Математика и ее приложения. 2004. 1. С. 23 – 32

УДК 514.17

Е. П. Барановский[1]

СОВЕРШЕННЫЕ РЕШЁТКИ, ЗАДАННЫЕ РЕПЕРАМИ, ПРИВЕДЁННЫМИ ПО ЗЕЛЛИНГУ, И Z-СОВЕРШЕННОСТЬ[2]

Ключевые слова: совершенные решётки и положительные квадратичные формы, репер Зеллинга, приведение по Зеллингу, z-совершенность

Аннотация

Первая и вторая совершенные решётки Вороного при всех размерностях n, и все совершенные решётки для размерностей $n \leq 6$ заданы реперами, приведёнными по Зеллингу; все такие реперы оказались составленными из минимальных векторов решёток; такое свойство решёток названо z-совершенностью. На основе данной n-мерной совершенной решётки предложен способ построения совершенных решёток размерности $n+1$.

Abstract

E. P. Baranovskii, On the Selling frames of perfect lattices and on z-perfect lattices, Matematika i eyo prilogzeniya, (2004), no. 1, pp. 23 – 32.

A lattice is called z-perfect if one of its Selling frames cosists of only the vectors of minimal length. It is proved that the first Γ_0^n and the second Γ_1^n perfect lattices of Voronoi, and all n-dimensional perfect lattices for $n \leq 6$ are z-perfect. It is presented a new method for constructing $(n+1)$-dimensional perfect lattices on the base of a given n-dimensional perfect lattice.

§ 1. Задание некоторых совершенных решёток приведёнными по Зеллингу реперами

Пусть $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E}_n)$ — n-мерная решётка в евклидовом пространстве E^n, заданная репером

$$\mathcal{E}_n = \{O; \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\},$$

[1]Ивановский государственный университет

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01.00010).

где O — начало репера (начальная точка векторов репера), а векторы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы. И пусть $f = f(x^1, ..., x^n) = f(\mathcal{E}_n)$ — соответствующая реперу $\mathcal{E}_n$ положительная квадратичная форма (ПКФ), A — матрица этой формы, то есть матрица Грама репера $\mathcal{E}_n$. Добавив к векторам репера $\mathcal{E}_n$ вектор $\bar{e}_0 = -\sum_{i=1}^n \bar{e}_i$, получим *реперqq Зеллинга* $Z = Z(\Gamma)$ *решётки* Γ*:*

$$Z(\Gamma) = \{\bar{e}_0, \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}. \tag{1}$$

Скалярные произведения $\{g_{kl}\}$, $(k, l = 0, 1, ..., n; k \neq l)$ называются *параметрами Зеллинга решётки* Γ *и репера* $\mathcal{E}_n$. Легко видеть, что задание репера и решётки параметрами Зеллинга эквивалентно заданию коэффициентами соответствующей ПКФ. Дополнив матрицу A репера $\mathcal{E}_n$ строкой и столбцом, соответствующими вектору $\bar{e}_0$, получим *матрицу Зеллинга* этого репера (и решётки $\Gamma(\mathcal{E}_n)$):

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & a_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрице Зеллинга поставим в соответствие квадратичную форму с этой матрицей (z-*форму*):

$$ZF(x^0, x^1, ..., x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_{kk}(x^k)^2 + \sum_{0 \leq k < l \leq n} g_{kl} x^k x^l. \tag{3}$$

Форма ZF, если положить в ней $x^k = 0$ $(k \in \{0, 1, ..., n\})$, является ПКФ, задающей решётку Γ репером, образованным из репера Зеллинга отбрасыванием вектора $\bar{e}_k$. (При $k = 0$ это будет, очевидно, репер $\mathcal{E}_n$).

Квадратичной длиной реперов $\mathcal{E}_n$ *и* Z называют величину

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n} \bar{e}_k^2 = -2 \sum_{0 \leq k < l \leq n} g_{kl}. \tag{4}$$

Эти реперы называются *приведёнными по Зеллингу*, если соответствующая им квадратичная длина минимальна на множестве всех основных реперов решётки Г, то есть на классе эквивалентности ПКФ, соответствующему этой решётке.

