

А. В. Киселёв¹**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГЕОМЕТРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ²**

Ключевые слова: пространство струй, краевая задача, деформация.

В работе приведены несколько геометрических методов решения краевых задач для уравнений математической физики. Рассмотрено построение решений, инвариантных относительно симметрии задачи; отмечен метод, состоящий в представлении решаемого уравнения в эволюционной форме. Перечислен ряд методов, основанных на деформации краевой задачи вдоль дискретного или непрерывного параметра: метод прямой итерации, гомотопия граничных условий, метод релаксации и деформация исходного уравнения. Произведен сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента по применению таких методов.

Several geometrical methods of solving the boundary-value problems for equations of the mathematical physics are listed. Constructing the solutions invariant w.r.t. symmetries of the problem is considered; a method based on the representation of the studied equation in the evolutionary form is pointed out. The methods related with the deformation of the boundary-value problem along a discrete or continuous parameter are discussed. Among these methods we note the direct iterations, the boundary conditions homotopy, the relaxation method and the deformation of the initial equation. Comparative analysis of the computer experiment in applying these methods is carried out.

В данной работе мы рассматриваем несколько методов решения краевых задач (в основном — задачи Дирихле) для нелинейных уравнений математической физики и проводим сравнительный анализ

© А. В. Киселёв, 2004

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, E-mail: arthemiy@mcsmc.ru

²Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (стипендия 3645/5 от 18.10.2002 г.) и INTAS (грант YS 2001/2-33)

Typeset by

результатов вычислительного эксперимента по применению указанных алгоритмов. Изучаемые методы основаны на геометрии пространства струй [1, 6, 10] и трактовке дифференциальных уравнений $\mathcal{E}$ (и их продолжений $\mathcal{E}^\infty$) как подмногообразий $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ пространства струй $J^k(\pi)$ порядка $k < \infty$ для некоторого расслоения π (соответственно, $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$). В рамках такого подхода мы уделяем основное внимание анализу объектов: дифференциальных уравнений и сечений s , таких, что струя $j_k(s) \subset \mathcal{E}$, — краевым задачам $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, f = s|_{\partial\mathcal{D}})$ в области $\mathcal{D}$ и их деформациям $\dot{\mathcal{P}}$. Следует подчеркнуть, что работа посвящена геометрически мотивированной технологии решения краевых задач, а не отдельным свойствам их решений в конкретных случаях. Основные определения и утверждения следуют [1, 6, 9, 10] и кратко изложены в [4, 5]; в качестве основного примера использовано квазилинейное эллиптическое уравнение Лиувилля $\mathcal{E}_{\text{Liu}} = \{u_{z\bar{z}} = \exp(2u)\}$.

В § 1 приведен метод монотонных итераций решений u^t краевой задачи $\mathcal{P}$, $t \in \mathbb{N}$, основанный на теории дифференциальных неравенств ([9]). В § 2 построен метод решения краевых задач, использующий представление изучаемого уравнения $\mathcal{E}$ в эволюционной форме; оказывается, что такая интерпретация возможна в весьма общем случае ([1, 10]). В § 3 мы рассматриваем различные методы деформации $\dot{f}$ граничных условий f при инвариантном уравнении $\mathcal{E}$: $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, f)$. В § 4 указан метод релаксации, состоящий в такой замене $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}' = (\mathcal{E}', \mathcal{D} \times \mathbf{R}_+, f \otimes \text{id}_t)$, что решения u задачи $\mathcal{P}$ являются устойчивыми стационарными решениями задачи $\mathcal{P}'$ для эволюционного уравнения $\mathcal{E}'$. Рассмотренная в § 5 деформация $\dot{\mathcal{P}} = (\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{D}, f)$ по сути противоположна § 3: при неизменном граничном условии f движется само уравнение $\mathcal{E}(t)$; примером может служить включение нелинейности. Наконец, в § 6 обсуждены результаты вычислительного эксперимента по практическому применению этих методов.

