая часть имеет конечный ранг. Кроме того, показано, что любая абелева группа без кручения, ранг делимой части которой бесконечен и равен m , а ранг редуцированной части не превосходит 2^m , является полупростой.

© Никонова П. Н., Компанцева Е. И., 2015

¹Московский педагогический государственный университет, кафедра алгебры, 107140 Москва, Краснопрудная улица 14, Россия. E-mail: www.nikonova@mail.ru.

²Московский педагогический государственный университет, кафедра алгебры, 107140 Москва, Краснопрудная улица 14, Россия. E-mail: kompanitseva@yandex.ru.

В работе рассматриваются только абелевы группы без кручения и только ассоциативные кольца, и слова "группа" и "кольцо" всюду в дальнейшем означают соответственно "абелева группа без кручения" и "ассоциативное кольцо".

В статье используются следующие определения и обозначения. Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu: G \otimes G \rightarrow G$. Это умножение часто будем обозначать знаком $\times$, то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для $g_1, g_2 \in G$. Ассоциативное умножение μ на группе G определяет некоторое кольцо на этой группе, которое обозначается (G, μ) , радикал этого кольца обозначается $J(G, \mu)$ (или, соответственно, $(G, \times)$, $J(G, \times)$). Элемент прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. Если $G = A \oplus B$, то $\pi_A(G)$ и $\pi_A(g)$ обозначают соответственно проекции группы G и элемента $g \in G$ на подгруппу A , π_i – проекция $\prod_{i \in I} G_i$ на G_i .

За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [8, 9].

Пусть $G = A \oplus B$, $(G, \times)$ – кольцо. Определим умножение $\times_A$ на A следующим образом: $a_1 \times_A a_2 = \pi_A(a_1 \times a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in A$. Будем называть $\times_A$ умножением, индуцированным на A умножением $\times$.

Лемма 1. Пусть $G = A \oplus B$; $(G, \times)$ – кольцо, B – идеал кольца $(G, \times)$. Тогда

- 1) $(G/B, \times) \cong (A, \times_A)$,
- 2) $J(G, \times) \subset J(A, \times_A) \oplus B$,
- 3) Если B – квазирегулярный идеал, то $J(G, \times) = J(A, \times) \oplus B$,
- 4) Если T – идеал кольца $(G, \times)$, то $\pi_A(T)$ – идеал кольца $(A, \times_A)$.

Доказательство.

1) Легко видеть, что π_A – эпиморфизм кольца $(G, \times)$ на кольцо $(A, \times_A)$ с ядром B .

2) Так как $\pi_A(J(G, \times)) \subset J(A, \times_A)$ [9], то $J(G, \times) \subset J(A, \times_A) \oplus B$.

3) Покажем, что $J = J(A, \times_A) \oplus B$ – квазирегулярный идеал $(G, \times)$. Пусть $a \in J(A, \times_A)$; $b \in B$, $g \in G$. Тогда $\pi_A((a+b) \times g) = \pi_A(a \times \pi_A(g)) = a \times_A \pi_A(g) \in J(A, \times_A)$, откуда следует, что J – идеал $(G, \times)$. Так как $a \in J(A, \times_A)$, то существует элемент $c \in A$ такой, что $a \circ c = a + c - a \times c = b_1 \in B$, где $\circ$ – круговая композиция в кольце $(G, \times)$ [9]. Следовательно, $(a+b) \circ (c-b) = (a+b) + (c-b) - (a+b) \times (c-b) = b_1 - b \times c + b \times b = b_2 \in B$.

Так как B – квазирегулярный идеал, то существует $b_3 \in B$ такой, что $b_2 \circ b_3 = 0$. Так как операция круговой композиции ассоциативна, то $(a+b) \circ ((c-b) \circ b_3) = 0$, откуда следует, что $a+b$ – квазирегулярный элемент кольца $(G, \times)$ и, значит, J – квазирегулярный идеал $(G, \times)$, то есть $J \subset J(G, \times)$. Из 2) получаем необходимое равенство.

4) Пусть $c \in \pi_A(T)$. Тогда для некоторого $b \in B$ элемент $c+b$ принадлежит T . Если $a \in A$, то $(c+b) \times a = \pi_A(c \times a) + \pi_B(c \times a) + b \times a \in T$. Так как $\pi_B(c \times a) + b \times a \in B$, то $c \times_A a = \pi_A(c \times a) \in \pi_A(T)$. Аналогично $a \times_A c \in \pi_A(T)$. Следовательно, $\pi_A(T)$ – идеал кольца $(A, \times_A)$.

Лемма 2. Пусть $G = A \oplus B$ – прямая сумма групп, $(G, \times)$ – кольцо на G , B – полупростой идеал кольца $(G, \times)$ с единицей e . Тогда $J(G, \times) = \{a - a \times e \mid a \in J(A, \times_A)\}$.

Доказательство. Отметим сначала, что для любого элемента $g \in G$

$$g \times e = e \times g. \quad (1)$$

В самом деле, $(e \times g) \times e = e \times (g \times e)$ для любого $g \in G$, из того, что $e \times g$ и $g \times e$ принадлежат B , следует равенство (1).

Пусть $T = \{a - a \times e \mid a \in J(A, \times_A)\}$. Покажем, что T – правый идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $a - a \times e \in T$ ($a \in J(A, \times_A)$) и пусть $b \in B$. Тогда в силу (1) имеем $(a - a \times e) \times b = (a - a \times e) \times (b \times e) = (a \times e - a \times e \times e) \times b = 0$. Пусть теперь $c \in A$, тогда $(a - a \times e) \times c = a \times c - (a \times c) \times e = a \times c - (\pi_A(a \times c) + \pi_B(a \times c)) \times e = a \times c - \pi_A(a \times c) \times e - \pi_B(a \times c) = \pi_A(a \times c) - \pi_A(a \times c) \times e = a \times_A c - (a \times_A c) \times e$. Так как $a \in J(A, \times_A)$, то и $a \times_A c \in J(A, \times_A)$ и, следовательно, $(a - a \times e) \times c \in T$. Таким образом, T – правый идеал $(G, \times)$.

Покажем, что идеал T квазирегулярен. Пусть $a - a \times e \in T$. Тогда, так как $a \in J(A, \times_A)$, существует элемент $c \in A$ такой, что $a + c - a \times_A c = 0$. Так как по доказанному выше $(a - a \times e) \times (c \times e) = 0$, то, используя (1), имеем:

$$(a - a \times e) + (c - c \times e) - (a - a \times e) \times (c - c \times e) = a - a \times e + c - c \times e - a \times c + a \times c \times e = (a + c - \pi_A(a \times c)) - \pi_B(a \times c) - (a + b) \times e + (a \times c) \times e = -\pi_B(a \times c) - (a + c) \times e + \pi_A(a \times c) \times e + \pi_B(a \times c) = -e \times (a + c - \pi_A(a \times c)) = 0.$$

Следовательно, $c - c \times e$ является квазиобратным элементом к $a - a \times e$ и, значит, T – квазирегулярный идеал $(G, \times)$, откуда $T \subset J(G, \times)$.

Докажем обратное включение. Пусть $g \in J(G, \times)$ и пусть $g = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $g \times e \in J(G, \times) \cap B = J(B, \times) = 0$, то есть $g \times e = a \times e + b \times e = 0$, откуда $b \times e = -a \times e$ и, значит, $g = a - a \times e$. По лемме 1 $J(G, \times) \subset J(A, \times_A) \oplus B$, следовательно, $a \in J(A, \times_A)$. Таким образом, $J(G, \times) \subset T$.

Пусть D – делимая группа конечного ранга и $(D, \times)$ – кольцо на ней. По основной теореме Веддерберна о сепарабельных конечномерных алгебрах существует разложение $(D, \times) = S \oplus N$ векторного пространства $(D, \times)$ в прямую сумму векторных пространств. Здесь S – полупростая подалгебра с единицей в алгебре D , а N – радикал D , обязательно нильпотентный. Эти обозначения будем использовать в дальнейшем.

Теорема 3. Пусть $G = A \oplus D$ – прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Пусть $(G, \times)$ – кольцо и для идеала $(D, \times)$ имеет место разложение $(D, \times) = S \oplus N$. Пусть e – единица подалгебры S и $B = \{a - a \times e \mid a \in J(A, \times_A)\}$. Тогда $J(G, \times) = B + N$.