Имеет место очевидное

Предложение 1. *Если квадрат длины минимального вектора n-мерной решётки $\Gamma(\mathcal{E}_n)$ равен a и задающий её репер имеет квадратичную длину $\sigma = a(n+1)$, то этот репер приведён по Зеллингу.*

За большими подробностями относительно приведения по Зеллингу отсылаем читателя к статьям [1,2,5]. Алгоритм этого приведения построен для всех $n \leq 5$ (см. Э.Зеллинг [8] — $n = 2, 3$; Л.Шарв [7] — $n = 4$; Е.П.Барановский [2] — $n = 5$).

Обратимся к совершенным решёткам. Напомним, что решётка Г называется совершенной, если по длине её минимального вектора и координатам всех минимальных векторов в некотором задающем эту решётку репере можно однозначно восстановить параметры этого репера, то есть соответствующую ему ПКФ, которая в этом случае также называется совершенной ПКФ (естественно, вместе с любой ПКФ из её класса эквивалентности). Начатое Г.Ф.Вороным [4] изучение совершенных ПКФ и решёток составляет важную часть исследований в задаче об отыскании локальных максимумов плотности решётчатых упаковок конгруэнтных шаров в пространствах E^n.

Ниже представлены приведёнными по Зеллингу реперами Зеллинга

1) первая и вторая совершенные решётки Вороного Γ_0^n и Γ_1^n —для произвольных значений размерности $n \geq 2$;

2) все совершенные решётки при $n = 5$ и $n = 6$.

Для записи реперов Зеллинга (и соответствующих им z-форм) названных выше решёток используются следующие графические изображения (символы реперов). n-мерному реперу Z ставится в соответствие правильный $(n+1)$-угольник с нумерацией вершин $0, 1, ..., n$; соединяющее вершины k и l сторона многоугольника соответствует параметру g_{kl}. Линии, изображающие стороны, соответствуют следующим значениям параметров Зеллинга:

сплошная тонкая линия — $g_{kl} = -\frac{1}{2}$,

сплошная жирная линия — $g_{kl} = \frac{1}{2}$,

штриховая тонкая линия — $g_{kl} = -\frac{1}{4}$,

штриховая жирная линия — $g_{kl} = \frac{1}{4}$,

соединяющий отрезок отсутствует — $g_{kl} = 0$.

Первую и вторую совершенные решётки Вороного, как обычно, рассмотрим заданными квадратичными формами

$$\phi_0^n = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x^i x^j, \quad n \ge 2;$$

$$\phi_1^n = \phi_0^n - x^1 x^2, \quad n \ge 3.$$

При $n = 5$ совершенных решёток три: Γ_0^3, Γ_1^3 и Γ_2^3. Последнюю будем рассматривать заданной репером с ПКФ

$$\phi_2^5 = \phi_1^5 - x^1 x^3.$$

При $n = 6$ совершенных решёток семь (E.S.Barnes [6]). Кроме решёток Γ_0^6 и Γ_1^6, в пространстве этой размерности имеются ещё 5 решёток, рассматриваемых ниже как следующие ПКФ, предложенные в статье [6]:

$$\phi_2^6 = \phi_1^6 - x^1 x^3; \quad \phi_3^6 = \phi_0^6 - \frac{1}{2}(x^1x^2 + x^3x^4 + x^5x^6);$$

$$\phi_4^6 = \phi_0^6 - \frac{1}{2}(x^1x^2 + x^3x^4 + x^3x^5 + x^3x^6 + x^4x^5 + x^4x^6 + x^5x^6);$$

$$\phi_5^6 = \phi_0^6 - \frac{1}{2}(x^1x^2 + x^3x^4 + x^3x^5 + x^4x^5);$$

$$\phi_6^6 = \phi_1^6 - \frac{1}{2}(x^1x^3 + x^2x^5 + x^4x^6) - x^5x^6.$$

Воспользовавшись алгоритмами приведения по Зеллингу [2] (достаточность списка операций алгоритма доказана в статьях [2,7,8] для размерностей $n \le 5$, однако его применение позволило в нашем случае получить приведённые по Зеллингу реперы и при $n = 6$), приходим к следующим результатам:

Предложение 2. *Решётка, заданная ПКФ с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

и, соответственно, z-формой

$$ZF_0^n = \frac{1}{2}[(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^2)^2 + ... + (x^n - x^0)^2] \tag{6}$$

является первой совершенной решёткой, заданной репером, приведённым по Зеллингу.

