Математика и ее приложения. 2004. № 1. С. 119 – 122

УДК 517

И. В. Томина[1]

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПОЛНЫХ СИСТЕМ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ РАВНОБЕДРЕННОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Ключевые слова: ортонормированная полная система, прямоугольный равнобедренный треугольник, собственные функции, оператор Лапласа.

Излагается метод построения ортонормированных полных систем на равнобедренном прямоугольном треугольнике. В качестве приложения рассматривается полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа на треугольнике для некоторого класса смешанных граничных задач.

We propose the method of construction of complete orthonormal systems on the isosceles, rectangular triangle . As application of this method, we construct the complete orthonormal system of eigenfunctions of the Laplace operator for some class of mixed boundary conditions on the triangle.

1. Пусть $F = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x \le \pi\}$ — равнобедренный прямоугольный треугольник в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ со сторонами $l_1 = \{(\pi, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$, $l_2 = \{(t, 0) \mid 0 \le t \le \pi\}$, $l_3 = \{(t, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$ и границей $\partial F = l_1 \cup l_2 \cup l_3$; $K = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$ — квадрат. Всюду далее $\gamma_0 = 1/2$ и $\gamma_m = 1$ при $m \ne 0$.

Теорема 1. *Пусть* $n_0 \in \mathbb{Z}$, $E_0 = \{e_n(x) \mid n \ge n_0\}$ *— ортонормированная полная система (ОНПС) в гильбертовом пространстве* $L^2(0, \pi)$, $e_{mn}(x, y) = e_m(x)e_n(y)$ *при* $m, n \ge n_0$ *и* $(x, y) \in K$, $e^{(i)}_{mn}(x, y) = e_{mn}(x, y) + (-1)^i e_{nm}(x, y)$ *при* $i \in \{0, 1\}$, $J^{(i)} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z};\ n_0 \le n \le m - i\}$.

[1]Ивановский государственный энергетический университет,
E-mail: pavlov_michael@indi.ru

Тогда при любом $i \in \{0,1\}$ множество $E_0^{(i)} = \{\sqrt{\gamma_{m-n}}e_{mn}^{(i)}(x,y) \mid (m,n) \in J^{(i)}\}$ есть ОНПС в гильбертовом пространстве $L^2(F)$.

Доказательство. Так как E_0 — ОНПС в $L^2(0,\pi)$, то множество $E \equiv \{e_{mn}(x,y) \mid m,n \geq n_0\}$ — ОНПС в $L^2(K)$ [1, с. 388–390]. Легко проверить, что $H_i \equiv \{g \in L^2(K) \mid g(x,y) = (-1)^i g(y,x)$ п. в. на $K\}$, $i \in \{0,1\}$ — ортогональные взаимно дополняющие подпространства гильбертова пространства $L^2(K)$, причем $e_{mn}^{(i)}(x,y) \in H_i$ при всех $m,n \geq n_0$. Оператор A_i, действующий по правилу $A_i g = \sqrt{2}g|_F$, осуществляет изоморфизм гильбертова пространства H_i на гильбертово пространство $L^2(F)$; обратный изоморфизм действует по правилу $A_i^{-1}f = g_i$, где $g_i(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}f(x,y)$ при $(x,y) \in F$ и $g_i(x,y) = (-1)^i\frac{\sqrt{2}}{2}f(y,x)$ при $(x,y) \in K\backslash F$; $i \in \{0,1\}$.

Пусть $(m,n) \in J^{(i)}$ и $(m_1,n_1) \in J^{(i)}$, тогда

$$\begin{aligned}(e_{mn}^{(i)}, e_{m_1n_1}^{(i)})_{H_i} =& (e_{mn}, e_{m_1n_1})_{L^2(K)} + (-1)^i(e_{mn}, e_{n_1m_1})_{L^2(K)} + \\ &+ (-1)^i(e_{nm}, e_{m_1n_1})_{L^2(K)} + (e_{nm}, e_{n_1m_1})_{L^2(K)},\end{aligned}$$