Замечание. В дальнейшем мы предполагаем существование и единственность классического решения рассматриваемых задач ([2]); отметим также, что для многих уравнений (например, конформно инвариантных) известно поведение решений при заменах координат, поэтому область $\mathcal{D}$, в которой решается задача $\mathcal{P}$, может быть заменена достаточно простой (соответственно, $\mathcal{D} \sim B_0^1$).

Укажем весьма полезный способ построения запаса решений (частую, весьма большого) краевых задач $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, f)$. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ инвариантно относительно векторного поля X с производящим сечением φ_X и A_t — поток поля X , такой, что $A_t(\partial\mathcal{D}) = \partial\mathcal{D}$ и $A_t(j_k(f)) = j_k(f)$, т. е. граничное условие инвариантно относительно

симметрии X решаемого уравнения $\mathcal{E}$. Тогда задачу $\mathcal{P}$ можно редуцировать к нахождению решений задачи $\mathcal{P}' = (\mathcal{E} \cap \{\varphi_Y = 0\}, \mathcal{D}, f)$, инвариантных относительно Y всюду в $\mathcal{D}$. Решение переопределенной задачи $\mathcal{P}'$, если оно существует, может оказаться неединственным.

Пример. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\{u_{xx} + u_{yy} = \exp(2u), \quad u|_{r=1} = f, \quad f \in C^{0,\lambda}\} \quad (1)$$

в единичном круге B_0^1 с однородным граничным условием $f = 0$. Решения уравнения $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$, инвариантные относительно точечных симметрий, имеют вид

$$\text{a) } u = \frac{1}{2} \ln \frac{v_x^2 + v_y^2}{\text{sh}^2 v}, \quad \text{b) } u = \frac{1}{2} \ln \frac{v_x^2 + v_y^2}{v^2}, \quad \text{c) } u = \frac{1}{2} \ln \frac{v_x^2 + v_y^2}{\sin^2 v}, \quad (2)$$

где $\Delta v = 0$. В частном случае радиальной симметрии $X = -y \partial/\partial x + x \partial/\partial y$ решения $u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ задачи (1) таковы:

$$\begin{aligned} \text{a) } u_1(r) &= \ln \frac{2(1 + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})^2 - r^2}, \quad \text{b) } u_2(r) = -\ln r - \ln(1 - \ln r), \\ \text{c) } u_3(r) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 r^{-2}}{\sin^2(\alpha\beta - \alpha \ln r)}, \quad \beta = \frac{\pm 1}{\alpha} \arcsin \alpha, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Единственное классическое решение u_1 не имеет особенностей в 0, решение u_2 имеет интегрируемую особенность в $r = 0$ и равный 0 градиент на границе, решение u_3 имеет счетное множество логарифмических особенностей по r , накапливающихся к $r = 0$.

Замечание. Если исследуемое уравнение $\mathcal{E}$ лагранжево, то допустимо нахождение решений задачи Дирихле прямой минимизацией функционала действия; существенно, что при этом применимы не только разностные, но и проекционные методы.

§ 1. Применяемый в исследовании дифференциальных неравенств ([9]) метод монотонных итераций позволяет строить решения задач Дирихле вида

$$\{\Delta u = h(u, x), \quad u|_{\partial\mathcal{D}} = f, \quad \partial\mathcal{D} \in C^{1+\varepsilon}, \quad f, h \in C^{0,\lambda}\} \quad (4)$$

и проверять их локальную единственность.

Определение. Функция $\alpha \in C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$ (соответственно, β) называется нижним (верхним) решением задачи (4), если

$\Delta\alpha - h(\alpha, x) \geq 0$ в $\mathcal{D}$ и $f(x) \geq \alpha(x)$ на $\partial\mathcal{D}$ (соответственно, $\leq$); обозначим $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha(x) \leq \beta(x)$ для любого $x \in \overline{\mathcal{D}}$.