Доказательство. Так как $N = J(D, \times)$, то $N = J(G, \times) \cap D$ и, следовательно, N – нильпотентный идеал кольца $(G, \times)$. Значит, $J(G, \times) = J(A \oplus S, \times_{A \oplus S}) \oplus N$ по лемме 1. Нетрудно видеть, что $(S, \times_{A \oplus S}) = (S, \times)$ – полупростой идеал кольца $(A \oplus S, \times_{A \oplus S})$ с единицей e . Следовательно, $J(A \oplus S, \times_{A \oplus S}) = \{a - a \times_{A \oplus S} e \mid a \in J(A, \times_A)\}$ по лемме 2. Легко ви-

деть, что $B + N = \{a - a \times_{A \oplus S} e \mid a \in J(A, \times_A)\} + N$, откуда следует, что $J(G, \times) = B + N$.

Теорема 4. Пусть $G = A \oplus D$ – прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Группа G является полупростой тогда и только тогда, когда полупростой является группа A .

Доказательство. Если A – полупростая группа, то определим полупростое кольцо $(A, \times)$ и кольцо $(D, \times)$ как прямую группу полей, изоморфных полю рациональных чисел. Определяя кольцо $(G, \times)$ как прямую сумму полупростых идеалов $(A, \times) \oplus (D, \times)$, получим полупростое кольцо G .

Обратно, если на G существует полупростое кольцо $(G, \times)$, то в нем идеал $(D, \times)$ является полупростым. Следовательно, в разложении $(D, \times) = S \oplus N$ идеал N является нулевым. Значит, $J(G, \times) = \{a - a \times e \mid a \in J(A, \times_A)\} = 0$ в силу теоремы 3, где e – единица идеала $D = S$. Так как для любого $a \in J(A, \times_A)$ элемент $a \times e$ принадлежит D , то из равенства $a - a \times e = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, получаем, что $J(A, \times_A) = 0$ и, следовательно, $(A, \times_A)$ – полупростое кольцо на A . Значит, группа A является полупростой.

Следствие 5. Пусть $G = A \oplus D$, где A – редуцированная группа, D – делимая группа конечного ранга. Пусть $J^*(A) \neq 0$. Тогда G не является полупростой.

Теперь рассмотрим группы, делимая часть которых имеет бесконечный ранг.

Лемма 6. Пусть $G = A \oplus D$, где D – делимая группа бесконечного ранга m , A – группа, ранг которой не больше, чем m . Пусть на группе A определено кольцо $(A, \times)$. Тогда кольцо $(A, \times)$ может быть вложено как подкольцо в кольцо $(G, \times)$, для которого выполняются следующие условия:

- 1) D – полупростой идеал кольца $(G, \times)$;
- 2) для любого ненулевого элемента $g \in G$ существует элемент $d \in D$ такой, что $g \times d \neq 0$.

Доказательство. Кольцо $(A, \times)$ вкладывается в кольцо $(\bar{A}, \times)$ на делимой оболочке $\bar{A}$ группы A [8, теорема 119.1]. Пусть $\bar{A} = \bigoplus_{j \in J} Qa_j$, $D =$

$\bigoplus_{i \in I} Qa_i$, $|J| \leq m$, $|I| = m$, и пусть $a_j \times a_s = \sum_{t \in J} r_{js}^{(t)} a_t$ для произвольных $j, s \in J$ ($r_{js}^{(t)} \in Q$ и $r_{js}^{(t)} = 0$ почти для всех $t \in J$).

Пусть K – некоторое множество индексов мощности m , W – множество ассоциативных слов в алфавите $\{x_j, y_k \mid j \in J, k \in K\}$, не содержащих подслов вида $x_j x_s$ ($j, s \in J$), и пусть $F = \bigoplus_{w \in W} Qw$.

Рассмотрим алгебру $(F, \cdot)$ над Q , определив для любых w_i, w_l произведение $w_i \cdot w_l$ как результат приписывания слова w_l к слову w_i справа и замены в полученном слове подслова вида $x_j x_s$ (если оно есть) на элемент $\sum_{t \in J} r_{js}^{(t)} x_t$ ($j, s \in J$). Алгебра $(F, \cdot)$ изоморфна фактор-алгебре алгебры $Q[x_j, y_k]$, порожденной множеством всех ассоциативных слов в

алфавите $\{x_j, y_k | j \in J, k \in K\}$ по идеалу, порождённому множеством $\{x_j x_s - \sum_{t \in J} t_{js}^{(t)} x_t | j, s \in J\}$.

Пусть $\overline{W}$ – множество ассоциативных слов из W , содержащих хотя бы одно подслово вида y_k ($k \in K$). Очевидно, мощность $\overline{W}$ равна m . Занумеруем слова множества $\overline{W}$ индексами на I : $\overline{W} = \{w_i | i \in I\}$. Тогда группу F можно записать в виде $F = \bigoplus_{j \in J} Qx_j \oplus \bigoplus_{i \in I} Qw_i$.

Отображение $\varphi: F \rightarrow \overline{A} \oplus D$, при котором $\varphi(x_j) = a_j$, $\varphi(w_i) = e_i$ ($j \in J, i \in I$) является изоморфизмом групп. Следовательно, на группе $\overline{A} \oplus D$ можно определить кольцо $(\overline{A} \oplus D, \times)$ так, что φ становится изоморфизмом колец $(F, \cdot)$ и $(\overline{A} \oplus D, \times)$. Как нетрудно видеть, $(A, \times)$ и $(G, \times)$ – подкольца кольца $(\overline{A} \oplus D, \times)$, причем подкольцо $(A, \times)$ совпадает с заданным кольцом на A , а D – идеал кольца $(G, \times)$, изоморфный идеалу $(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$ кольца $(F, \cdot)$.

Покажем, что кольцо $(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$ полупросто. Пусть $a = r_{i_1} w_{i_1} + \dots + r_{i_n} w_{i_n} \in J(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$, где $r_{i_1} w_{i_1} + \dots + r_{i_n} w_{i_n}$ различные слова из $\overline{W}$. Допустим $a \neq 0$. Пусть $r_{i_n} \neq 0$ и $l(w_{i_1}) \leq \dots \leq l(w_{i_n})$, где $l(w_{i_t})$ – длина слова w_{i_t} .

Зафиксируем произвольный индекс $k \in K$ и рассмотрим элемент $a \cdot y_k = r_{i_1} w'_{i_1} + \dots + r_{i_n} w'_{i_n}$, где $w'_{i_t} = w_{i_t} \cdot y_k$ ($t = \overline{1, n}$). Очевидно, $a \cdot y_k$ – также ненулевой элемент $J(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$. Следовательно, существует элемент $b = s_{j_1} w_{j_1} + \dots + s_{j_m} w_{j_m} \neq 0$ ($s_{j_1}, \dots, s_{j_m} \in Q$, $w_{j_1}, \dots, w_{j_m} \in W$) такой, что

$$a \cdot y_k + b - a \cdot y_k \cdot b = 0. \quad (2)$$

Пусть $s_{j_m} \neq 0$ и $l(w_{j_1}) \leq \dots \leq l(w_{j_m})$. Равенство (2) перепишем в виде

$$r_{i_1} w'_{i_1} + \dots + r_{i_n} w'_{i_n} + s_{j_1} w_{j_1} + \dots + s_{j_m} w_{j_m} - r_{i_1} s_{j_1} w_{i_1} w_{j_1} - \dots - r_{i_n} s_{j_m} w_{i_n} w_{j_m} = 0. \quad (3)$$

Поскольку $w'_{i_n} = w_{i_n} \cdot y_k$, то $l(w'_{i_n} w_{j_m}) = l(w'_{i_n}) + l(w_{j_m})$. Следовательно, среди слов левой части равенства (3) длина слова $w_{i_n} w_{j_m}$ максимальна. Так как слово w_{i_n} отлично от слов $w'_{i_1} + \dots + w'_{i_{n-1}}$, то среди всех слагаемых левой части равенства (3) нет слагаемых с буквенной частью $w'_{i_n} w_{j_m}$. Поэтому из (3) следует, что $r_{i_n} s_{j_m} = 0$, что противоречит выбору чисел r_{i_n} и s_{j_m} . Значит, $a = 0$, откуда $J(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot) = 0$. Таким образом, идеал $(D, \times)$ кольца $(G, \times)$, изоморфный кольцу $(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$, полупрост.

