Математика и ее приложения. 2004. 1. С. 37 – 40

УДК 514.17

С. Б. Васильев[1]

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ СЕРИИ СОВЕРШЕННЫХ ФОРМ

Ключевые слова: положительные квадратичные формы, совершенные формы.

Предложена серия (относительно любой размерности $n \geq 5$) совершенных форм от n переменных. При $n = 5$ форма этой серии является известной «третьей» совершенной формой ϕ_2^5.

This note gives a new serie (in dimensions $n \geq 5$) of perfect positive quadratic forms.

Квадратичная форма

$$\phi^n = \phi^n(X) = \phi^n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1=i\leq j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

от n действительных переменных $X = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ называется положительно определенной (ниже ПКФ), если $\phi^n(X) > 0$ для любого $X \in R^n$, кроме $X = (0, \ldots, 0)$.

Наименьшее значение M, которое форма $\phi^n(X)$ принимает на множестве Z^n точек X с целочисленными координатами $x_1, \ldots, x_n$, называют *арифметическим минимумом* или просто *минимумом* формы ϕ^n, а точки $X \in Z^n$, на которых достигается минимум M формы ϕ^n, — представлениями минимума. Формы с пропорциональными коэффициентами a_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ не считаются различными; часто коэффициенты выбираются так, чтобы минимум формы равнялся единице. Не различают также представления минимума X и $-X$.

Г. Ф. Вороной [2] назвал совершенной такую ПКФ ϕ^n, которая определяется всеми представлениями $X_1, \ldots, X_\sigma$ своего минимума

[1]Красноярский государственный университет

M, то есть все коэффициенты a_{ij} формы ϕ^n можно найти из системы уравнений

$$\phi^n(X_k) = M, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots, \sigma. \tag{1}$$

В работе [2] описаны (названия и обозначения взяты из статей [1, 3]) первая $\phi_0^n = \sum_{i\le j; i,j=1}^n x_i x_j$ $(n \ge 2)$ и вторая $\phi_1^n = \phi_0^n - x_1 x_2$ $(n > 3)$ совершенные формы от любого числа пременных, а также совершенная форма $\phi_2^5 = \phi_0^5 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)$ от пяти переменных, имеющая минимум $M = 1$ и 15 представлений минимума:

$$e_1, \ldots, e_5,\;\; e_3 - e_1, \ldots, e_5 - e_1,\;\; e_3 - e_2, \ldots, e_5 - e_2,\;\; -e_1 - e_2 + e_3 + e_4,$$

$$-e_1 - e_2 + e_3 + e_5,\;\; -e_1 - e_2 + e_4 + e_5,\;\; -e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5,$$

где $e_1 = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0), \ldots, e_5 = (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)$.

Предлагаемой ниже серии совершенных форм принадлежат еще следующие две формы. Среди всех совершенных форм от шести переменных, описанных Барнсом [4], есть форма

$$\phi_0^6 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)$$

с минимумом $M = 1$ и 22 его представлениями, которые описаны также в статье [1]. А среди совершенных форм от семи переменных [5] есть форма $\phi_0^7 - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)$ с минимумом $M = 1$ и $\sigma = 28$.

Предложение. *Квадратичная форма*

$$\phi_2^n = \phi_0^n - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5), \quad n \ge 5,$$

является совершенной ПКФ с минимумом $M = 1$ и

$$\sigma = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 6$$

представлениями минимума, которыми являются точки

$$e_j - e_i, \quad -1 \le i < j \le n,$$

кроме

$$e_1 - e_{-1},\ e_2 - e_{-1},\ e_2 - e_1,\ e_4 - e_3,\ e_5 - e_3,\ e_5 - e_4,$$

где

$$e_{-1} = (-1,\,-1,\,1,\,1,\,1,\,0,\,\ldots,0),\ e_0 = (0,\,\ldots,0),$$
$$e_1 = (1,\,0,\,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,1).$$

Доказательство. Запишем серию в виде

$$\phi_2^n = \frac{1}{2}\Big[(x_1 + \cdots + x_n)^2 + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_3)^2 + $$
$$+(x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_6^2 + \cdots + x_n^2\Big], \qquad (2)$$

из которого с очевидностью вытекает, что формы серии являются положительными. Несложно также установить при $n = 5,\,6,\,7$ совпадение с названными выше формами и справедливость перечисленных в формулировке предложения представлений минимума.