Символ z-формы ZF_0^n — многоугольник без диагоналей с $n+1$ вершиной. Для размерностей $n \leq 6$ эти символы даны на рис. 1.

Предложение 3. *Второй совершенной решётке соответствуют две z-формы (для неё приведение по Зеллингу неоднозначно, но вторая z-форма появляется, начиная с $n = 5$):*

$$Z_1F_1^n = \frac{1}{2}[(x^0 - x^2)^2 + (x^2 - x^3)^2 + ... + (x^n - x^0)^2 +$$

$$+(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^3)^2 - (x^0 - x^3)^2], \tag{7}$$

$$Z_2F_1^n = \frac{1}{2}[(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^2)^2 + ... + (x^n - x^0)^2 +$$

$$+(x^0 - x^3)^2 + (x^1 - x^4)^2 - (x^1 - x^3)^2 - (x^0 - x^4)^2]. \tag{8}$$

Для размерностей $n \leq 6$ символы реперов приведены на рис. 2.

Предложение 4. *Приведённые по Зеллингу реперы Зеллинга совершенных решёток, заданных ПКФ $\phi_2^5, \phi_2^6 - \phi_6^6$, представлены соответственно z-формами $ZF_2^5, ZF_2^6 - ZF_6^6$, изображёнными символами рисунка 3.*

Доказательство предложений 2 – 4. Так как квадратичные длины всех реперов, которые в предложениях 2–4 названы приведёнными по Зеллингу, при размерности n и длине минимального вектора 1 равны $n+1$, то согласно предложению 1 все эти реперы являются приведёнными по Зеллингу. Эквивалентность исходных ПКФ и приведённых устанавливается обычным путём. Соответствующие вычисления здесь не приводятся.

Рисунки 1 и 2.

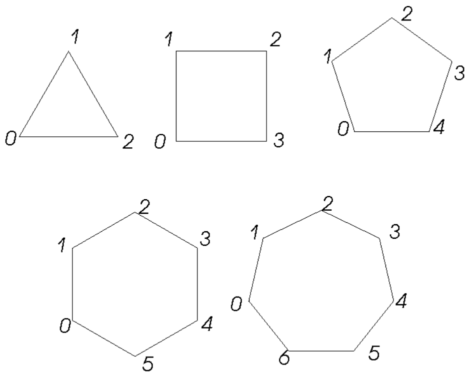

Рис.1

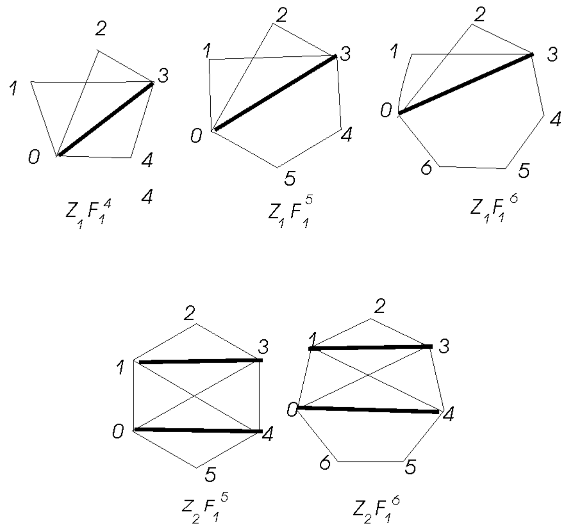

Рис.2

Рисунки 3, 4 и 5.