Докажем, что выполняется условие 2). Если произвольный элемент a кольца $(F, \cdot)$ отличен от нуля, то $a \cdot y_k$ – ненулевой элемент идеала $(\bigoplus_{i \in I} Qw_i, \cdot)$. Так как кольцо $(G, \times)$ изоморфно подкольцу кольца $(F, \cdot)$, то для любого ненулевого элемента g кольца $(G, \times)$ существует элемент d идеала $(D, \times)$ такой, что $g \times d \neq 0$.

Теорема 7. Пусть $G = A \oplus D$, где D – делимая группа бесконечного ранга m , A – редуцированная группа, ранг которой не превышает 2^m . Тогда группа G является полупростой.

Доказательство. Делимая оболочка группы A имеет ранг, не превышающий 2^m , поэтому она вложима в группу $\prod_{i \in I} A_i$, где мощность множества

I равна m , $A_i (i \in I)$ – делимые группы ранга 1. Группу D можно представить в виде $D = \bigoplus_{i \in I} D_i$, где $D_i (i \in I)$ – делимые группы ранга m .

Пусть $\times$ – нулевое умножение на $\prod_{i \in I} A_i$, тогда, очевидно, кольцо $(\prod_{i \in I} A_i, \times)$ – произведение идеалов A_i (умножение на каждом из которых является нулевым).

Обозначим $G_i = A_i \oplus D_i$. По лемме 4 кольцо $(A_i, \times)$ вкладывается в кольцо $(G_i, \times)$, в котором D_i является полупростым идеалом. Рассмотрим прямое произведение колец $\prod_{i \in I} (G_i, \times)$ и покажем, что G является в нем подкольцом. Так как D_i является идеалом кольца G_i при всех $i \in I$, то $D = \bigoplus_{i \in I} D_i$ – идеал кольца $\prod_{i \in I} G_i$. Поэтому для любых элементов $g = a + d$ и $g' = a' + d'$ группы G ($a, a' \in A$, $d, d' \in D$) имеем $g \times g' = a \times a' + a \times d' + d \times a' + d \times d' \in D$. Следовательно, G – подкольцо кольца $(\prod_{i \in I} G_i, \times)$.

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Пусть $g \in J(G, \times)$ и $g = (g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. Допустим, $g \neq 0$, тогда существует индекс $i_0 \in I$ такой, что $g_{i_0} \neq 0$. Легко видеть, что $g_{i_0} \in J(G_{i_0}, \times)$. По лемме 6 существует элемент $d_{i_0} \in D_{i_0}$, для которого $g_{i_0} \times d_{i_0} \neq 0$. Но $g_{i_0} \times d_{i_0} \in J(G_{i_0}, \times) \cap D_{i_0} = J(D_{i_0}, \times) = 0$. Из полученного противоречия следует, что $g = 0$, и, значит, $J(G, \times) = 0$. Таким образом, группа G полупроста.

Литература

- [1] Beaumont R.A., Lawver D.A. *Strongly semisimple abelian groups* // Publ. J. Math. 1974. V. 53, № 2. P. 327–336.
- [2] Gardner B.J. *Radicals of abelian groups and associative rings* // Acta Math. Hung. 1973. V. 24. P. 259–268.
- [3] Jackett D.R. *Rings on certain mixed abelian groups* // Pacific. J. Math. 1982. V. 98, № 2. P. 355–373.
- [4] Kompantseva E.I. *Semisimple rings on completely decomposable abelian groups* // J. of Math. Sciences. 2009. V. 154. № 3. P. 324–332.
- [5] Kompantseva E.I. *Rings on almost completary decomposable abelian groups* // J. of Math. Sciences. 2009. V. 163. № 6. P. 688–693.
- [6] Feigelstosk S. *The additive groups of subdirectly irreducible rings* // Bull. Aust. Math. Soc. 1979. V. 20. P. 164–170.
- [7] Eclof P.C., Meg H.C. *Additive groups of existentially closed rings* // Abelian Groups and Modules: Proceeding of the Udine conference. Vienna-N.York: Springer-Verlag, 1984. P. 243–252.
- [8] Fuchs L. *Infinite Abelian Groups*, Vol. 2. New York-London: Academic Press, 1973. 342 p.
- [9] Jacobson M. *Structure of rings*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1956.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Иммунные и гипериммунные функциональные е-степени

Ключевые слова: операторы перечисления, частично вычислимые операторы, частичные степени, иммунные множества, гипериммунные множества.

Keywords: enumeration operators, partial recursive operators, partial degrees, immune sets, hyperimmune sets.

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [1]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; $A, B, \dots, X, Y$ (с индексами или без) — подмножества ω . Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Для данной частичной функции $\alpha : \omega \rightarrow \omega$ пусть $\text{dom}(\alpha)$, $\text{ran}(\alpha)$ и $\text{graph}(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x) \rangle : x \in \text{dom}(\alpha)\}$ область определения, множество значений и график α , соответственно. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения *тотальных* функций, т.е. таких, что $\text{dom} f = \omega$. Множество тотальных функций обозначим через TF . Множество A называется *однозначным*, если $A = \text{graph}(\alpha)$ для некоторой частичной функции α . Обозначим через SV класс всех однозначных множеств. Мы будем отождествлять функции с их графиками.

Определение 1. Любое всюду определенное однозначное отображение $2^\omega \rightarrow 2^\omega$ называется *оператором*. Любое всюду определенное однозначное отображение $PF \rightarrow PF$ называется *функциональным оператором*.

Всякий функциональный оператор Ψ определяет отображение $\Gamma = \tau\Psi\tau^{-1} : SV \rightarrow SV$ и наоборот, каждое отображение $\Gamma : SV \rightarrow SV$ определяет функциональный оператор $\Psi = \tau^{-1}\Gamma\tau : PF \rightarrow PF$. Пусть Γ_Φ — ограничение оператора Φ на те однозначные множества, для которых $\Phi(A)$ — также однозначное множество, тогда $\Gamma_\Phi : SV \rightarrow SV : \Gamma_\Phi(A) = \Phi(A)$ — частичное отображение и $\Psi = \tau^{-1}\Gamma_\Phi\tau : PF \rightarrow PF$ — частичный функциональный оператор. В этом случае говорят, что Ψ *определяется оператором* Φ .

Определение 2. Отображение $\Phi_t : 2^\omega \rightarrow 2^\omega : \Phi_t(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u \rangle \in W_t \ \& \ D_u \subseteq X]\}$ называется *е-оператором с геделевым номером z* .

Очевидно, что любой е-оператор Φ обладает свойствами:

- (i) *Монотонности* $A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$,
- (ii) *Непрерывности* $(\forall x)[x \in \Phi(A) \Rightarrow (\exists D)[D \subset A \wedge x \in \Phi(D)]]$.

Определение 3. Функциональный оператор называется *частично вычислимым* (ч.в.) [в терминологии Х. Роджерса - *частично рекурсивным*], если он определяется некоторым е-оператором Φ_z .

Определение 4. Ч.в. оператор Ψ называется *вычислимым* [в терминологии Х. Роджерса - *рекурсивным*], если он определяется таким е-оператором Φ_z , что функциональный оператор Ψ является всюду определенным.

Введем обозначения: $E = \{\Phi_z : z \in \omega\}$ — множество всех е-операторов; PC — множество всех ч.в. операторов; C — множество всех вычислимых операторов. В статье будут рассмотрены две сводимости на PF :

$$\alpha \leq_e \beta \iff (\exists \Psi \in PC)[\alpha = \Psi(\beta)]$$

$$\alpha \leq_{ce} \beta \iff (\exists \Psi \in C)[\alpha = \Psi(\beta)]$$

Ранее эти сводимости были детально изучены в статье М.Г. Розинаса [2]

Как обычно, пусть $\deg_e(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_e \alpha\}$ — *частичная степень* и $\deg_{ce}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{ce} \alpha\}$ — *се-степень* функции α . Пусть $\mathbf{L}_e$ — ч.у. множество частичных степеней и $\mathbf{L}_{ce}$ — се-степеней. Множество $\mathbf{L}_e(\leq \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$, состоит из всех частичных степеней $\leq \mathbf{a}$.

