

Р. М. Паринов¹

КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ ЛОКСОДРОМ НА ТОРЕ

Ключевые слова: кривизна, кручение, локсодрома, крутка, тор.

Для поверхности тора рассматривается задача максимизации геометрического кручения (крутки) на локсодромах. Вычислены значения углов, при которых достигается максимум крутки при фиксированной длине отрезка локсодромы.

We solve the problem of finding the line (loxodrome) on the torus surface, which gives the maximum of geometrical torsion for the set of such lines with fixed length. This line must have the constant angle with coordinate lines.

1. Введение. Постановка задачи

В приложениях дифференциальной геометрии часто приходится вычислять кривизну и кручение кривых на поверхностях. В частности, такая задача возникает при исследовании взаимодействия продуктов прядения с искривленными поверхностями уплотнителей, неподвижных вьюрков и т. п. Как известно (см. [1, 3]), возникающая при этом крутка связана с кручением кривой, вдоль которой перемещается продукт. В известных моделях в качестве кривых, вдоль которых расположена осевая линия движущегося продукта, обычно рассматривают геодезические. Однако принудительно можно заставить продукт двигаться и по другим кривым. Такими кривыми могут быть, в частности, локсодромы, т. е. кривые на поверхности, образующие постоянный угол с одним из семейств координатных линий.

Наиболее важной задачей для практики прядения является задача максимизации крутки продукта вдоль линии его взаимодействия с поверхностью рабочего органа машины. Поэтому задача нахождения кривых на поверхности, для которых достигается максимум

© Р. М. Паринов, 2004

¹Ивановская государственная текстильная академия,
E-mail: romik_ivgu@mail.ru

крутки при фиксированной длине зоны контакта, имеет важное прикладное значение. В настоящей работе рассматривается частный случай этой задачи, когда поверхностью является тор, а класс кривых представляет собой семейство локсодром.

Пусть в 3-мерном евклидовом пространстве в прямоугольных декартовых координатах $Oxyz$ задана поверхность тора

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad (1)$$

образованная вращением окружности

$$x = f(u) = x_0 + r \cos u, \quad z = g(u) = x_0 + r \sin u \quad (2)$$

вокруг оси Oz . Здесь r – радиус образующей окружности тора (профиля), x_0 – координата центра кривизны профиля, u и v – угловые параметры ($u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, $0 < r < x_0$).

Рассмотрим на торе (1) семейство локсодром $\{L_\gamma\}$, т. е. кривых, образующих постоянный угол γ с параллелями $v = \text{const}$. Зафиксируем точку (u_0, v_0) на торе. Обозначим кручение кривой через κ ($\kappa = \kappa(u, v) = \kappa(u(l), v(l))$, l – натуральный параметр на кривой). Наша задача состоит в нахождении угла γ , для которого достигается максимальное значение крутки

$$T(\gamma) = \int_{L_\gamma} \kappa(u, v) dl \quad (3)$$

среди всех локсодром L_γ , начинающихся в точке (u_0, v_0) и имеющих одинаковую длину:

$$\int_{L_\gamma} dl = l_0 = \text{const}. \quad (4)$$

2. Уравнение локсодром на торе

Для решения поставленной задачи целесообразно перейти к натуральному параметру s на окружности (2), поскольку в этом случае формулы для кривизны и кручения проще [2]. Связь между параметрами u и s определяется формулой

$$s = s(u) = \int_{u_0}^u \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \quad (u_0 = \text{const}). \quad (5)$$

Прямое вычисление приводит к следующей связи между параметрами s и u :

$$s = r(u - u_0). \quad (6)$$

Полагая $u_0 = 0$, уравнения окружности и тора перепишем в виде

$$x = \varphi(s) = x_0 + r \cos \frac{s}{r}, \quad z = \psi(s) = x_0 + r \sin \frac{s}{r} \quad (7)$$

и

$$\mathbf{r}(s, v) = \left(\left(x_0 + r \cos \frac{s}{r} \right) \cos v, \left(x_0 + r \cos \frac{s}{r} \right) \sin v, x_0 + r \sin \frac{s}{r} \right). \quad (8)$$

