Математика и ее приложения. 2004. № 1. С. 97 – 104

УДК 519.2

Д. И. Коровин,[1] К. К. Шибаева[2]

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СУБЪЕКТИВНЫХ ФАКТОРОВ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Ключевые слова: экономико-математическая модель, функция полезности, функционал Неймана – Моргенштерна, анализ рисков.

Статья посвящена построению математической модели принятия управленческого решения под воздействием субъективных факторов. При решении возникающих проблем используются методы статистической теории полезности. Построенная модель применялась при анализе деятельности торгового предприятия в г. Иванове.

This article is devoted to construction of mathematical model of getting manage solution upon influence subjective factors. For the solution appearing problems we use methods of statistical theory of the usefulness. This model was made use during the analyses of activity of the trade firm in Ivanovo.

В прикладных задачах, относящихся к моделированию экономических процессов, важной проблемой является адекватность модели реальному положению дел. Одной из причин недостаточной адекватности является наличие субъективных человеческих (психологических) факторов, учет которых в классических экономико-математических моделях практически не производится. Слабая адекватность существующих моделей, основанных на том, что аналитики предполагают рациональность действий и образа мышления тех, кому, с кем и для кого придется применять данные модели на практике, в конечном итоге приводит к невыполнению прогнозов и, как результат, к появлению в рядах практиков активных противников применения логически обоснованных методов анализа.[3]

---

[1] Ивановский государственный университет, E-mail: dmitriy@korovin.ru

[2] Ивановский государственный университет

[3] То есть математических. Другие таким свойством часто не обладают.

Второй проблемой является невозможность учета огромного количества случайных факторов, влияющих на результат экономического процесса. Технически данная задача может решаться методами теории вероятности и случайных процессов. Однако затратность такого анализа высока, ресурсы времени порой ограничены, что не позволяет полноценно применять эти методы на практике.

В последнее время появилось немало фундаментальных работ, в которых возможность нестабильности в реализации различного рода мероприятий характеризуется их рискованностью. Под риском в этом случае подразумевается неопределенность в оценивании параметров модели, а различным производственным и финансовым мероприятиям приписывается свойство «риск». При этом исследуются банковские риски, транспортные риски, технологические риски и т. д. Подобная классификация призвана идентифицировать анализ достоверности получаемых при прогнозе показателей (прибыли) и построение общих методик и рекомендаций.

Имеет смысл рассматривать риск не как неопределенность в оценивании случайных параметров, а как восприятие менеджером этой неопределенности. Для учета столь важного фактора принятия управленческих решений, увы, оказавшегося субъективным, в моделировании предлагается использовать элементы теории полезности, разработанной Нейманом и Моргенштерном.

Основополагающим объектом теории является функция полезности $u = u(x)$, определяющая полезность денежной суммы размера x для Лица, Принимающего Решения (ЛПР). Ясно, что такая функция $u(x)$ должна быть монотонно неубывающей, определенной на множестве $R^+ = [0; \infty)$.

Рассмотрим три возможных вида таких непрерывных функций: выпуклые, линейные и вогнутые. Ясно, что выпуклая функция соответствует такому отношению к риску, которое трактует закон убывающей полезности: чем больше объем суммы, которой владеет ЛПР, тем менее полезен для него единичный прирост этой суммы. Это объясняет осторожное отношение ЛПР к изменениям величины денежной суммы при значениях, отдаленных от нуля. Поэтому субъекты, чье поведение описывается такого рода функциями, принято называть пессимистами или рискофобами. Линейная функция определяет нейтральное отношение к риску. Она описывает поведение рисконейтралов. Поведение незначительной группы людей, известных как оптимисты или рискофилы, определяемое осознанным принятием риска даже в ситуации, когда суммы, которыми они обладают, не близки к нулю, описывается вогнутыми функциями полезности.

Результатом жизненных разочарований и коллизий (часто считаемых опытом) является то, что большинство людей становится в той или иной степени пессимистами. При проведении априорного анализа прибыль, которая может реализоваться в результате производственной деятельности, рассматривается нами как вероятностное распределение $F(x)$. Полезность мероприятия для ЛПР будет оцениваться с помощью функционала Неймана – Моргенштерна

$$U(F) = \int_0^\infty u(x)\ dF(x),$$

где $u(x)$ — функция полезности, присущая отношению к риску самого менеджера. Сравнение двух вариантов действия ($F(x)$ — отсутствие мероприятий по резервированию подсистемы и $F_{\text{рез}}(x)$ — вариант развития ситуации в результате резервирования) сводится к сравнению значений двух функционалов:

$$\begin{aligned} U(F) &= \int_0^\infty u(x)\ dF(x), \\ U_{\text{рез}}(F_{\text{рез}}) &= \int_0^\infty u_{\text{рез}}(x)\ dF_{\text{рез}}(x). \end{aligned}$$