Очевидно, что $\alpha \leq_{ce} \beta \rightarrow \alpha \leq_e \beta$ для любых $\alpha, \beta \in PF$, следовательно, любая частичная степень состоит из некоторого ч.у.множества се-степеней. Обозначим через $\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})$ ч.у. множество се-степеней, содержащихся в частичной степени $\mathbf{a} = \deg_e(\alpha)$. Частичная степень $\mathbf{a}$ называется *неразложимой* (на се-степени), если $|\mathbf{L}_e^{ce}(\mathbf{a})| = 1$, в противном случае, $\mathbf{a}$ называется *разложимой*.

Частичная степень (се-степень) называется *тотальной*, если она содержит некоторую тотальную функцию. Ч.у. множество тотальных е-степеней обозначим через $\mathbf{TL}_e$, а тотальных се-степеней — через $\mathbf{TL}_{ce}$.

Нам понадобятся следующие простые утверждения о соотношениях между сводимостями $\leq_e$ и $\leq_{ce}$.

Предложение 1. (i) $(\forall \alpha \in PF)(\forall f \in TF)[\alpha \leq_e f \iff \alpha \leq_{ce} f]$;

(ii) $(\forall A, B)[A \leq_e B \iff \chi_A \leq_{ce} \chi_B \iff \chi_A \leq_e \chi_B]$.

Важную роль в теории вычислимости сыграло понятие гипериммунного множества, которое позволило доказать существование в.п. Т-полных, но не tt-полных множеств. Одно из эквивалентных определений г.и. множества можно сформулировать следующим образом: — *г.и. множество*, если бесконечно и не существует вычислимой функции, мажорирующей прямой пересчет множества. Введем понятие гипериммунной частичной функции.

Определение 5. Частичная функция α называется *иммунной*, если ее множество значений $\text{ran}(\alpha)$ не содержит бесконечных в.п. множеств, т.е. для любого e , если W_e бесконечно, то условие

$$(\forall y)[y \in W_e \rightarrow \exists x[\alpha(x) \downarrow \wedge \alpha(x) = y]]$$

не выполняется.

Обоснованием для данного определения является следующая

Лемма 1. Если α — иммунная функция, то $\text{graph}(\alpha)$ — иммунное множество.

Определение 6. Частичная функция α называется *гипериммунной*, если для любой вычислимой функции g не выполняется условие

$$(\forall x)[\alpha(x) \downarrow \rightarrow \alpha(x) \leq g(x)].$$

Обоснованием для данного термина является следующая

Лемма 2. Если α — г.и. функция, то $\text{graph}(\alpha)$ — г.и. множество.

Заметим, что оба обратных утверждения в общем случае неверны, т.е. существует однозначное иммунное (г.и.) множество A , такое, что функция α , для которой $A = \text{graph}(\alpha)$, не является иммунной (г.и.).

Следствие 1. Если α — иммунная (г.и.) функция, то α не вычислима.

Частичная степень, содержащая хотя бы одну иммунную (г.и.) функцию, называется иммунной (г.и.). Обозначим через **I** и **HI** множество всех иммунных и г.и. частичных степеней, соответственно.

Т-степени иммунных и г.и. множеств рассмотрены в статье [3], е-степени иммунных г.и. множеств рассмотрены в статье [4]. Несмотря на то, что в статье [4] используется термин "частичная степень который по предложению Х. Роджерса применим только к функциональным степеням, фактически в ней рассмотрены иммунные и г.и. е-степени множеств.

Следствие 2. Любая г.и. функция α является иммунной.

Следующая теорема показывает, что свойство частичной степени содержать иммунную (г.и.) функцию наследуется вверх по отношению $\leq$ на множестве частичных степеней.

Теорема 1. Для любых $\alpha, \beta \in PF$

- (i) $[\deg_e(\alpha) \in \mathbf{I} \wedge \alpha \leq_e \beta] \rightarrow \deg_e(\beta) \in \mathbf{I};$
- (ii) $[\deg_e(\alpha) \in \mathbf{HI} \wedge \alpha \leq_e \beta] \rightarrow \deg_e(\beta) \in \mathbf{HI}.$

Частично упорядоченное множество $\mathbf{L}_e$ образует верхнюю полурешетку относительно операции $\vee$ взятия точной верхней границы двух частичных степеней:

$$\deg_e(\alpha) \vee \deg_e(\beta) = \deg_e(\alpha \oplus \beta).$$

Следствие 3. Частично упорядоченные множества **I** и **HI** образуют идеалы в $\mathbf{L}_e$.

В 1955 г. Ю.Т. Медведев [6] построил такую невычислимую частичную функцию α , что для любой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \alpha \rightarrow g$ — вычислимая функция.

Дж. Кейс [7] назвал е-степени, содержащие графики функций, обладающие указанным выше свойством, квазиминимальными.

Следствие 4. Любая ненулевая не иммунная частичная степень квазиминимальна.

Теорема 2. Множество квазиминимальных иммунных частичных степеней несчетно.

Следствие 5. Множество не г.и. не тотальных частичных степеней несчетно.

Оказывается, в отличие от не иммунных частичных степеней, существуют ненулевые тотальные не г.и. частичные степени.

Теорема 3. Множество тотальных не г.и. частичных степеней несчетно.

Дальнейшее усиление свойства гипериммуности функции может идти с помощью сводимости по перечислимости.

Определение 7. Частичная функция α называется *е-гипериммунной*, если для любой тотальной функции g не выполняется условие

$$g \leq_e \alpha \wedge (\forall x)[\alpha(x) \downarrow \rightarrow \alpha(x) \leq g(x)].$$

Обоснованием для этих терминов является понятие е-г.и. множества, введенное в статье [4] и следующая

Лемма 3. Если для некоторой частичной функции α выполнено

$$g \leq_e \alpha \rightarrow (\exists x)[\alpha(x) \downarrow \wedge \alpha(x) \leq g(x)]$$

для любой тотальной функции g , то $\text{graph}(\alpha)$ — е-г.и. множество.

Существование е-г.и. множеств дает следующая

Теорема 4. Для любой функции $\beta \in PF$ существует е-г.и. функция γ , такая, что $\beta <_e \gamma$.

Заметим, что в любой квазиминимальной частичной степени все частичные функции являются квазиминимальными. Иная ситуация для е-гипериммунных частичных степеней.

Теорема 5. Для любой е-г.и. $\alpha \in PF$ существует не е-г.и. $\beta \in PF$ такая, что $\beta \equiv_e \alpha$.

Предложение 8. Если $0_e \neq a = \deg_e(\alpha)$ — неразложимая частичная степень, то a — казиминимальная.

Итак, множество неразложимых частичных степеней является подмножеством множества квазиминимальных частичных степеней. Возникает естественный вопрос: всякая ли квазиминимальная частичная степень неразложима? На этот вопрос дает отрицательный ответ следствие 6.

Теорема 6. Любая е-г.и. частичная степень разложима.

Следствие 6. Существуют квазиминимальные разложимые частичные степени.

Литература

1. Rogers H., Jr. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. McGraw-Hill. New York. 1967.
2. Розинас М.Г. Частичные степени и г-степени // Сибирский матем.ж. 1974. Т. XV, № 6. С. 1323–1331.
3. Miller W., Martin D.A. The degrees of hyperimmune sets // Z.Math. Logik Grundlag. Math. 14(1968). P. 159–166.
4. Розинас М.Г. Частичные степени иммунных и гипериммунных множеств // Сибирский матем.ж. 1978. Т. XIX, № 5. С. 866–870.
5. Солон Б.Я. е-гипериммунные множества // Сиб.матем.ж. 1992. Т. 33, № 2. С. 211–214.
6. Medvedev Yu.T. Degrees of difficulty of the mass problem // Dokl. Acad. Nauk SSSR. 104(1955). С. 501–504.
7. Case J. Enumeration reducibility and partial degrees // Annals Math. Logic. 2(1971). P. 419–439.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

С. И. Хашин¹

Алгебраический подход к методам Рунге-Кутта

Ключевые слова: методы Рунге-Кутта, упрощающее предположение.

Keywords: Runge-Kutta methods, simplifying assumptions.