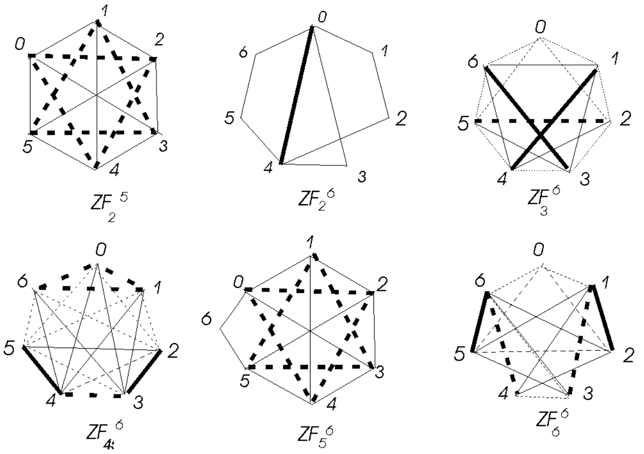

Рис. 3

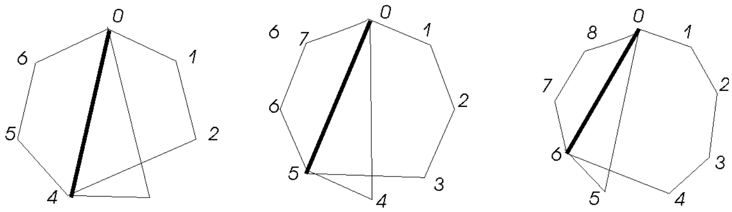

Рис. 4

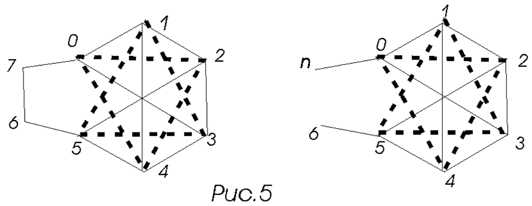

Рис. 5

§ 2. z-совершенность решётки. Один из способов увеличения размерности совершенных решёток

Как следует из §1, при $n \leq 6$ для всех совершенных решёток характерно то, что их приведённые реперы Зеллинга состоят только из векторов минимальной длины. Для первой и второй совершенных решёток эта особенность имеет место и при произвольной размерности. Назовём такое свойство *z-совершенностью решётки.* Итак, имеем

Определение. Решётка Γ называется z-совершенной, если её приведённый по Зеллингу репер Зеллинга состоит из векторов минимальной длины.

Так как в размерностях $n \leq 6$ все совершенные решётки и z-совершенны, возникает вопрос, не обладают ли совершенные решётки свойством z-совершенности и при при всяком n.

Свойство z-совершенности в некоторых случаях позволяет по заданной n-мерной совершенной решётке получить из неё $(n+1)$-мерную совершенную решётку. Ниже приводится описание такого способа "увеличения размерности".

Пусть G_P^n — n-мерная совершенная решётка, обладающая свойством z-совершенности, и длина её минимального вектора равна 1. Будем считать, что эта решётка расположена в $(n+1)$-мерном пространстве E^{n+1}. Из векторов репера Зеллинга (1) решётки G_p^n отбросим один из векторов, скажем, вектор $\bar{e}_0$, и зададим в пространстве E^{n+1} вектор $\bar{e}_{n+1}$, ортогональный всем оставшимся векторам репера Z, кроме одного, скажем, $\bar{e}_n$, с которым он образует угол в 120^0. Длина вектора $\bar{e}_{n+1}$ берётся равной длине минимального вектора решётки G_P^n.

Обозначим через G^{n+1} $(n+1)$-мерную решётку, заданную репером, полученным из репера Зеллинга решётки G_P^n добавлением названного выше вектора $\bar{e}_{n+1}$. Такое построение $(n+1)$-мерной решётки G^{n+1} по n-мерной решётке G_P^n будем называть *примитивным увеличением размерности (ПУР).* В нашем случае выборов векторов из репера Зеллинга решётки G_p^n решётка G^n задана репером

$$\mathcal{E}_{n+1} = \{O; \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1}\} = \{\mathcal{E}_n, \bar{e}_{n+1}\}.$$

Этому реперу соответствует ПКФ

$$F(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) = f(x^1, ..., x^n) + (x^{n+1})^2 - x^n x^{n+1}, \qquad (9)$$

где $f(x^1, ..., x^n)$ — ПКФ, соответствущая реперу $\mathcal{E}_n$ решётки G_P^n.

Репер Z решётки G_P^n при заданном, как описано выше, выборе его двух векторов, назовём *допускающим операцию ПУР*, если окажется, что вектор $\bar{e}_0^* = -\sum_{k=1}^{n+1} \bar{e}_k$ также имеет минимальную длину. Операцию ПУР в этом случае назовём *допустимой*.