Еще одной характеристикой отношения к риску считают так называемый безусловный эквивалент лотереи. В нашем случае понятие лотереи заменено понятиями мероприятий или стратегий, приоритет которых оценивается. В теории полезности нам приходится иметь дело с двумя функционалами — безусловной полезности $U(F)$ и математическим ожиданием (средним) денежной суммы $M\xi$, которую менеджер может получить при проведении мероприятия. Сравнивать значения этих величин бессмысленно. Однако если обозначить через $x_{\text{бэ}}$ то значение денежной суммы, которая для ЛПР равноценна $U(F)$:

$$x_{\text{бэ}} = u^{-1}(U(F)),$$

то такое значение будет определять аналог математического ожидания $M\xi$ случайной величины прибыли ξ после учета отношения ЛПР к возможной неопределенности (заметим: не неопределенность, а только отношение к ней). Согласно известному в математическом анализе неравенству Йенсена, для выпуклых функций $u(x)$

$$\int_0^\infty U(x)\ dF(x) \leq u\left(\int_0^\infty x\ dF(x)\right),$$

а значит разность

$$\int_0^\infty x\ dF(x) - x_{\text{бэ}}$$

можно рассматривать как показатель степени неприятия риска менеджером.

Однако общих результатов относительно сравнения значений $U(F)$ и $U_{\text{рез}}(F_{\text{рез}})$, основанных на этих положениях, получить невозможно. На поведение этих функционалов влияет следующее:

1) характер функций распределения;

2) вид функций полезности, которые будут зависеть не только от профессиональных качеств менеджера, но и от подсистемы, по отношению к которой производится резервирование.

На разность значений $U(F)$ и $U_{\text{рез}}(F_{\text{рез}})$ влияет значение $\text{M}\xi$ и $\text{M}\xi_{\text{рез}}$. Напомним, что мы рассматриваем случайную величину ξ как сумму случайной В и не случайной А. Характер распределения F определяется поведением величины В. Поэтому если величина А (оборотные средства, быстро ликвидные активы) незначительна, то отношение к риску будет иное, нежели при существенном А. Это значит, что при различных объемах имеющихся «финансовых запасов» отношение к оценке одних и тех же мероприятий различно.

Наша задача состоит в том, чтобы из двух мероприятий, проводимых на предприятии с целью увеличения средней прибыли, выбрать оптимальное.

В качестве примера применения идей Неймана и Моргенштерна к реальному экономическому процессу нами приводятся результаты следующего исследования.

Физическая модель этого исследования основывается на анализе деятельности предприятия общественного питания, средняя прибыль которого в месяц равна 3500 у. е. Менеджер имеет возможность провести два мероприятия по увеличению ожидаемой прибыли. Мы должны оценить, какое из мероприятий будет полезней. Критерием оптимизации является в данном случае значение $x_{\text{бэ}}$.

Производство выводов делается по плану:

1) каждому мероприятию сопоставляются вогнутые функции полезности, характеризующие отношение менеджера к неопределенностям, сопутствующим каждой стратегии;

2) проверяется статистическая гипотеза о соответствии распределений значений выборки (прибыли в день) семейству гамма-распределений, определяются характеристики распределений;

3) производится вычисление функционалов Неймана – Моргенштерна и характеристик полезности стратегий.

В проведенной работе были сделаны следующие выкладки.

1. Функции полезности были выбраны равными

$$u_1(x) = 2\sqrt[3]{x}$$

(функция полезности, соответствующая отношению ЛПР к рискам, сопутствующим первому мероприятию) и

$$u_2(x) = 2,2\sqrt[4]{x}$$

(функция полезности, соответствующая отношению ЛПР к рискам, сопутствующим второму мероприятию).

Коэффициенты 2 и 2,2 подбирались так, чтобы наиболее вероятное, по мнению менеджера, значение прибыли являлось корнем уравнения

$$x = u_i(x).$$

В этом случае отношение к такой сумме рисконейтрала и нашего менеджера становтся одинаковым, что не приводит к логическим противоречиям.

2. В качестве гипотетического распределения возможных значений прибыли при применении каждой стратегии выбиралось гамма-распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Действительно, с одной стороны, гистограмма статистических данных прибыли при нулевой стратегии указывала на возможность применения асимметричного одномодального распределения с экспоненционально убывающим хвостом. С другой стороны, частный случай гамма-распределения — распределение Эрланга — хорошо описывает поведение времени обслуживания N объектов в очереди (N соответствует η) с интенсивностью обслуживания λ. Так как подразумевается, что в результате предлагаемых мероприятий покупатели будут делать практически однородные по стоимости покупки, то предлагается рассмотреть следующую модель. Вместо времени обслуживания каждого из элементов очереди в модели Эрланга предполагается рассматривать слагаемые в величине прибыли, которую приносит каждый из покупателей.

Таким образом, будем считать, что η тем больше, чем чаще подходит клиент, $1/\lambda$ тем больше, чем выше средняя величина вклада в прибыль при производстве одной покупки.