1. В работе предложен новый, алгебраический подход к решению условий порядка (уравнений Бутчера). Для этого для произвольной матрицы коэффициентов вводятся две конечномерные, коммутативные, ассоциативные алгебры, называемые *верхней и нижней алгебрами Бутчера*. В результате систему уравнений удастся записать полностью в алгебраической форме. Выполнение этих уравнений оказывается эквивалентно некоторым ограничениям на размерности компонент нижней алгебры Бутчера. С вычислительной точки зрения это приводит к тому, что систему уравнений Бутчера удастся заменить на эквивалентную, но содержащую гораздо меньше уравнений (исходная система уравнений сильно избыточна и содержит уравнений гораздо больше, чем переменных).

2. Предложенный метод позволил найти несколько новых, ранее не известных семейств методов РК:

- а) Трехмерное семейство методов $RK(5, 6)$, ранее не известное.
- б) Два трехмерных семейства 7-стадийных методов порядка 6.
- в) Получены аналитические выражения для 4-мерного семейства 9-стадийных методов порядка 7.

3. Разработаны методы численного решения уравнений Бутчера. При этом находятся не только отдельные решения, но и локальная размерность многообразия решений в окрестности найденного решения. Численно найдено большое количество методов порядков 6, 7, 8 не входящие в известные семейства.

Литература

1. Хашин С.И. Home page :
http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/khashin/index_r.html 2013.
2. Khashin S.I. Butcher algebras for Butcher systems // *Numerical Algorithms*, 61(2):1–11, 2012. DOI:10.1007/s11075-012-9647-x.
3. Khashin S.I. Symmetries of runge-kutta methods // *Numerical Algorithms*, 65(3):597–609, 2014. DOI:10.1007/s11075-014-9829-9.
4. Хашин С.И. Оценка погрешности классических методов Рунге-Кутты // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2014, 54(5):24–32, DOI:10.7868/S0044466914050172.
5. Хашин С.И. Основные свойства верхней и нижней алгебр Бутчера // *Вестник ИвГУ, Иваново*, (2):176–182, 2011.
6. Khashin S.I. A Symbolic-Numeric Approach to the Solution of the Butcher Equations // *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 17(1):555–569, 2009.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Е. Е. Ширшова¹

Частично упорядоченные группы

Ключевые слова: группа, частичный порядок.

Keywords: group, partial order.

Пусть G – аддитивная частично упорядоченная группа.

Определение 1. G называется направленной группой, если для любых $a, b \in G$ существует $c \in G$ для которого $a, b \leq c$.

Класс направленных групп включает в себя многие известные классы частично упорядоченных групп, например, решеточно упорядоченные группы и линейно упорядоченные группы.

Определение 2. Подгруппа M группы G называется выпуклой, если из $a \leq g \leq b$ следует $g \in M$ для всех $a, b \in M$ и $g \in G$.

Изучение свойств множества выпуклых подгрупп оказывается необходимым при решении многих задач теории частично упорядоченных групп.

Определение 3. Говорят, что элемент b бесконечно мал по сравнению с элементом $a > 0$ в группе G ($b \ll a$), если $nb \leq a$ для всех целых чисел n .

Пусть $M_a = \{g \in G | g \ll a\}$ для $a > 0 \in G$.

Теорема 1. Если группа G линейно упорядочена, то M_a – выпуклая подгруппа в G .

Определение 4. Говорят, что подгруппы $H \subset K$ образуют скачок, если из $H \subseteq L \subseteq K$ следует $H = L$ или $L = K$ для любой подгруппы L в G .

Теорема 2. Если группа G линейно упорядочена, и $H \subset K$ – скачок выпуклых подгрупп, то $H = M_k$ для всех $k > 0 \in K \setminus H$.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

О группах гомологий пространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 7 точками разбиения границы

Ключевые слова: NEDI, растровое изображение, интерполяция.

Keywords: NEDI, image resizing.

Рассматривается двумерный симплекс σ^2 с вершинами D_0, D_1, D_2 , граница которого подразделена. Пусть разбиение границы содержит, кроме трех вершин симплекса, еще не более семи точек, причем на грани D_0D_1 находится не более чем p точек разбиения, на грани D_1D_2 – не более чем q точек, на грани D_2D_0 – не более чем s точек, $p + q + s = n$, $0 \leq n \leq 7$, $p, q, s \geq 0$. Такое разбиение границы назовем (p, q, s) –разбиением. Отождествляя множество разбиений границы симплекса с полиэдром $\nabla_{p,q,s}^n$ получаем сюръективное отображение

$$\pi : Tr(p, q, s) \rightarrow \nabla_{p,q,s}^n,$$

сопоставляющее триангуляциям симплекса σ^2 соответствующие разбиения его границы. Это отображение не является взаимно однозначным, поскольку триангуляции с границы симплекса на внутренность продолжаются неоднозначно. Будем рассматривать расслоение $\tilde{\nabla}_{p,q,s}^k$ над каждым полиэдром $\nabla_{p,q,s}^k$, ($2 \leq k \leq n$), содержащее

$$T_k = C_{k-1}^{p-1} + C_{k-1}^{q-1} + C_{k-1}^{s-1} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q C_{p-i+j-1}^{p-i} C_{q+s+i-j-1}^{s-1}$$

слоев ($T_0 = T_1 = 1$), каждый из которых соответствует одному способу продолжения триангуляции с границы на внутренность симплекса σ^2 [1]. В результате получаем клеточный комплекс $W_1(\nabla^7)$, который назовем пространством триангуляций двумерного симплекса с не более чем семью точками разбиения границы.

Наша цель – найти группы гомологий этого клеточного комплекса.

Для нахождения групп гомологий используем цепной комплекс $C = \oplus_n C_n$, соответствующий нашему клеточному комплексу, и построим матрицы инцидентности nE , определяющие отображение $C_{n+1} \rightarrow C_n$. Верхний вход nE содержит все $(n+1)$ –мерные клетки $((n+1)$ –слои) полиэдра $\tilde{\nabla}_{p,q,s}^{n+1}$, ($p + q + s = n + 1$, $p, q, s \geq 0$), левый вход – все n –мерные

Затем нумеруем n -слои, уменьшая на 1 вес v_1 и фиксируем набор весов $v_2, \dots, v_q$ так, чтобы $v_1 + v_2 + \dots + v_q = n$, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_q$. Аналогично рассматриваем все перестановки этого набора весов и т. д. Всего в таком расслоении имеется C_n^p n -клеток (слоев).

Далее в базисе группы C_n стоят блоки n -клеток подкомплексов $\tilde{\nabla}_{p,q,s}^n$ ($p, q, s > 0$) в порядке

$$\tilde{\nabla}_{p,q,s}^n, \tilde{\nabla}_{p,s,q}^n, \tilde{\nabla}_{q,p,s}^n, \tilde{\nabla}_{s,p,q}^n, \tilde{\nabla}_{q,s,p}^n, \tilde{\nabla}_{s,q,p}^n, \quad p + q + s = n, \quad p \geq q \geq s.$$

В подкомплексе $\tilde{\nabla}_{p,q,s}^n$ ($p, q, s > 0$) разобьем n -слои на группы подблоков: сначала нумеруются слои, соответствующие триангуляциям симплекса σ^2 с максимальной суммой весов точек подразбиения на ребре D_0D_1 , затем на ребре D_1D_2 , наконец, на ребре D_2D_0 . Эти блоки вместе содержат $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{q-1} + C_{n-1}^{s-1}$ n -клеток (слоев). В каждом блоке n -слои нумеруются так же, как в подкомплексе $\tilde{\nabla}_{p,q,0}^n$ с той только разницей, что точки подразбиения лежат на всех ребрах симплекса, поэтому следует учитывать веса $t_1, \dots, t_s$ точек подразбиения ребра D_2D_0 . Все эти клетки соответствуют триангуляциям симплекса σ^2 без внутреннего подсимплекса τ^2 , имеющего вершины на всех трех гранях σ^2 . За ними следуют n -клетки, соответствующие триангуляциям симплекса σ^2 с внутренним подсимплексом τ^2 . Порядок следования этих клеток зависит от расположения вершин подсимплекса τ^2 на гранях симплекса σ^2 . Сначала берутся клетки, отвечающие случаю, когда две вершины τ^2 являются первыми точками подразбиения ребер D_0D_1 и D_1D_2 соответственно, а третья вершина τ^2 пробегает все точки подразбиения грани D_2D_0 . Нумерация клеток, соответствующих триангуляциям симплекса σ^2 с фиксированной третьей вершиной τ^2 проводится также, как и ранее (в соответствии с изменением весов точек подразбиения). Затем вторую вершину τ^2 перемещаем во вторую точку подразбиения ребра D_1D_2 , а третьей вершине разрешаем пробегать все точки подразбиения грани D_2D_0 и т. д. После того, как вторая вершина τ^2 пробежит все точки подразбиения ребра D_1D_2 , сдвигаем первую вершину τ^2 на ребре D_0D_1 во вторую точку подразбиения этой грани симплекса σ^2 и начинаем рассматривать триангуляции симплекса σ^2 , когда вторая и третья вершины τ^2 пробегают точки подразбиения граней D_1D_2 и D_2D_0 в том же порядке, что и выше. Продолжаем этот процесс, пока вершины τ^2 не пробегут все точки подразбиения граней симплекса σ^2 .