Для получения уравнения локсодромы на торе с углом подъёма γ используем следующее уравнение локсодромы на поверхности вращения:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\varphi(s)} \quad (9)$$

и выражение (7) для $\varphi(s)$. Таким образом,

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{x_0 + r \cos(s/r)}. \quad (10)$$

Интегрируя (10), имеем

$$v = \operatorname{ctg} \gamma \int_{s_0}^s \frac{ds}{x_0 + r \cos(s/r)}. \quad (11)$$

В результате вычисления интеграла получим уравнение локсодромы на поверхности тора в координатах $\{s, v\}$

$$v(s) = v_0 + c \left(\arcsin \frac{x_0 \cos(s/r) + r}{x_0 + r \cos(s/r)} - \arcsin \frac{x_0 \cos(s_0/r) + r}{x_0 + r \cos(s_0/r)} \right), \quad (12)$$

где

$$c = \frac{r \operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{x_0^2 - r^2}}. \quad (13)$$

В уравнении (12) (s_0, v_0) – начальная точка локсодромы, а (s, v) – ее произвольная точка.

3. Кривизна и кручение

Если кривая l на поверхности S задана уравнением $v = v(s)$, то ее кривизна и кручение выражаются формулами [2, формулы (5.5) и (6.9)]

$$k(s) = \left(1 + Gv'^2 \right)^{-3/2} \left\{ \left(1 + Gv'^2 \right) \left(L + Nv'^2 \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4G} \left[2Gv'' + G_s v' \left(2 + Gv'^2 \right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \kappa(s) = & \frac{(1 + Gv'^2)^{-3}}{4\sqrt{G}k^2(s)} \left\{ \left(2v'' + 2\frac{G_s}{G}v' + G_sv'^3 \right) \times \right. \\ & \times \left(2GL_s + 6GNv'v'' + 3G_sNv'^2 \right) - \left(L + Nv'^2 \right) \times \\ & \times \left[v' \left(6GG_sv'v'' + 4GL^2 + 3G_sv'^2 \right) + 4Gv''' + 6G_sv'' - \right. \\ & \left. \left. - (G_s^2 + 4N^2)v'^3 - 12LNv' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где штрихами обозначены производные по параметру s

$$v' = \frac{dv}{ds}, \quad v'' = \frac{d^2v}{ds^2}, \quad v''' = \frac{d^3v}{ds^3}, \quad (16)$$

а коэффициенты первой и второй квадратичных форм и их отличные от нуля производные заданы формулами

$$\begin{aligned} E &= 1, \quad F = 0, \quad G = [\varphi(s)]^2, \quad L = \varphi'(s)\psi''(s) - \varphi''(s)\psi'(s), \\ N &= \varphi(s)\psi'(s), \quad G_s = \frac{\partial G}{\partial s} = 2\varphi(s)\varphi'(s), \\ L_s &= \frac{\partial L}{\partial s} = \varphi'(s)\psi'''(s) - \varphi'''(s)\psi'(s). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражения для $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ из (7), получим

$$\begin{aligned} G &= \left(x_0 + r \cos \frac{s}{r} \right)^2, \quad L = \frac{1}{r}, \quad N = \cos \frac{s}{r} \left(x_0 + r \cos \frac{s}{r} \right), \\ G_s &= -2 \left(x_0 + r \cos \frac{s}{r} \right) \sin \frac{s}{r}, \quad N_s = - \left(\frac{x_0}{r} \sin \frac{s}{r} + \sin \frac{2s}{r} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Производные функции (12) имеют вид

$$\begin{aligned} v'(s) &= -\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{x_0 + r \cos(s/r)}, \quad v''(s) = -\frac{\sin(s/r) \operatorname{ctg} \gamma}{[x_0 + r \cos(s/r)]^2}, \\ v'''(s) &= -\frac{\operatorname{ctg} \gamma [r + x_0 \cos(s/r) + r \sin^2(s/r)]}{r[x_0 + r \cos(s/r)]^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (14), получим в результате преобразований выражение для кривизны локсодромы на торе

$$k(s) = \frac{\sqrt{(x_0 \sin^2 \gamma + r \cos(s/r))^2 + r^2 \cos^2 \gamma \sin^2(s/r)}}{r(x_0 + r \cos(s/r))}. \quad (20)$$