Проверка статистической гипотезы производилась с помощью непараметрического критерия Пирсона.

Оценка параметров гамма-распределения нулевого варианта произведена по формулам метода моментов: для гамма-распределения математическое ожидание и дисперсия равны соответственно η/λ и η/λ^2. Полагая эти параметры равными соответственно эмпирическому среднему и эмпирической дисперсии, получаем два уравнения, решив которые, находим оценки для λ и η.

$$\lambda = \frac{(n-1)\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},$$

$$\eta = \frac{(n-1)\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \bar{x}\lambda.$$

В рассматриваемом случае $\lambda = 0,004, \eta = 14,0284$.

В предлагаемых стратегиях параметры распределений, которые соответствуют двум мероприятиям, оцениваются при изменении базовых значений λ, η и в соответствии с сутью мероприятий по правилам, предложенным выше. Величины изменений предполагаются заданными экспертно. Получено: при проведении первого мероприятия $\eta = 14,5, \lambda = 0,004$, тогда $\mathrm{M}\xi_1 = 3625$; при проведении второго мероприятия $\eta = 15,5, \lambda = 0,004$, тогда $\mathrm{M}\xi_2 = 3875$. Значения среднеквадратичных отклонений, соответствующие каждой стратегии и характеризующие разброс значений, составляют 952 и 984,3. Вычисляются они как

$$\sigma_k = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF_k - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_k\right)^2\right)^{0,5}, \quad k = 1,2.$$

Существенно то, что в качестве распределений прибылей соответствующих мероприятий выбираются распределения того же семейства. Это объясняется тем, что мероприятия не затрагивают основы организации процесса получения прибыли, а лишь некоторым образом оптимизируют параметры его технологии. Поэтому предполагается, что семейство распределений остается прежним. В противном случае, если не сделать такое ограничение и смена стратегии приведет к изменению характера распределения, модель может оказаться неадекватной на этапе её построения.

3. Вычисление функционалов Неймана – Моргенштерна

$$U_k(F_k) = \int_0^{\infty} u_k(x)\ dF_k(x), \quad k = 1, 2,$$

приводит к тому, что $U_1(F_1) = 30.4878$, $U_2(F_2) = 17.2524$ или $\text{х}_{\text{бэ}}(1) = 3542,32$, $\text{х}_{\text{бэ}}(2) = 3781,88$.

Выводы

В результате технико-экономического анализа, необходимого для принятия решения о выборе из двух мероприятий, получены выводы, утверждающие, что средняя прибыль при использовании второго варианта (3875) выше, нежели средняя прибыль при резервировании по первому варианту (3625). Однако разброс значений прибыли, которую предприятие имеет возможность получить при различном развитии экономической ситуации, во втором варианте превышает разброс значений при использовании первого варианта резервирования.

Трудно определить, что предпочтительней для менеджера, если не учитывать его собственное отношение к рискам при каждом из этих мероприятий. Указывается, что отношение к риску в первом случае определяется функцией полезности $u_1(x) = 2\text{х}^{1/3}$, во втором $u_2(x) = 2,2x^{1/4}$. Оценка значений безусловного эквивалента прибыльности мероприятий указывает на результат, определяющий приоритет второго результата резервирования:

$$\text{х}_{2\ \text{бэ}} = 3781 > \text{х}_{1\ \text{бэ}} = 3542.$$

Естественным выводом является то, что анализ принятия решения о произведении мероприятия необходимо производить, имея в виду, что отношение к возникающим рискам определяет нелинейное восприятие количественных показателей эффективности. Такое восприятие моделируется нами с помощью функции полезности и функции Неймана – Моргенштерна. В указанном примере можно заметить, что наибольшее значение функции Неймана – Моргенштерна, объясняющее приоритет способа резервирования, определяет поведение функции полезности в окрестности среднего ожидаемого значения прибыли ($\mathrm{M}\xi$), обычно принимаемого как планируемое значение фактора эффективности.

Замечание. В нашем случае значение функции Неймана – Моргенштерна указывает на предпочтительность первого мероприятия, как и технико-экономический анализ. На возможность иного положения дел указывает следующий пример.

Пример. Пусть распределения прибыли в двух стратегиях A и B нормальные: для первой стратегии — (0,9; 0,1), для второй — (1,1; 0,8). Функции полезности выбираются равными $u_1(x) = \sqrt{x}$ в стратегии A, $u_2(x) = \sqrt[3]{x}$ в стратегии B. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} U_1(F_1) &\approx 0,9472, \quad x_{\text{бэ}(1)} \approx 0,8972, \\ U_2(F_2) &\approx 0,9362, \quad x_{\text{бэ}(2)} \approx 0,8185. \end{aligned}$$

В этом примере соотношение между $U_1(F_1) > U_2(F_2)$ изменилось, что указывает на предпочтительность первого мероприятия, хотя классический технико-экономический анализ отдает приоритет второму мероприятию.