Базис группы C_{n+1} строится аналогично [2].

Главной трудностью в процессе вычисления групп гомологий пространства триангуляций симплекса σ^2 является то, что размеры матриц инцидентности nE растут очень быстро. Матрица 4E имеет размер 66×168 , матрица 5E – размер 168×416 . Матрица инцидентности 4E имеет следу-

где F_i – матрица размера 8×16 ($i = 1, \dots, 6$), $J_i - 1 \times 6$ ($i = 1, \dots, 6$). Наконец, G имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix} G_1 & & G_3 & & \\ & G_2 & & G_5 & \\ & & G_4 & & G_6 \end{pmatrix},$$

где каждый блок G_i имеет размеры 9×16 . H является "столбцом" из трех матриц размера 9×15 .

Рассматриваются следующие элементарные преобразования столбцов матрицы ${}^{n-1}E$:

- 1) перестановка i -го и j -го столбцов;
- 2) умножение i -го столбца на -1 ;
- 3) прибавление к i -му столбцу j -го столбца.

В матрице nE при этом будут происходить соответствующие согласованные преобразования строк:

- 1) перестановка i -й и j -й строк;
- 2) умножение i -й строки на -1 ;
- 3) вычитание i -й строки из j -й.

В результате согласованных преобразований матриц инцидентности ${}^0E, {}^1E, {}^2E, {}^3E, {}^4E, {}^5E$ клеточного комплекса $W_1(\nabla^7)$ получаем канонический вид этих матриц и их ранги. Ранги матриц инцидентности позволяют найти числа Бетти с помощью формул

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \alpha_1 - \text{rang}^1 E, \quad p_k = \alpha_k - \text{rang}^k E - \text{rang}^{k-1} E \quad (k = 2, \dots, 6),$$

где α_k – число k -мерных клеток. Получаем

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 1, \quad p_4 = 0, \quad p_5 = 0.$$

Так как коэффициенты кручения отсутствуют, то получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть $W_1(\nabla^7)$ – пространство триангуляций двумерного симплекса σ^2 с не более чем 7 точками разбиения границы. Пусть триангуляции с границы симплекса σ^2 продолжаются на внутренность без добавления новых точек разбиения. Тогда группы гомологий H_n этого пространства тривиальны при $n = 1, 2, 4, 5$, а при $n = 0, 3$ являются свободными циклическими группами [3].

При $n = 7$ были рассмотрены подкомплексы клеточного комплекса $W_1(\nabla^7)$, соответствующие (p, q, s) – разбиениям всех возможных видов с условием $p \geq q \geq s \geq 0$, $p + q + s = 7$, т. е. $\tilde{\nabla}_{7,0,0}^7, \tilde{\nabla}_{6,1,0}^7, \tilde{\nabla}_{5,2,0}^7, \tilde{\nabla}_{5,1,1}^7, \tilde{\nabla}_{4,3,0}^7, \tilde{\nabla}_{4,2,1}^7, \tilde{\nabla}_{3,3,1}^7, \tilde{\nabla}_{3,2,2}^7$.

Группы гомологий H_n ($n = 1, 2, \dots, 6$) подкомплекса $\tilde{\nabla}_{7,0,0}^7$, очевидно, тривиальны.

Матрицы инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}_{6,1,0}^7$ имеют следующие ранги

$$\text{rang}^0 E = 0, \quad \text{rang}^1 E = \text{rang}^4 E = 2, \quad \text{rang}^2 E = 1,$$

$$\text{rang}^3 E = \text{rang}^6 E = 3, \quad \text{rang}^5 E = 4,$$

откуда получаем числа Бетти $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 0$.

Матрицы инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}_{5,2,0}^7$ имеют размеры: ${}^1E - 2 \times 4$, ${}^2E - 4 \times 7$, ${}^3E - 7 \times 11$, ${}^4E - 11 \times 16$, ${}^5E - 16 \times 21$, ${}^6E - 21 \times 21$. В результате согласованных преобразований получаем их ранги:

$$\begin{aligned} \text{rang } {}^1E = \text{rang } {}^2E = 2, \quad \text{rang } {}^3E = 5, \quad \text{rang } {}^4E = 6, \quad \text{rang } {}^5E = 10, \\ \text{rang } {}^6E = 11, \end{aligned}$$

откуда числа Бетти равны $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 0$.

Матрицы инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}_{4,3,0}^7$ имеют размеры: ${}^1E - 2 \times 4$, ${}^2E - 4 \times 8$, ${}^3E - 8 \times 15$, ${}^4E - 15 \times 25$, ${}^5E - 25 \times 35$, ${}^6E - 35 \times 35$. Получены ранги этих матриц:

$$\begin{aligned} \text{rang } {}^1E = \text{rang } {}^2E = 2, \quad \text{rang } {}^3E = 6, \quad \text{rang } {}^4E = 9, \quad \text{rang } {}^5E = 16, \\ \text{rang } {}^6E = 19, \end{aligned}$$

откуда числа Бетти равны $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 0$.

Коэффициенты кручения во всех этих случаях отсутствуют. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Группы гомологий H_n клеточных комплексов $\tilde{\nabla}_{6,1,0}^7$, $\tilde{\nabla}_{5,2,0}^7$, $\tilde{\nabla}_{4,3,0}^7$ для $n = 1, 2, \dots, 6$ тривиальны.*

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}_{5,1,1}^7$ матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E - 3 \times 7$, ${}^2E - 7 \times 11$, ${}^3E - 11 \times 16$, ${}^4E - 16 \times 22$, ${}^5E - 22 \times 28$, ${}^6E - 28 \times 22$.

Например, 5E имеет блочную структуру

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & & \\ B_1 & & C_1 & \\ & B_2 & C_2 & \\ & & & D \end{pmatrix},$$

где $A_i - 1 \times 6$ ($i = 1, 2$), $B_i - 5 \times 6$ ($i = 1, 2$), $C_i - 5 \times 16$ ($i = 1, 2$), $D - 11 \times 16$.

В результате согласованных преобразований матриц инцидентности получаются их ранги:

$$\begin{aligned} \text{rang } {}^1E = \text{rang } {}^2E = 3, \quad \text{rang } {}^3E = \text{rang } {}^4E = 8, \quad \text{rang } {}^5E = 14, \\ \text{rang } {}^6E = 12, \end{aligned}$$

значит, $p_1 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$, $p_2 = 1$, $p_6 = 2$. Коэффициенты кручения отсутствуют. Таким образом, получаем утверждение.

Теорема 3. *Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}_{5,1,1}^7$, при $n = 1, 3, 4, 5$ тривиальны, при $n = 0, 2$ они являются свободными циклическими группами, H_6 есть прямое произведение двух свободных циклических групп [4].*

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}_{3,3,1}^7$ матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E - 3 \times 8$, ${}^2E - 8 \times 18$, ${}^3E - 18 \times 36$, ${}^4E - 36 \times 56$, ${}^5E - 56 \times 70$, ${}^6E - 70 \times 50$.