Утверждение ([9]). Пусть нижнее и верхнее решения задачи (4) упорядочены: $\alpha \preceq \beta$, — и существует неотрицательная константа $C \in \mathbf{R}$, такая, что $h(u_1, x) - h(u_2, x) \leq C \cdot (u_1 - u_2)$ для любых $x \in \overline{\mathcal{D}}$ и u_1, u_2 , если $\alpha \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta$. Рассмотрим две последовательности решений $\underline{U} = \{\underline{u}^k\}$ и $\overline{U} = \{\overline{u}^k\}$ задачи

$$\Delta u^k - C u^k = h(u^{k-1}, x) - C u^{k-1}, \quad u^k|_{\partial\mathcal{D}} = f, \quad x \in \mathcal{D}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (5)$$

с начальными условиями $\underline{u}^0 = \alpha$ и $\overline{u}^0 = \beta$ соответственно. Тогда монотонно неубывающая (невозрастающая) последовательность $\underline{U}$ ($\overline{U}$) сходится к решению $\underline{u}$ ($\overline{u}$) задачи (4), причем $\underline{u} \leq \overline{u}$ в $\overline{\mathcal{D}}$ и для любого решения $u_* \in [\alpha, \beta]$ выполнено $\underline{u} \leq u_* \leq \overline{u}$. Более того, если h монотонна по u : $h(u_1, x) - h(u_2, x) \geq 0$ при $\alpha \preceq u_2 \preceq u_1 \preceq \beta$, то решение задачи (4) единственно на $[\alpha, \beta]$: $\underline{u} = \overline{u}$.

Введенные в § 1 понятия нижнего и верхнего решений, а также способ обоснования локальной единственности решений задачи (4) понадобятся в § 4 при описании метода релаксации, при котором, в отличие от задач (5), изменение индекса непрерывно.

§ 2. Недавно в работах по формальной теории дифференциальных уравнений (см. [1, 10] и ссылки в них) был фактически получен следующий замечательный результат: всякое уравнение, удовлетворяющее условиям теоремы о 2 нетривиальных строчках $\mathcal{C}$ -спектральной последовательности Виноградова ([1, 6]), представимо в виде эволюционного уравнения. На деле это означает, что для уравнения, не допускающего калибровочных симметрий (в отличие от уравнений Максвелла, Янга-Миллса, Эйнштейна и др.) существует набор замен и дифференциальных подстановок, приводящий его к эволюционному уравнению (возможно, для большего числа зависимых переменных). Класс к2-строчечных уравнений весьма широк; разумеется, интегрировать эволюционные уравнения с заданной точностью проще, чем произвольные нелинейные уравнения математической физики. Таким образом, решение исходной краевой задачи $\mathcal{P}$ разделяется на 2 этапа: поиск эволюционной формы для уравнения $\mathcal{E}$ и постановка граничных условий для дополнительных зависимых переменных, если уж возникла необходимость их ввести.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{xx} \pm u_{yy} &= \exp(2u), \quad \mathcal{D} = \{(x, y), |x| < 1, |y| < 1\}, \\ u(1, y) &= f_1(y), \quad u(x, 1) = f_2(x), \quad u(-1, y) = f_3(y), \quad u(x, -1) = f_4(x) \end{aligned} \quad (6)$$

для эллиптического (гиперболического) уравнения Лиувилля $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$. Введем дополнительную зависимую переменную $v = u_y$; уравнение $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \mp u_{xx} \pm \exp(2u) \end{pmatrix},$$

а условия на $\partial\mathcal{D}$ разделяются на начальные и граничные:

$$\begin{aligned} u(x, -1) &= f_4(x), \quad u(1, y) = f_1(y), \quad u(-1, y) = f_3(y), \\ v(x, -1) &= v[f_2], \quad v(1, y) = df_1(y)/dy, \quad v(-1, y) = df_3(y)/dy. \end{aligned}$$

Таким образом, решение краевой задачи (6) редуцировано к восстановлению начального профиля $v(x, -1)$ по финальному значению $u(x, 1) = f_2(x)$, что может быть практически реализовано, например, методом сопряженных градиентов.

