Математика и ее приложения. 2004. 1. С. 109 – 112

УДК 519.15

Е. С. Оленева, Е. В. Питерцева, Н. И. Яцкин[1]

О НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУ-, ПАРА-ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ

Ключевые слова: полутопологическая группа, паратопологическая группа, аксиомы отделимости, фильтр окрестностей.

В работе в терминах фильтров на группе представлены некоторые топологические свойства биоднородных, полутопологических и паратопологических групп.

Some topological properties of bihomogeneous, semitopological and paratopological groups are represented in terms of filters on groups.

1. Биоднородные, полутопологические, паратопологические и топологические группы

Определение 1. *Биоднородной* будем называть группу G с заданной на ней топологией τ такой, что все (левые, правые) сдвиги $l_g, r_g : G \to G$, $g \in G$ непрерывны.

Следуя [1], биоднородная группа называется *полутопологической,* если непрерывна инверсия $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$, $x \in G$. *Паратопологической* называется группа (G, τ) такая, что групповое умножение $\mu : G \times G \to G$ непрерывно (что является условием более сильным, чем биоднородность). *Топологической* назывется группа (G, τ), для которой непрерывны как μ, так и ν.

Теорема 1. *Пусть (G, τ) – биоднородная группа. Тогда фильтр $\mathcal{F}$ окрестностей нейтрального элемента $e \in G$ (в смысле топологии τ) обладает свойствами*

$$(tg.\,1)\ (\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F})(\forall z \in V)[z^{-1}U \in \mathcal{F}];$$

[1]Ивановский государственный университет, E-mail: yatskin@ivanovo.ac.ru

$$(tg.\,2)\ (\forall U \in \mathcal{F})[e \in U];$$

$$(tg.\,3)\ (\forall U \in \mathcal{F})(\forall a \in G)[aUa^{-1} \in \mathcal{F}].$$

Обратно, если на группе G задан фильтр $\mathcal{F}$, удовлетворяющий условиям (tg. 1–3), то на G существует единственная топология τ, превращающая G в биоднородную группу и такая, что $\mathcal{F}$ совпадает с фильтром окрестностей $e \in G$ (в смысле топологии τ).

Теорема 2. *Пусть (G, τ) – полутопологическая (паратопологическая) группа. Тогда фильтр $\mathcal{F}$ окрестностей нейтрального элемента удовлетворяет условиям (tg. 1–3) и*

$$(tg.\,4)\ (\forall U \in \mathcal{F})[U^{-1} \in \mathcal{F}];$$

или, соответственно, – условиям (tg. 2–3) и

$$(tg.\,5)\ (\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F})[V \cdot V \subseteq U].$$

Обратно, если фильтр $\mathcal{F}$ на группе G удовлетворяет условиям (tg. 1–4), (соответственно, (tg. 2, 3, 5)), то он однозначно определяет на группе G структуру полутопологической (соответственно паратопологической) группы, для которой служит фильтром окрестностей нейтрального элемента.

Замечание 1. Таким образом, в случае топологических групп характеристическими свойствами фильтра $\mathcal{F}$ являются (tg. 3–5) (см. [1], где можно также найти некоторые указания по поводу доказательства теоремы 2).

2. Формулы для замыкания в биоднородных группах. Иерархия оболочек нейтрального элемента

Теорема 3 ([1])**.** *Пусть (G, τ) – биоднородная группа, $M \subseteq G$. Тогда замыкание подмножества M может быть найдено по любой из формул:*

$$\overline{M} = \cap\{M \cdot V^{-1} : V \in \mathcal{F}\} = \cap\{V^{-1} \cdot M : V \in \mathcal{F}\}. \quad (1)$$

В случае полутопологической группы (G, τ) справедливы также формулы

$$\overline{M} = \cap\{M \cdot V : V \in \mathcal{F}\} = \cap\{V \cdot M : V \in \mathcal{F}\}, \quad (2)$$

а в случае паратопологической группы — формула:

$$\overline{M} = \cap\{V^{-1} \cdot M \cdot V^{-1} : V \in \mathcal{F}\}. \tag{3}$$

В случае топологической группы имеет место формула

$$\overline{M} = \cap\{V \cdot M \cdot V : V \in \mathcal{F}\}. \tag{4}$$

В каждой из формул (1)–(4) результат не изменится, если заменить фильтр $\mathcal{F}$ произвольным его базисом $\mathcal{B}$.

Если пересечения, фигурирующие в формулах (2) и (4), вычислить для $M = E = \{e\}$, то возникают следующие подмножества в G:

$$A = \cap\mathcal{F} = \cap\{V : V \in \mathcal{F}\};\ B = \cap\{V \cdot V : V \in \mathcal{F}\}. \tag{5}$$

Будем рассматривать также пересечения

$$C = \cap\{V \cdot V^{-1} : V \in \mathcal{F}\};\ C' = \cap\{V^{-1} \cdot V : V \in \mathcal{F}\}; \tag{6a}$$

$$D = \cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{F}\};\ D' = \cap\{\overline{V^{-1}} : V \in \mathcal{F}\}. \tag{6b}$$

Так определенные подмножества A, B, C, C', D, D' будем называть *оболочками e*. Между ними имеются очевидные соотношения типа $A \subseteq B$; $A \subseteq C$; $A \subseteq D$; $C = C^{-1}$ и др. Кроме того, эти оболочки связаны с замыканием $\overline{E}$.

Теорема 4. *В любой биоднородной группе справедливы соотношения*

$$\overline{E} = A^{-1};\ C = C' = D. \tag{7}$$

В любой полутопологической группе, помимо (7), выполняются соотношения

$$A = A^{-1};\ B = B^{-1};\ D = D^{-1} = D'. \tag{8}$$

В любой паратопологической группе, помимо (7), выполняется формула

$$A = B. \tag{9}$$

В любой топологической группе все оболочки (5)–(6) симметричны, совпадают между собой и совпадают с $\overline{E}$.

3. Аксиомы отделимости для полу-, паратопологических групп

Как хорошо известно (см., напр., [1, 2]), в любой топологической группе *аксиома Колмогорова* (T_0), *аксиома Фреше* (T_1) и *аксиома Хаусдорфа* (T_2) равносильны, причиной чего служит выполнение в любой топологической группе аксиомы (T_3). В более общей ситуации дело выглядит следующим образом.

Теорема 5. *В биоднородной группе* (G, τ) *имеются следующие эквивалентности для аксиом отделимости:*

$$(T_0) \Leftrightarrow (A \cap A^{-1} = E); \tag{10}$$

$$(T_1) \Leftrightarrow (A = E); \tag{11}$$

$$(T_2) \Leftrightarrow (C = E) \Leftrightarrow (C' = E) \Leftrightarrow (D = E). \tag{12}$$

В полутопологической группе, дополнительно к (10)–(12), справедливы эквивалентности

$$(T_0) \Leftrightarrow (T_1); \tag{13}$$

$$(T_2) \Leftrightarrow (B = E). \tag{14}$$

В паратопологической группе, помимо (10)–(12), справедлива эквивалентность

$$(T_1) \Leftrightarrow (B = E). \tag{14}$$

Для топологической группы тривиальность любой из оболочек эквивалентна хаусдорфовости.

Замечание 2. Аксиома (T_3) для биоднородных групп равносильна следующему утверждению:

$$\{\overline{V} \text{ есть базис } \mathcal{F}\}. \tag{16}$$

Для полутопологических (паратопологических) групп эта аксиома может не выполняться.

Список использованной литературы

1. *Бурбаки Н.* Общая топология: (Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства). М.: Наука, 1969. 392 с.
2. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 1. 656 с.