К примеру, матрицы 4E и 5E имеют блочную структуру

$${}^4E = \begin{pmatrix} A_1 & & B_1 & & \\ & & B_2 & & \\ & A_2 & & B_3 & \\ & & & B_4 & \\ D_1 & D_2 & & & C \\ & & F_1 & & K_1 \\ & & & F_2 & K_2 \end{pmatrix}, \quad {}^5E = \begin{pmatrix} L_1 & M_1 & \\ L_2 & & M_2 \\ & N_1 & \\ & & N_2 \\ & P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

где $A_i - 4 \times 10$ ($i = 1, 2$), $B_i - 4 \times 11$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $C - 6 \times 14$, $D_i - 6 \times 10$ ($i = 1, 2$), $F_i - 7 \times 11$, $K_i - 7 \times 14$ ($i = 1, 2$), $L_i - 10 \times 20$ ($i = 1, 2$), $M_i - 10 \times 25$ ($i = 1, 2$), $N_i - 11 \times 25$ ($i = 1, 2$), $P_i - 14 \times 25$ ($i = 1, 2$).

Ранги матриц инцидентности равны:

$$\text{rang } {}^1E = 3, \quad \text{rang } {}^2E = 5, \quad \text{rang } {}^3E = 13, \quad \text{rang } {}^4E = 21, \quad \text{rang } {}^5E = 34, \\ \text{rang } {}^6E = 33,$$

значит, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 2$, $p_5 = 1$, $p_6 = 3$. Коэффициенты кручения отсутствуют. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}_{3,3,1}^7$, при $n = 1, 2, 3$ тривиальны, H_5 – свободная циклическая группа, H_4 есть прямое произведение двух свободных циклических групп, H_6 есть прямое произведение трех свободных циклических групп [4].

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}_{4,2,1}^7$, матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E - 3 \times 8$, ${}^2E - 8 \times 17$, ${}^3E - 17 \times 29$, ${}^4E - 29 \times 45$, ${}^5E - 45 \times 56$, ${}^6E - 56 \times 41$.

Матрицы 4E и 5E имеют блочную структуру

$${}^4E = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & & & \\ B_1 & & C & F_1 & \\ & B_2 & & F_2 & \\ & & D & & L \\ & & & K & M_1 \\ & & & & M_2 \end{pmatrix}, \quad {}^5E = \begin{pmatrix} N & P_1 & \\ & P_2 & \\ Q & & R \\ & S & T \\ & & U \end{pmatrix},$$

где $A_i - 1 \times 5$ ($i = 1, 2$), $B_i - 4 \times 5$ ($i = 1, 2$), $C - 4 \times 10$, $D - 6 \times 10$, $F_i - 4 \times 11$ ($i = 1, 2$), $K - 7 \times 11$, $L - 6 \times 14$ ($i = 1, 2$), $M_i - 7 \times 14$ ($i = 1, 2$), $N - 5 \times 15$, $P_i - 5 \times 16$ ($i = 1, 2$), $Q - 10 \times 15$, $R - 10 \times 25$, $S - 11 \times 16$, $T - 11 \times 25$, $U - 14 \times 25$.

Ранги матриц инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}_{4,2,1}^7$, равны:

$$\text{rang } {}^1E = 3, \quad \text{rang } {}^2E = 5, \quad \text{rang } {}^3E = 12, \quad \text{rang } {}^4E = 17, \quad \text{rang } {}^5E = 28, \\ \text{rang } {}^6E = 25,$$

откуда $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$, $p_6 = 3$. Коэффициенты кручения отсутствуют.

Теорема 5. Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}_{4,2,1}^7$, при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ тривиальны, H_0 – свободная циклическая группа, H_6 – прямое произведение трех свободных циклических групп.

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}_{3,2,2}^7$, матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E - 1 \times 9$, ${}^2E - 9 \times 23$, ${}^3E - 23 \times 47$, ${}^4E - 47 \times 73$, ${}^5E - 73 \times 79$, ${}^6E - 79 \times 55$.

Матрицы инцидентности 4E и 5E имеют следующий блочный вид:

$${}^4E = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & & & & \\ & A_2 & C_2 & & & \\ & B_1 & & D_1 & & \\ B_2 & & & D_2 & & \\ & & & & D_3 & \\ & & F & L_1 & L_2 & \\ & & & L_3 & L_4 & \\ & & & & L_5 & L_6 \end{pmatrix}, \quad {}^5E = \begin{pmatrix} & K_1 & & K_2 \\ & M_1 & & M_2 \\ N_1 & P_1 & & \\ N_2 & & P_2 & \\ N_3 & & & \end{pmatrix},$$

где $A_i - 4 \times 10$ ($i = 1, 2$), $B_i - 6 \times 10$ ($i = 1, 2$), $C_i - 4 \times 11$ ($i = 1, 2$), $D_i - 6 \times 14$ ($i = 1, 2, 3$), $F - 7 \times 11$ ($i = 1, 2$), $L_i - 7 \times 14$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), $K_i - 10 \times 25$ ($i = 1, 2$), $M_i - 15 \times 25$ ($i = 1, 2$), $N_i - 14 \times 29$ ($i = 1, 2, 3$), $P_i - 14 \times 29$ ($i = 1, 2$).

В результате проведения согласованных преобразований матриц инцидентности получаем ранги этих матриц:

$$\text{rang } {}^1E = 3, \quad \text{rang } {}^2E = 6, \quad \text{rang } {}^3E = 16, \quad \text{rang } {}^4E = 29, \quad \text{rang } {}^5E = 43,$$

$$\text{rang } {}^6E = 35,$$

откуда $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$, $p_5 = p_6 = 1$. Коэффициенты кручения отсутствуют.

Теорема 6. Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}_{3,2,2}^7$, при $n = 1, 2$ тривиальны, при $n = 0, 3, 5, 6$ – это свободные циклические группы, H_4 есть прямое произведение двух свободных циклических групп.

Литература

1. Яблокова С. И. Триангуляции двумерного симплекса, все вершины которых лежат на его границе // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль : ЯрГУ, 1994. С. 69–87.
2. Яблокова С. И. О группах гомологий пространства триангуляций двумерного симплекса, все вершины которых лежат на его границе // Математика, кибернетика, информатика : труды международной научной конференции памяти А. Ю. Левиана. Ярославль : ЯрГУ, 2008. С. 183–196.
3. Яблокова С. И. Группы гомологий пространств триангуляций двумерного симплекса // Математика в Ярославском университете : сборник обзорных статей. К 35-летию математического факультета. Ярославль, 2011. С. 207–218.
4. Yablokova S. I. On homology groups of one CW-space // Yaroslavl International Conference on Geometry, Topology and Applications. Yaroslavl, 2013. P. 125–130.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Р. Р. Яруллин¹

Основные свойства еТ-сводимости и верхней полурешетки еТ-степеней

Ключевые слова: еТ-сводимость, еТ-степени, вычислимо перечислимые еТ-степени, тотальные еТ-степени.

Keywords: eT-reducibility, eT-degrees, semilattice eT-degrees.

Обозначения и терминология взяты из [1] за некоторым исключением. Через $\mathbf{D}_e$ и $\mathbf{D}_T$ обозначим классы всех е-степеней и Т-степеней соответственно.

Цель статьи - изучение основных свойств еТ-сводимости, а также порожденного ею класса $\mathbf{D}_{eT}$. Впервые эта сводимость упоминается в [2] при рассмотрении структуры е-степеней, однако как отдельная сводимость, она пока что подробно не изучалась.

Определение 1. $A \leq_{eT} B \Leftrightarrow A \leq_e B \wedge A \leq_T B$.

Легко видеть, что еТ-сводимость представляет собой самую слабую сводимость из тех, что являются сводимостями по разрешимости и перечислимости сразу.

Предложение 1. Для любого множества A справедливо $\deg_{eT} A = \deg_e A \cap \deg_T A$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \deg_T A \cap \deg_e A &= \{X : X \equiv_T A\} \cap \{X : X \equiv_e A\} = \\ &= \{X : X \equiv_T A \wedge X \equiv_e A\} = \{X : X \equiv_{eT} A\}. \end{aligned}$$

Простейшие свойства $\mathbf{D}_{eT}$ приведены в следующей теореме.

Теорема 2. (i) Порядок на $\mathbf{D}_{eT}$ частичный, т.е. существуют множества, несравнимые относительно $\leq_{eT}$.

(ii) $\mathbf{D}_{eT}$ есть верхняя полурешетка с наименьшей верхней гранью $A \oplus B$ для любых двух множеств A и B .