§ 3. Симметрией $\varphi \in \text{sym } \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E} = \{\vec{F} = 0\}$ называется элемент ядра $\ker \bar{\ell}_F$ линеаризации $\ell_F = \|\sum_\sigma \partial F_i / \partial u_\sigma^j D_\sigma \cdot 1_{ij}\|$, ограниченной на уравнение $\mathcal{E}$; эволюционное векторное поле

$$\Theta_\varphi = \sum_{j, \sigma} \bar{D}_\sigma(\varphi^j) \partial / \partial u_\sigma^j$$

коммутирует с полными производными D_i и касается бесконечного продолжения $\mathcal{E}^\infty = \{D_\sigma(F) = 0, |\sigma| \geq 0\} \subset J^\infty(\pi)$. Задаваемое дифференциально замкнутой алгеброй гладких функций многообразие $\mathcal{E}^\infty$ бесконечномерно, и потому поле Θ_φ формально не имеет потока, или, иначе, отсутствует теорема Коши для состоящей из счетного числа уравнений задачи

$$\dot{u}_\sigma = \bar{D}_\sigma(\varphi), |\sigma| \geq 0, \quad u(t=0) = u; \quad (7)$$

интегральные траектории для задачи (7) существуют лишь для случая контактных симметрий $\varphi(x, u, D_i(u^j))$ и, в частности, точечных симметрий, линейных по производным. Из (7) видно, что функции

φ задают согласованную эволюцию зависимых переменных и их производных, и она сохраняет решения уравнения $\mathcal{E}$, если $\varphi \in \ker \bar{\ell}_F$.

3.1. Пусть известно решение u_0 некоторой краевой задачи $\mathcal{P}_0 = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, f_0)$ для уравнения $\mathcal{E}$. Продеформируем задачу $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, \mathcal{D}, f)$ так, что $f(t=0) = f_0$ и $f(t=1) = f$; через $\dot{f}(t)$ обозначим скорость деформации данных на $\partial\mathcal{D}$, а через $\varphi(t)$ — соответствующую деформацию решения. Легко видеть, что $\varphi \in \ker \bar{\ell}_F$, и если задача

$$\varphi \in \ker \bar{\ell}_F, \quad \varphi|_{\partial\mathcal{D}} = \dot{f} \quad (8)$$

разрешима при всех $t \in [0, 1]$, то $u = u_0 + \int_0^1 \varphi(t) dt$ есть искомое решение задачи $\mathcal{P}$.

Условие $\varphi \in \ker \bar{\ell}_F$ есть не что иное, как разложение деформации $\dot{u} = \varphi$ в ряд по t ; анализ уравнений деформации при высших степенях t представляет самостоятельный интерес ([7]): в частности, неразрешимость уравнения при t^2 влечет неразрешимость задачи $\mathcal{P}$ указанным методом.

Замечание. Уравнение Лиувилля $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$ имеет следующее интересное свойство (С. В. Дужин, частное сообщение): его общее решение (зависящее от произвольной голоморфной функции $v(z)$) всегда инвариантно относительно некоторой точечной симметрии X , коэффициенты которой связаны с $v(z)$ преобразованием Абеля. Деформации $\dot{f}$ граничного условия соответствует кривая $X(t)$ в пространстве $\text{sum } \mathcal{E}_{\text{Liou}}$, такая, что решение $u(t')$ инвариантно относительно $X(t')$ для всякого $t' \in [0, 1]$, и решение краевой задачи (1) может быть сведено к анализу уравнения, задающего кривую $X(t)$.