где через $(\cdot,\cdot)_H$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве H. Отсюда находим:

$$(e_{mn}^{(i)}, e_{m_1n_1}^{(i)})_{H_i} = \begin{cases} 0 & \text{при } J^{(i)} \ni (m,n) \neq (m_1,n_1) \in J^{(i)}, \\ 2 & \text{при } (m,n) = (m_1,n_1) \in J^{(i)} \text{ и } m > n, \\ 4 & \text{при } i = 0 \text{ и } m = m_1 = n = n_1 \geq n_0. \end{cases}$$

Таким образом, $\{e_{mn}^{(i)}(x,y) \mid (m,n) \in J^{(i)}\}$ — ортогональная в гильбертовом пространстве H_i система, причем

$$\|e_{mn}^{(i)}\|_{H_i} = \begin{cases} 2 & \text{при } i = 0,\ m = n \geq n_0, \\ \sqrt{2} & \text{при } m > n \geq n_0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $i \in \{0,1\}$, $g \in H_i$ и $(g, e_{mn}^{(i)})_{H_i} = 0$ для всех $(m,n) \in J^{(i)}$. Тогда для всех $(m,n) \in J^{(i)}$

$$(g, e_{mn})_{L^2(K)} = (-1)^i(g, e_{nm})_{L^2(K)} = \frac{1}{2}(g, e_{mn}^{(i)})_{L^2(K)} = 0;$$

кроме того, при $i = 1$ и всех $n \geq n_0$ $(g, e_{nn})_{L^2(K)} = -(g, e_{nn})_{L^2(K)}$, откуда $(g, e_{nn})_{L^2(K)} = 0$. Итак, $(g, e_{mn})_{L^2(K)} = 0$ при всех $m,n \geq n_0$.

В силу полноты ортонормированной системы E в $L^2(K)$ получаем $g = 0$ в $L^2(K)$ и, следовательно, $g = 0$ в H_i. Таким образом, система $\{e_{mn}^{(i)}(x, y) \mid (m, n) \in J^{(i)}\}$ полна в H_i.

Применяя к ортогональной полной в H_i системе $\{e_{mn}^{(i)}(x, y) \mid (m, n) \in J^{(i)}\}$ изоморфизм A_i, получаем, что система $\{\sqrt{2}e_{mn}^{(i)}(x, y) \mid (m, n) \in J^{(i)}\}$ ортогональна и полна в $L^2(F)$, причем при всех $(m, n) \in J^{(i)}$ $\|\sqrt{2}e_{mn}^{(i)}\|_{L^2(F)} = \|e_{mn}^{(i)}\|_{H_i}$. Отсюда и из (1) при всех $(m, n) \in J^{(i)}$ следует, что $\|\sqrt{\gamma_{m-n}}e_{mn}^{(i)}\|_{L^2(F)} = 1$, т. е. $E_0^{(i)}$ — ОНПС в $L^2(F)$.

2. Для каждого $s = \overline{0, 7}$ однозначно определяются числа $i_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, 2, 3)$, для которых $s = 4i_1 + 2i_2 + i_3$. Рассматривается следующая спектральная граничная задача:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } F, \quad r_j u + (1 - r_j)\partial u/\partial\nu = 0 \text{ на } l_j \ (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, ν — внутренняя нормаль к ∂F, числа $r_j \in \{0, 1\}$ определяются равенствами $r_1 = |i_2 - i_1|$, $r_2 = i_2$, $r_3 = i_3$. Заметим, что $i_1 = 0$, если на катетах l_1 и l_2 заданы одинаковые граничные условия (т. е. $u|_{l_1 \cup l_2} = 0$ или $\partial u/\partial\nu|_{l_1 \cup l_2} = 0$) и $i_1 = 1$, если на l_1 и l_2 заданы различные граничные условия (на одном из катетов треугольника F задано условие Дирихле, а на другом — условие Неймана). Далее, $i_2 = 0$ $(i_3 = 0)$ в том и только том случае, когда на катете l_2 (на гипотенузе l_3) задано условие Неймана. В частности, $s = 0$ соответствует граничному условию Неймана, а $s = 3$ — граничному условию Дирихле.