Для допустимой операции ПУР имеем:

$$\bar{e}_0^* = -\sum_{k=1}^{n+1} \bar{e}_k = \bar{e}_0 - \bar{e}_{n+1},$$

$$(\bar{e}_0^*)^2 = (\bar{e}_0)^2 - 2\bar{e}_0\bar{e}_{n+1} + (\bar{e}_{n+1})^2 = 1,$$

$$\bar{e}_0^*\bar{e}_{n+1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \bar{e}_0^*\bar{e}_k = g_{0k}^* = g_{0k} + \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Таким образом, допустимая операция ПУР приводит z-совершенную решётку снова к z-совершенной и её репер Зеллинга

$$\{\bar{e}_0^*, \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1}\}$$

является приведённым по Зеллингу.

Предложение 5. *Построенная посредством допустимой операции ПУР по совершенной решётке G_P^n решётка G^{n+1} является совершенной.*

$\triangleright$ Пусть $\bar{m} = (m^1, ..., m^n)$ — один из тех векторов минимальной длины решётки G_P^n, у которых координата $m^n \neq 0$ и из пары $\pm\bar{m}$ выбран такой знак, чтобы $m^n > 0$. Имеем:

$$F(\bar{m}, 0) = 1, \quad F(\bar{m}, 1) = f(\bar{m}) + 1 - m^n = 2 - m^n. \qquad (11)$$

Из равенства (11) следует, что относительно репера Z, допускающего ПУР, координата m^n минимальных векторов $\bar{m}$, у которых эта координата положительна, должна быть равна 1. Пусть $\bar{m}_1, ..., \bar{m}_s$ — все такие векторы. Так как решётка G_P^n совершенная, то система из s уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} m_q^i m_q^j = 1, \quad q = 1, ..., s \qquad (12)$$

даёт в качестве решения все коэффициенты a_{in} $(i = 1, ..., n)$ формы $f(x^1, ..., x^n)$. Следовательно, ранг системы (12) равен n и среди векторов рассматриваемого множества минимальных имеется n линейно независимых. Согласно (11) векторы $(m_q^1, ..., m_q^{n-1}, 1, 1)$, $q = 1, ..., s$ являются минимальными векторами решётки G^{n+1}. Минимальным её вектором яляется и вектор $(0, ..., 0, 1)$. Отсюда вытекает, что система уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} m_p^i m_p^j = 1, \tag{13}$$

где p пробегает множество индексов $(1, 2, ..., T)$ всех T минимальных векторов решётки G_{n+1}, однозначно определяет коэффициенты квадратичной формы и, следовательно, решётка G^{n+1} совершенная. •

Из доказательства предложения вытекает, что количество минимальных векторов решётки G^{n+1} по сравнению с решёткой G_P^n увеличилось на $s+1$, но не более.

§ 3. Построение совершенных решёток из решёток, допускающих операцию ПУР

Переход от z-формы решётки G_P^n к z-форме решётки G^{n+1} путём выполнения операции ПУР состоит в том, что матрица Зеллинга (2) дополняется строкой и столбцом, в которых

$$a_{n+1,n+1} = 1, \ \ g_{k,n+1} = g_{l,n+1} = -\frac{1}{2}, \tag{14}$$

где k и l — номера выбранных двух векторов приведённого репера Зеллинга (выше мы их считали n и 0 — см. (10)); остальные, кроме этих двух, элементы строки и столбца равны 0. Новый параметр Зеллинга g_{kl}^* берётся согласно (10).

В приведённых ниже примерах выполнение операции ПУР на символе, изображающем репер Зеллинга, выглядит следующим: одно из ребер, заданных тонкой сплошной линией, разрывается и в место разрыва вставляется новая, $(n+1)$-ая вершина, из которой исходят тонкая сплошные рёбра в вершины, соединённые разорванным ребром.

Серия z-форм C_1. Начиная с треугольника на рис.1, изображающего репер Зеллинга двумерной первой совершенной решётки, строится посредством ПУР бесконечная по n серия C_1 — z-формы и матрицы Зеллинга первой совершенной решётки. Символы — $(n+1)$-угольники без диагоналей.