3.2. Далее рассмотрим накрытие $\tilde{\mathcal{E}}^\infty \rightarrow \mathcal{E}^\infty$ над решаемым уравнением $\mathcal{E}$, т.е. (в рамках данной статьи) правило $u = u[v]$ построения решений $u \in \text{Sol } \mathcal{E}$ по решениям $v \in \text{Sol } \tilde{\mathcal{E}}$; примерами служат известные подстановки Коула – Хопфа $u = v_x v^{-1}$, Миуры $u = v_x - v^2$, Лиувилля $u = \frac{1}{2} \ln[4\partial v \cdot \partial \bar{v} / (1 - v\bar{v})^2]$, связывающие уравнения Бюргерса и теплопроводности, КдФ и модифицированное КдФ, уравнение Лиувилля и Коши – Римана соответственно; отметим, что к последней формуле сводятся все три выражения (2). Ясно также, что для фиксированного условия f могут существовать несколько подстановок $u[v]$, обеспечивающих решение краевой задачи $\mathcal{P}$; таким образом, задача восстановления функции v во всей области $\mathcal{D}$ некорректна по Адамару. Тем не менее для фиксированного класса подстановок $v \mapsto u$ несложно выписать в координатах аналогичные (8) уравнения $\psi \equiv \dot{v} \in \ker \tilde{\ell}_{\tilde{\mathcal{E}}}$, обусловленные данными f и f_0 условия $\tilde{\Theta}_\psi(u[v]) = \dot{f}$,

и квадратуру $v(1) = v(0) + \int_0^1 \psi(t) dt$. Построив решение $v(1)$ накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$, мы получаем решение u исходной краевой задачи $\mathcal{P}$ во всей области $\mathcal{D}$, пользуясь точными формулами $u = u[v]$. Стоит, впрочем, отметить, что условие $\tilde{\Theta}_\psi(u[v]) = \dot{f}$ может не являться даже оператором с косой производной, если u явно зависит от $\text{grad } v$.

В настоящее время существуют разработанные методики ([1]), реализованные в виде программ ([8]) для пакетов символьных вычислений, позволяющие алгоритмически находить и классифицировать накрытия над уравнениями математической физики. Укажем также, что концепция накрытий над дифференциальными уравнениями тесно связана с преобразованиями Беклунда и представлениями нулевой кривизны ([3]) для УрЧП, также позволяющими находить классы подстановок $u[v]$ для заданного уравнения $\mathcal{E}$.

3.3. Рассмотрим более подробно решение задачи Дирихле (1) для уравнения Лиувилля $\mathcal{E}_{\text{Liou}}$ указанным методом в классе подстановок (2b). В этом случае гармонические функции $v(t)$ допускают представление $P[g]$ через ядро Пуассона P ([2]) по значению $g \equiv v|_{\partial\mathcal{D}}$ на границе и, таким образом, исходная задача $\mathcal{P}$ восстановления методом гомотопии $\dot{f}$ решения u по данным $f(t)$ на $\partial\mathcal{D}$ редуцируется к интегральному уравнению

$$\frac{d}{dx}P[g] \cdot \frac{d}{dx}P[\dot{g}] + \frac{d}{dy}P[g] \cdot \frac{d}{dy}P[\dot{g}] = (g\dot{g} + g^2 \cdot (f - f_0)) \cdot \exp(2f)$$

относительно деформации $\dot{g} = \psi|_{\partial\mathcal{D}}$ краевых данных для гармонической функции v ; приближенное восстановление v на решетке в $\mathcal{D}$ получается многократным усреднением значений функции в соседних узлах (см. также § 4).

В замечании 6.2 обсуждаются результаты вычислительного эксперимента по реализации такого метода решения задачи (1).

3.4. Отметим, наконец, что в качестве начального приближения u_0 , соответствующего значениям f_0 на $\partial\mathcal{D}$, можно использовать решения уравнения $\mathcal{E}'$, в общем случае отличного от $\mathcal{E}$; здесь мы пользуемся тем обстоятельством, что при $t \rightarrow 0$ решения $u(t)$ удовлетворяют некоторому вырожденному уравнению $\mathcal{E}'$.