(iii) В $\mathbf{D}_{eT}$ имеется наименьший элемент $\mathbf{0}_{eT}$, состоящий из всех вычислимых множеств и только из них.

Доказательство. Пункты (i)-(ii) сразу следуют из аналогичных свойств для е-сводимости и Т-сводимости, а также определения еТ-сводимости.

Докажем пункт (iii). Как известно, наименьшими элементами в $\mathbf{D}_T$ и $\mathbf{D}_e$ будут соответственно $\mathbf{0}_T = \deg_T A$, где A - вычислимое множество, и $\mathbf{0}_e = \deg_e B$, где B - вычислимо перечислимое множество. Легко видеть, что $\mathbf{0}_T \subset \mathbf{0}_e$. Из предложения 1 следует, что наименьшим элементов в $\mathbf{D}_{eT}$ будет $\mathbf{0}_{eT} = \mathbf{0}_T \cap \mathbf{0}_e$, т.е. степень, состоящая из всех вычислимых множеств и только из них.

Далее, введем скачок на еТ-степенях. Если $\gamma \sqsubseteq$ некоторая сводимость, то под γ -скачком множества A будем понимать множество $J_\gamma(A)$ такое, что $A <_\gamma J_\gamma(A)$ и $A \equiv_\gamma B \Rightarrow J_\gamma(A) \equiv_\gamma J_\gamma(B)$.

Напомним, что Т-скачком множества A называется множество $J_T(A) = K^A = \{x : x \in W_x^A\}$, а е-скачком множество $J_e(A) = A \oplus \overline{A^e}$, где $A^e = \{x : x \in \Phi_x(A)\}$, и Φ_x - некоторый е-оператор.

Если скачок корректно определен на множествах, то его можно перенести на степени. Для произвольной γ -степени, если $\mathbf{a}_\gamma = \deg_\gamma(A)$, то γ -скачком для степени $\mathbf{a}_\gamma$ назовем степень $\mathbf{a}'_\gamma = \deg_\gamma(J_\gamma(A))$.

Теорема 3. *Операции Т-скачка и е-скачка корректно определены на еТ-степенях.*

Доказательство. Покажем корректность для Т-скачка. Как известно, для любого множества A справедливо $A \leq J_T(A)$ (см. например [1, с. 328], откуда, в свою очередь, следует, что $A <_T J_T(A) \wedge A \leq J_e(A)$, т.е. $A <_{eT} J_T(A)$.

Далее, используя определению еТ-сводимости и некоторые свойства Т-скачка, имеем

$$A \leq_{eT} B \Rightarrow A \leq_T B \Rightarrow J_T(A) \leq_1 J_T(B) \Rightarrow J_T(A) \leq_{eT} J_T(B).$$

Таким образом, Т-скачок корректно определен на еТ-степенях. Для е-скачка рассуждения аналогичные.

Для дальнейших рассуждений в качестве скачка на еТ-степенях зафиксируем Т-скачок, т.е. $\forall A [J_{eT}(A) = J_T(A)]$. В таком случае, через $\mathbf{0}'_{eT}$ будет обозначаться еТ-степень множества $K = \{x : x \in W_x\}$.

Перейдем к вопросу о рассмотрении вычислимо перечислимых степеней (всюду далее просто в.п.). Степень называется в.п., если она содержит в.п. множество. Для класса $\mathbf{D}_T$ справедливо, что если A - в.п. множество,

то $0_T \leq \deg_T(A) \leq 0'_T$. В классе же D_e всего одна в.п. степень - это наименьший элемент 0_e .

Теорема 4. *Если еТ-степень в.п., то она состоит только из в.п. множеств.*

Доказательство. Пусть A - в.п. множество, тогда по предложению имеем $\deg_{eT} A = \deg_e A \cap \deg_T A$, причем $\deg_e A = 0_e$ не содержит никаких других множеств, кроме в.п., а значит и $\deg_{eT} A$ не содержит никаких других множеств, кроме в.п.

Теорема 5. *Все степени, расположенные между 0_{eT} и $0'_{eT}$, в.п.*

Доказательство. Пусть для некоторого множества A справедливо $A \leq_{eT} K$, тогда $A \leq_e K$, т.е. A обязано быть в.п.

Напомним, что степень называется тотальной, если она содержит график некоторой тотальной (всюду определенной) функции. Под графиком некоторой функции ψ понимается множество $\text{graph } \psi = \{\langle x, y \rangle : \psi(x) = y\}$, где $\langle x, y \rangle$ - канторовский номер упорядоченной пары (x, y) .

Всякая Т-степень тотальна, т.к. вместе с каждым множеством она содержит график его характеристической функции. Существование нетотальных е-степеней впервые показал Ю.Т. Медведев [3] построением не в.п. множества A такого, что для любой тотальной функции f из того, что $\text{graph } f \leq_e A$ следует, что f вычислимая функция. Эти множества и е-степени, их содержащие, были названы квазиминимальными.

Теорема 6. *Существуют нетотальные еТ-степени.*

Доказательство. еТ-степень квазиминимального множества нетотальна.

Используя тот факт, что для всех тотальных функций f и g [1, с. 200] справедливо

$$\text{graph } f \leq_e \text{graph } g \Leftrightarrow \text{graph } f \leq_T \text{graph } g,$$

класс D_T можно изоморфно вложить в D_e посредством отображения

$$\varepsilon : D_T \rightarrow D_e : \varepsilon(\deg_T(A)) = \deg_e(c_A).$$

Таким образом, всякой Т-степени посредством ε соответствует некоторая тотальная е-степень, т.е. если через T_e обозначить класс всех тотальных е-степеней, то классы D_T и T_e будут изоморфны. Построим изоморфное вложение D_T в D_{eT} .

Пусть T_{eT} - класс тотальных еТ-степеней, тогда отображение $\delta : T_e \rightarrow T_{eT} : \delta(\deg_e(A)) = \deg_{eT}(A)$, где $A = \text{graph } f$ для некоторой тотальной функции f , будет изоморфным вложением T_e в D_{eT} , и в этом случае композиция отображений $\varepsilon \cdot \delta$ есть изоморфное вложение D_T в D_{eT} .

Литература

1. Роджерс Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. М. : Мир, 1972.
2. Ходжаянц М. Ю. *О структуре ϵ -степеней* // ДАН АрмССР. 1979. Т. 68, № 1. С. 35–38.
3. Медведев Ю. Т. *Степени трудности массовых проблем* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 501–504.

Поступила в редакцию 26.11.2015.

Содержание

1. Азаров Д. Н. <i>Научная и педагогическая деятельность Д. И. Молдавского</i>	3
2. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. <i>Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина и Кокстера</i> . .	11
3. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. <i>О разрешимости проблемы степенной сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с объединением</i>	17
4. Безверхний Н. В. <i>Описание классов сопряженности в группах с условиями малого сокращения $C(3) - T(6)$</i>	19
5. Ваганов С. Е. <i>Методы удвоения растровых изображений</i>	33
6. Добрынина И. В., Инченко О. В. <i>О некоторой проблеме в группах Кокстера с древесной структурой</i>	35
7. Добрынина И. В., Каган Д. З. <i>Ширина вербальных подгрупп для различных групповых конструкций</i>	41
8. Dudkin F. A. <i>On the isomorphism and embedding problems for generalized Baumslag-Solitar groups</i>	45
9. Дурнев В. Г. <i>Об уравнениях в свободных группах</i>	49
10. Казарин Л. С. <i>Распознавание групп с помощью спектра и разрешимого графа</i>	59
11. Казарин Л. С. <i>Группы с факторизацией и характеры конечных групп</i>	61
12. Никонова П. Н., Компанцева Е. И. <i>Ассоциативные кольца на абелевых группах без кручения</i>	63
13. Солон Б. Я. <i>Иммунные и гипериммунные функциональные e-степени</i>	69
14. Хашин С. И. <i>Алгебраический подход к методам Рунге-Кутты</i>	73
15. Ширшова Е. Е. <i>Частично упорядоченные группы</i>	75
16. Яблокова С. И. <i>О группах гомологий пространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 7 точками разбиения границы</i> . . .	77
17. Яруллин Р. Р. <i>Основные свойства eT-сводимости и верхней полурешетки eT-степеней</i>	85