Для любого $s = \overline{0, 7}$ вводим систему функций $U_s = \{u_{mn}(s) \mid (m, n) \in J_s\}$, где $J_s = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid i_2(1 - i_1) \le n \le m - i_3\}$,

$$\begin{aligned} u_{mn}(s) \equiv u_{mn}(x, y; s) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\gamma_{m-n}\gamma_{m+i_1}\gamma_{n+i_1}} \times \\ \times \{\cos[(m + i_1/2)x - \pi i_2/2]\cos[(n + i_1/2)y - \pi i_2/2] + \\ + (-1)^{i_3}\cos[(m + i_1/2)y - \pi i_2/2]\cos[(n + i_1/2)x - \pi i_2/2]\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Вычисляя $\Delta u_{mn}(s)$, получаем, что $u_{mn}(s)$ есть решение уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в $\mathbb{R}^2$ и, в частности, на треугольнике F, при $\lambda = \lambda_{mn}(s)$, где $\lambda_{mn}(s) = (m + i_1/2)^2 + (n + i_1/2)^2$, $(m, n) \in J_s$.

Из (3) находим, что при $i_2 = 0$ выполнено условие $\left.\frac{\partial u_{mn}(s)}{\partial y}\right|_{l_2} = 0$, а при $i_2 = 1$ $u_{mn}(s)|_{l_2} = 0$; при $i_3 = 0$ имеем $\left.\left[\frac{\partial u_{mn}(s)}{\partial x} - \frac{\partial u_{mn}(s)}{\partial y}\right]\right|_{l_3} = 0$, а при $i_3 = 1$ $u_{mn}(s)|_{l_3} = 0$; далее, при $i_1 = i_2$ $\left.\frac{\partial u_{mn}(s)}{\partial x}\right|_{l_1} = 0$, а при $i_1 \neq i_2$ $u_{mn}(s)|_{l_1} = 0$. Следовательно, все функции $u_{mn}(s)$ системы U_s являются решениями спектральной задачи (2) при $\lambda = \lambda_{mn}(s)$.

Итак, для любого $s = \overline{0,7}$ U_s — система собственных функций спектральной задачи (2).

Теорема 2. *Для любого* $s = \overline{0,7}$ U_s *есть ОНПС в* $L^2(F)$.

Доказательство. Определяем числа $i_j \in \{0,1\}$ $(j = 1,2,3)$ из равенства $s = 4i_1 + 2i_2 + i_3$. Множество

$$E_0(i_1, i_2) = \{e_n(x; i_1, i_2) \mid n \geq i_2(1 - i_1)\},$$

где $e_n(x; i_1, i_2) = \sqrt{2\gamma_{n+i_1}/\pi}\cos[(n + i_1/2)x - \pi i_2/2]$, является ОНПС в $L^2(0,\pi)$ (см., напр., [3]). Поскольку, очевидно, $U_s = E_0^{(i_3)}(i_1, i_2)$, то в силу теоремы 1 U_s есть ОНПС в $L^2(F)$.

Замечание. Ортогональность и полнота систем U_3 (случай задачи Дирихле) и U_0 (случай задачи Неймана) доказаны ранее в [5]. Доказательство полноты и ортогональности систем U_s для всех $s = \overline{0,7}$, полученное как частный случай при исследовании спектра граничных задач для уравнения Лапласа в фундаментальных областях аффинных групп Вейля, содержится в книге А. Шестопала [4]. Оно использует теоретико-групповую технику, связанную с теорией полупростых алгебр Ли, и основывается на разложении функции Грина спектральной задачи (2) по фундаментальным решениям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ и на обобщенной формуле суммирования Пуассона. Отметим, что у А. Шестопала [4, с. 98–99], нормировочные коэффициенты для собственных функций из ОНПС U_s указаны неточно. Примененный нами в теоремах 1 и 2 метод в идейном смысле ближе к методу [5].

Все результаты настоящей статьи приведены ранее в [2].

Список использованной литературы

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Злементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 520 с.
2. *Томина И. В.* Конкретные формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике в случае смешанных граничных условий. Иваново, 1994. 59 с. Деп. в ВИНИТИ 01.12.94, № 2751-В94.
3. *Томина И. В.* О регуляризованных следах степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольниках в случае смешанных

граничных задач // Вестн. Иван. гос. знерг. ун-та. Вып. 1 (2001). С. 85–89.

4. *Шестопал А. Ф.* Геометрия оператора Лапласа. К.: Выща школа, 1991. 159 с.
5. *Makai E.* Complete systems of eigenfunctions of the wave equation in some special cases // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1976. № 11. P. 139–144.