Пример. Заметим, что при $f \rightrightarrows -\infty$, $\max f - \min f \leq \text{const} < \infty$, решение u задачи (1) в круге B_0^1 сколь угодно точно приближается по норме $\|\cdot\|_{C^0(\bar{B}_0^1)}$ гармонической функцией $P[f]$. Пусть

$$\Delta u(t) = \exp(2u(t)), \quad f(t) = f + \ln t, \quad 0 < t \leq 1,$$

тогда в прежних обозначениях имеем

$$\Delta\varphi(t) - 2\exp(2u(t))\varphi(t) = 0, \quad \dot{f}(t) = t^{-1}, \quad u(t) = u_{t_{\min}} + \int_{t_{\min}}^t \varphi(\tau)d\tau,$$

где $t_{\min} \rightarrow +0$, а $u_{t_{\min}} = P[f + \ln t_{\min}]$ — начальное приближение. Будем искать решение $u(t)$ при малых t в виде $u(t) = \ln t + P[f] + t^2 \cdot U$, тогда при $t \rightarrow +0$ функция U удовлетворяет однородной задаче

$$\Delta U = \exp(2P[f]), \quad U|_{\partial B_0^1} = 0$$

для уравнения Пуассона и имеет вид

$$U(p) = \int_{B_0^1} \exp(2P[f])(q) \cdot G(p, q) dq,$$

где G — функция Грина ([2]) для оператора Лапласа в круге.

По сути, разобранный в п. 3.4 метод состоит в деформации $\dot{\mathcal{P}}$ не только условий f , но и уравнения $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}$ при $t \in (0, 1]$. В § 4 мы рассмотрим противоположную ситуацию: при всех значениях параметра t используется вспомогательное уравнение $\mathcal{E}'$, решения которого стремятся к решениям задачи $\mathcal{P}$ с ростом t .

§ 4. Дополним смешанную краевую задачу, обобщающую (4), релаксационным слагаемым $\partial u / \partial t$, продолжим тождественно граничное условие f на $\partial \mathcal{D} \times \mathbf{R}_+$ и выберем некоторое начальное приближение u_0 так, что $\alpha \preceq u_0 \preceq \beta$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -h(u, x), \quad a \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + bu = f, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (9)$$

где α и β суть нижнее и верхнее решения соответствующей стационарной задачи.

Утверждение ([9]). Если, кроме того, $h \in C_u^1[\alpha, \beta]$, то следующие два условия эквивалентны:

- 1) стационарное решение u_s задачи (9) единственно на $[\alpha, \beta]$;
- 2) решение $u_s \in [\alpha, \beta]$ асимптотически устойчиво с областью устойчивости $[\alpha, \beta]$.

Указанный выше метод замены эллиптического уравнения $\mathcal{E}$ в задаче (4) эволюционным уравнением $\mathcal{E}'$ является альтернативой представлению исходного $\mathcal{E}$ в эволюционной форме (см. § 2).

§ 5. Рассмотрим теперь метод деформации $\dot{\mathcal{P}}$ краевой задачи $\mathcal{P}(t)$ посредством движения $\dot{\mathcal{E}}$ решаемого уравнения $\mathcal{E}(t) = \{F(t) = 0\}$ при неизменных краевых условиях f : пусть задана гомотопия

$$\mathcal{E}(t) = (1 - r(t)) \cdot \mathcal{E}_0 + r(t) \cdot \mathcal{E},$$

где $r(0) = 0$ и $r(1) = 1$, тогда скорость деформации φ решения $u(t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\bar{\ell}_{F(t)}(\varphi) + r'(t) \cdot (F - F_0) = 0, \quad \varphi|_{\partial\mathcal{D}} = 0,$$

а решение задачи $\mathcal{P}$ задано квадратурой $u = u_0 + \int_0^1 \varphi(t) dt$; подчеркнем, что этот метод дает хорошие результаты на практике.

§ 6. Заключительные замечания

6.1. В процессе деформации $(1 - r(t)) \cdot \mathcal{P}_0 + r(t) \cdot \mathcal{P}$ граничных условий (§ 3) или уравнения (§ 5) более предпочтительной, нежели линейное движение $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$, является сглаженная ступенька $r(t) = \exp(-\operatorname{ctg}^2(\pi t/2))$, $0 < t < 1$. В этом случае заключительный этап решения задачи $\mathcal{P}$ фактически эквивалентен методу Ньютона для приближения, обеспеченного начальными вычислениями.