Серии C_2 и C_2^*. Выбрав в качестве номеров k и l (см. (14)) приведённого в начале этого параграфа алгоритма для ПУР 0 и 4, затем 0 и 5, затем 0 и 6 и т.д., по z-форме $Z_1F_1^4$ (рис.2) строим серию C_2 z-форм второй совершенной решётки. Аналогично, начиная с $Z_2F_1^5$ (рис.2), строится вторая серия C_2^* z-форм этой решётки.

Взяв в (14) для z-формы $Z_1F_1^5$ в качестве номеров k и l номера 1 и 0, посредством операции ПУР приходим к z-форме ZF_2^6 для совершенной ПКФ ϕ_2^6 (рис.3). Дальнейшее продолжение из ZF_2^6 при выборе 1 и 0 приводит к z-форме (рис.4)

$$ZF_2^7 = \frac{1}{2}[(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^2)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^3 - x^5)^2 +$$
$$+(x^5 - x^6)^2 + (x^6 - x^7)^2 + (x^7 - x^0)^2 + (x^0 - x^4)^2 +$$
$$+(x^4 - x^5)^2 - (x^0 - x^5)^2], \qquad (15)$$

а от неё — к форме

$$ZF_2^8 = \frac{1}{2}[(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^2)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^3 - x^4)^2 + +(x^4 - x^6)^2 +$$
$$+(x^6 - x^7)^2 + (x^7 - x^8)^2 + (x^8 - x^0)^2 + (x^0 - x^5)^2 +$$
$$+(x^5 - x^6)^2 - (x^0 - x^6)^2], \qquad (16)$$

Формы (15) и (16) — это z-формы известных предельных форм E_7 и E_8, на которых достигаются плотнейшие решётчатые упаковки в 7-мерном и 8-мерном пространствах соответственно. Следующий шаг применения ПУР, аналогичный двум последним, не допускается формой ZF_2^8.

Серия C_3. По z-форме ZF_2^5 посредством операции ПУР при выборе в (14) номеров 0 и 5 строится соответствующая ПКФ ϕ_5^6 z-форма ZF_5^6. Далее при выборе номеров 0 и 6, 0 и 7,...,0 и n, строится серия C_3 с z-формой(см. также рис. 5):

$$Z(C_3) = \frac{1}{2}\{(x^0 - x^1)^2 + (x^1 - x^2)^2 + ... + (x^n - x^0) +$$

$$+(x^0-x^3)^2+(x^1-x^4)^2+(x^2-x^5)^2-\frac{1}{2}[(x^0-x^2)^2+(x^2-x^4)^2$$
$$+(x^4-x^0)^2+(x^1-x^3)^2+(x^3-x^5)^2+(x^5-x^1)^2]\}.$$

Эта серия на другом пути получена С.Б.Васильевым [3] из гор. Красноярска.

Для решёток этой серии имеем:

$$det f(C_3) = 3^4 2^{-n-4}, \tag{17}$$

а количество минимальных векторов n-мерной решётки серии C_3 равно $T = \frac{n(n+1)}{2} + n - 5$.

Автор глубоко благодарен проф. В.П.Гришухину, прочитавшего эту заметку в рукописи. Высказанные им замечания позволили устранить ряд недочётов.

Список использованной литературы

1. *Барановский Е. П.* К приведению положительных квадратичных форм от пяти переменных по Зеллингу // Учён. зап. Иванов. ун-та, 1974. Т. 89. С. 37-64.
2. *Барановский Е. П.* Область приведения по Зеллингу положительных квадратичных форм от пяти переменных // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 152. С. 5-33.
3. *Васильев С. Б.* Об одной серии совершенных форм // Частное сообщение.
4. *Вороной Г. Ф.* О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Собр. соч. Киев, 1952. Т. 2. С. 171-238.
5. *Делоне Б. Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // УМН. 1937. Вып. 3. С. 16-62; 1938. Вып. 4. С. 102-164.
6. *Barnes E. S.* The complete enumeration of extreme senary forms // Trans. Roy. Soc. A. 1957. V. 249. P. 461-506.
7. *Selling E.* Über die binaren und ternären quadratischen Formen // J. reine und angew. Math., 1874. V. 77. S. 143-229.
8. *Charve L.* De la reduction des formes quadratiques quaternaires positives // Ann. Ecole Norm., 1882. V. 11.