Предполагая, что предложение верно для формы ϕ_2^{n-1}, докажем его для $\phi_2^n, n \geq 8$.

Пусть $X = (x_1,\,\ldots,x_n) \in Z^n$. Разобьём Z^n на два множества:

$$A^n = \{X \in Z^n|\ x_6 \neq 0,\,\ldots,x_n \neq 0\}, \qquad B^n = Z^n - A^n.$$

Если $X \in A^n$, то из (2) с учётом $n \geq 8$ имеем:

$$\phi_2^n \geq \frac{1}{2}(x_6^2 + \cdots + x_n^2) \geq \frac{n-5}{2} \geq \frac{3}{2}. \qquad (3)$$

Если $X \in B^n$, то существует такое $x_k = 0$ $(6 \leq k \leq n)$, что из (2) следует:

$$\phi_2^n(x_1,\,\ldots,x_n) = \phi_2^{n-1}(x'_1,\,\ldots,x'_{n-1}), \qquad (4)$$

где $x'_i = x_i$ $(1 \leq i < n, i \neq k)$ и если $k < n$, то $x'_k = x_n$.

По предположению минимум формы ϕ_2^{n-1} равен единице, поэтому из (3) и (4) имеем, что $\phi_2^n(X) \geq 1$. Но $\phi_2^n(e_1) = 1$, следовательно, минимум формы ϕ_2^n равен единице.

Покажем, что других представлений минимума, кроме названных в предложении, форма не имеет. Пусть $\phi_2^n(X) = 1$. Согласно (3) $X \in B^n$, а согласно (4) точка $(x'_1,\,\ldots,x'_{n-1})$ — представление минимума формы ϕ_2^{n-1}. Тогда $(x'_1,\,\ldots,x'_{n-1},\,0) = \pm(e_j - e_i)$, где i и j удовлетворяют условиям $-1 \leq i < j < n$. Выбираем знак перед X так, чтобы $(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, 0) = e_j - e_i$.

Если $x_n = 0$, то при $k < n$ X отличается от $(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, 0)$ перестановкой двух нулей (x_n и x_k), при $k = n$ нет такой перестановки, то есть $X = e_j - e_i$. Если $x_n \neq 0$, то $k < n$ и $x'_k \neq 0$. Из (4) и строения e_i и e_j очевидно, что либо $k = j$, $x'_k = 1$, и тогда $X = e_n - e_i$ либо $k = i$, $x'_k = -1$ и $X = -(e_n - e_j)$. Таким образом, X или $-X$ — представление минимума из названных в предложении точек минимума.

По предположению форма ϕ_2^{n-1} – совершенная, и все её коэффициенты могут быть найдены из системы вида (1). Если $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – представление минимума формы ϕ_2^{n-1}, то $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ – представление минимума формы ϕ_2^n. Относительно неизвестных a_{ij} уравнения $\phi_2^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 1$ и $\phi_2^n(_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 1$ одинаковы, поэтому среди уравнений системы вида (1) для формы ϕ_2^n есть все уравнения системы вида (1) для формы ϕ_2^{n-1}, то есть коэффициенты a_{ij} $(1 \leq i < j < n)$ формы ϕ_2^n могут быть найдены из её системы (1), причём они будут равны соответствующим коэффициентам формы ϕ_2^{n-1}. Далее, из уравнения $\phi_2^n(e_n - e_0) = 1$ получаем $a_{nn} = 1$. Уравнение $\phi_2^n(e_n - e_i) = 1$ $(1 \leq i < n)$ имеет вид $a_{ii} - a_{in} + a_{nn} = 1$; учитывая, что $a_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, находим $a_{in} = 1$. Все коэффициенты формы ϕ_2^n найдены из системы уравнений (1), то есть ϕ_2^n – совершенная форма. Предложение доказано.

Список использованной литературы

1. *Барановский Е. П.* Разбиение евклидовых пространств на L-многогранники некоторых совершенных решеток // Тр. МИ АН СССР. 1991. Т. 196. С. 27–46.
2. *Вороной Г. Ф.* О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Собр. соч. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. Т. 2. С. 171–238.
3. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* Классические методы теории решётчатых упаковок // УМН. 1979. Вып. 4. С. 3–63.
4. *Barnes E. S.* The complete enumeration of extreme senary forms // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1957. Vol .249. P. 461–506.
5. *Stacey K. C.* The enumeration of perfect septentary forms // J. Lond. Math. Soc. 1975. Vol. 10. P. 97–104.