6.2. Сравнительный анализ практических вычислений с использованием перечисленных выше методов, проведенный в 2002 г. студентами-дипломниками кафедры высшей математики Ивановского энергетического университета А. В. Пуниной и Н. П. Челухоевой, позволяет сделать следующие выводы.

Построенный в § 5 метод деформации уравнения $\mathcal{E}$ примерно вдвое точнее по абсолютной погрешности при сравнении с известными точными решениями, чем указанный в § 3 метод, основанный на деформации граничных условий, однако последний метод, наоборот, сходится в 3–5 раз быстрее.

Наиболее простым из алгоритмов с непрерывным изменением t является метод релаксации. Итерационный метод также более предпочтителен при решении возникающего в § 3 уравнения Лапласа, т. к. использование ядра Пуассона требует значительного времени, а метод Гаусса невозможно ускорить из-за сильной разреженности матрицы дискретного оператора Δ . Обсуждаемая в § 3 редукция задачи Дирихле к одномерной и последующему решению интегрального уравнения чувствительна к гладкости граничных условий $f(t)$, поскольку ядро Пуассона на ∂B_0^1 имеет особенность, а гармонические функции — меньшую гладкость, нежели в $\mathcal{D}$. Интересно, что

при движении по t решение уравнения Лиувилля может кривизнаться к неклассическому (например, вида (3b) или (3c)) для тех же граничных условий, если шаг по времени достаточно велик.

В целом все исследуемые методы показали сопоставимую точность, и выбор алгоритма следует производить, исходя из конкретных свойств решаемой задачи.

6.3. Важным инструментом контроля точности вычислений является использование законов сохранения для рассматриваемого уравнения $\mathcal{E}$. Существуют регулярные методы ([1, 6]) восстановления полного набора законов сохранения для к2-строчечных уравнений с помощью пакетов символьных преобразований ([8], см. также [4]).

6.4. Применение перечисленных в данном обзоре методов решения краевых задач, соответствующим образом адаптированных к конкретной ситуации, не исключает стандартной проверки решений на непрерывность, гольдеровость, принадлежность пространствам Соболева и т. п.; в то же время мы надеемся, что указанные идеи пополнят стандартный набор средств для численного анализа нелинейных уравнений математической физики.

Автор благодарен И. С. Красильщику, Н. Н. Нефедову и А. В. Овчинникову за полезные замечания.

Список использованной литературы

1. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. М.: Факториал, 1997. 464 с.
2. Гилбарг Д., Трудингер Н. С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 463 с.
3. Головкин В. А. О представлениях нулевой кривизны и преобразованиях Беклунда для уравнения Лиувилля // Тр. XXV конф. молодых ученых мех.-мат. ф-та МГУ, 31 марта – 12 апреля 2003. М., 2003. С. 34–36.
4. Киселёв А. В. Классические законы сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. Вып. 6 (2000). С. 11–13.
5. Киселёв А. В. Об автопреобразовании Беклунда для уравнения Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. Вып. 6 (2002). С. 22–26.

6. *Krasil'shchik I. S., Verbovetsky A. M.* Homological methods in equations of mathematical physics. Opava: Open Education & Sciences, 1998. 150 p. http://diffiety.ac.ru/preprint/98/07_98.pdf
7. *Kumei S.* Invariance transformations, invariance group transformations, and invariance groups of the sine-Gordon equations // J. Math. Phys. 1975. Vol. 16. 12. P. 2461–2468.
8. *Marvan M.* Jet. A software for differential calculus on jet spaces and diffieties, ver. 3.9 for Maple V Release 4. Opava, 1997.
<http://diffiety.ac.ru/soft/soft.htm>
9. *Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. N. Y.: Plenum Press, 1992. 658 p.
10. *Pommaret J.-F.* Partial differential equations and group theory: new perspectives for applications. Dordrecht: Kluwer, 1994. 473 p.