Математика и ее приложения. 2004. 1. С. 93 – 96

УДК 517.5

В. С. Колесников[1]

О ПОЛИНОМАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ключевые слова: полином наилучшего приближения, коэффициенты Фурье, монотонность коэффициентов.

В статье строятся примеры функций, которые разлагаются в ряд Фурье с монотонными коэффициентами и у которых некоторые полиномы наилучшего приближения имеют немонотонные коэффициенты.

In this article, we construct some examples of functions composed as a Fouier series with monotonic coefficients, but some polynomials of best approximation for these functions have non-monotonic coefficients.

Введение. Постановка задачи

А. С. Беловым поставлена следующая задача.

Верно ли, что для любого p не равного 2, (в частности $p = \infty$, $p = 1$), существует такая функция f, которая разлагается в ряд Фурье с монотонными коэффициентами, но ее многочлен наилучшего приближения какой-то степени в пространстве L_p имеет немонотонные коэффициенты Фурье?

Нетрудно показать, что в случае $p = 2$ полином наилучшего приближения в L_2 сохраняет монотонность коэффициентов.

Для случаев $p = \infty$ и $p = 1$ построены примеры.

1. Случай $p = 1$

Докажем, что коэффициенты Фурье функции

$$f(t) = 3 + 6\cos t + 6\cos 2t + 6\cos 3t + \cos 4t + \cos 5t + \cos 6t$$

монотонны, но многочлен наилучшего приближения функции $f(t)$ степени не выше 2

$$P_2(t) = 2 + 5\cos t + 5\cos 2t$$

[1]Ивановский государственный университет

имеет немонотонные коэффициенты.

Доказательство. Очевидно, нам надо доказать, что для функции $F(t) = f(t) - P_2(t)$ многочлен наилучшего приближения степени не выше 2 равен 0. По теореме Маркова (см. напр. [2]) достаточно доказать, что $F(t)$ меняет знак в точках $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ и только в них. Простым подсчетом находим: $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -(21 + 3\sqrt{3})$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12$, $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 21$.

Теперь займемся доказательством того, что других нулей у $F(t)$ нет. Имеем

$$F'(t) = -(\sin t + \sin 2t + 18\sin 3t + 4\sin 4t + 5\sin 5t + 6\sin 6t).$$

Так как

$$|\sin nt| \leq 1 \ \ \forall n \in Z,$$

то $|F'(t)| \leq 35$. Тогда из неравенства Бернштейна (см.[1]) следует

$$|F''(t)| \leq 6 \cdot 35 = 210 \quad \forall t.$$

Далее, так как

$$\left|F'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| \geq 12,$$

то нетрудно проверить, что в δ-окрестности точки $\frac{\pi}{6}$ ($\delta = 0.05$) знак $F'(t)$ сохраняется, то есть $F'(t) \leq 0$. Это следует из формулы Лагранжа

$$\left|F'(t) - F'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = |F''(\psi)| \cdot \delta, \qquad \psi \in [\frac{\pi}{6} - \delta;\ \frac{\pi}{6} + \delta].$$

Отсюда имеем

$$F'(t) \geq F'\left(\frac{\pi}{6}\right) - 210 \cdot 0.05 \geq 0.$$

Следовательно, на отрезке $[\frac{\pi}{6} - \delta;\ \frac{\pi}{6} + \delta]$ функция $F(t)$ не имеет других нулей, кроме $\frac{\pi}{6}$. Аналогично это же доказывается для отрезков $[\frac{\pi}{2} - \delta;\ \frac{\pi}{2} + \delta]$ и $[\frac{5\pi}{6} - \delta;\ \frac{5\pi}{6} + \delta]$.

Далее, деля отрезки $[0;\ \frac{\pi}{6} - \delta]$, $[\frac{\pi}{6} + \delta;\ \frac{\pi}{2} - \delta]$, $[\frac{\pi}{2} + \delta;\ \frac{5\pi}{6} - \delta]$ и $[\frac{5\pi}{6} + \delta;\ \pi]$ каждый на 200 частей, подсчетом на компьютере, используя неравенство $|F'(t)| \leq 35$, получаем, что $F(t) \neq 0$ на этих отрезках. Доказательство закончено.

2. Случай $p = \infty$

Докажем, что коэффициенты Фурье функции

$$g(t) = C + \frac{7}{144} + \frac{1}{12}\cos t + \frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{12}\cos 3t,$$

где $C = \frac{1}{12}(\frac{5}{12})^3 + \frac{1}{4}(\frac{5}{12})^2\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{5}{12}\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$, монотонны, но многочлен наилучшего приближения функции $g(t)$ степени не выше 1

$$Q_1(t) = \frac{7}{144} + \frac{7}{48}\cos t$$

имеет немонотонные коэффициенты.

Доказательство. Пусть

$$f'(t) = -\sin t(\cos t - \cos t_1)(\cos t - \cos t_2).$$

Раскрывая скобки, получим:

$$f'(t) = -\left(\frac{1}{4} + \cos t_1 \cos t_2\right)\sin t + \frac{1}{2}(\cos t_1 + cost_2)\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 3t.$$

Тогда

$$f(t) = C + \left(\frac{1}{4} + \cos t_1 \cos t_2\right)\cos t - \frac{1}{4}(\cos t_1 + cost_2)\cos 2t + \frac{1}{12}\cos 3t.$$

Обозначим $x = \cos t_1$, $y = \cos t_2$. Тогда условия того, что для функции $f(t)$ многочлен наилучшего приближения степени не выше первой будет равен 0 (условия чебышевского альтернанса в точках $0, t_1, t_2$), записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + xy - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{12} = K - C, \\ \left(\frac{1}{4} + xy\right)x - \frac{1}{4}(x+y)(2x^2-1) + \frac{1}{12}(4x^3 - 3x) = -K - C, \\ \left(\frac{1}{4} + xy\right)y - \frac{1}{4}(x+y)(2y^2-1) + \frac{1}{12}(4y^3 - 3y) = K - C, \end{cases}$$

где $|K| = \max f(t)$, $-|K| = \min f(t)$. Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} xy - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{3} = K - C, \\ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = -K - C, \\ -\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}x = K - C. \end{cases}$$

Приравнивая левые части первого и третьего уравнений в последней системе, получим

$$3x(y-1)^2 = (y-1)^2(y+2).$$

Случай $y = 1$ отбросим. Тогда получим

$$y = 3x + 2.$$

Возьмем $x = \frac{5}{12}$, $y = -\frac{3}{4}$. Тогда из первого и второго уравнений имеем:

$$C = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{6} = 0.0282\ldots,$$

$$K = C + xy - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{3} = 0.1323\ldots.$$

Так как $f(\pi) \le 0.1 \le K$, то 0, t_1, t_2 действительно точки альтернанса. Итак,

$$f(t) = C - \frac{1}{16}\cos t + \frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{12}\cos 3t.$$

Теперь нетрудно увидеть, что для функции $g(t)$, которая разлагается в ряд Фурье с монотонными коэффициентами, многочлен наилучшего приближения $Q_1(t)$ степени не выше первой имеет немонотонные коэффициенты. Доказательство закончено.

Список использованной литературы

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 760 с.