В частности, при $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$ из (20) имеем правильные значения кривизны:

$$k|_{\gamma=0} = \frac{1}{x_0 + r \cos(s/r)}, \quad k|_{\gamma=\frac{\pi}{2}} = 1/r. \quad (21)$$

Аналогично, подставляя (18) и (19) в (15), в результате вычислений получим выражение для кручения локсодром на поверхности тора:

$$\kappa(s) = \frac{b \sin 2\gamma (r^2 - x_0^2 \sin^2 \gamma)}{2r (x_0 + r \cos(s/r)) (b^2 + r^2 \cos^2 \gamma \sin^2(s/r))}, \quad (22)$$

где $b = x_0 \sin^2 \gamma + r \cos(s/r)$.

4. Максимизация крутки

Крутка нити, осевая линия которой расположена вдоль кривой $L_\gamma : v = v(s), s \in [s_0, s_1]$, с учётом (3) имеет вид

$$T = T(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) \sqrt{E ds^2 + F dv ds + G dv^2}. \quad (23)$$

Для локсодромы на торе получим после подстановки в (23) коэффициентов первой квадратичной формы из (17) и (18), крутки из (22), производной $v'(s)$ из (19) и проведения несложных преобразований:

$$T(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} \frac{b \cos \gamma (r^2 - x_0^2 \sin^2 \gamma)}{r (x_0 + r \cos(s/r)) (b^2 + r^2 \cos^2 \gamma \sin^2(s/r))} ds, \quad (24)$$

$$b = x_0 \sin^2 \gamma + r \cos(s/r).$$

При этом значение параметра s_1 находится из условия, следующего из (4):

$$\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{E ds^2 + F dv ds + G dv^2} = l_0. \quad (25)$$

Для локсодромы на торе это условие принимает вид

$$(s_1 - s_0)/\sin \gamma = l_0, \quad (26)$$

откуда

$$s_1 = s_0 + l_0 \sin \gamma. \quad (27)$$

Таким образом, крутка локсодромы (12) на торе (8) задается формулами (24) и (27).

Аналитически найти угол γ , доставляющий максимум функции $T(\gamma)$, невозможно, поскольку в общем виде уравнение $T'(\gamma) = 0$ трансцендентно, и его решение не выражается через элементарные функции. Вычисления, проведенные с использованием ЭВМ, привели к следующим значениям угла γ при фиксированных значениях параметров s_0 , l_0 и r .

$$s_0 = 0, l_0 = 3, r = 2$$

x_0	5	10	50	100	150	200
γ_{max}	61°	52°	47°	47°	47°	47°
T_{max}	15.613	24.927	35.087	36.61	37.124	37.124

$$s_0 = 0, l_0 = 10, r = 2$$

x_0	5	10	50	100	150	200
γ_{max}	40°	42°	48°	48°	48°	48°
T_{max}	319.304	176.594	135.147	130.906	129.526	128.842

$$s_0 = 0, l_0 = 10, r = 5$$

x_0	10	50	100	150	200
γ_{max}	63°	49°	48°	48°	48°
T_{max}	20.7	43.367	47.047	48.291	48.907

Список использованной литературы

1. Мигушов И. И. Механика текстильной нити и ткани. М., 1980. 160 с.
2. Паринов М. А., Чистобородов Г. И. Кривизна и кручение кривой на поверхности вращения. Иваново, 1998. 13 с. Деп. в ВИНТИ 17.02.98. №477-В98.
3. Чистобородов Г. И. Разработка научных основ формирования текстильных материалов в процессах подачи и транспортирования // Дис. ... д-ра техн. наук. Иваново, 1997. 496 с.