Математика и ее приложения : ЖИМО. 2013. Вып. 1 (10). С. 3–12

УДК 517.9

В. М. Деундяк [1], А. В. Лукин [2]

Приближенный метод решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа

Ключевые слова: интегральные уравнения, операторы свертки, приближенные методы, проекционные методы, однородные ядра, анизотропно однородные ядра.

Работа посвящена построению проекционного метода решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами конечномерного типа, а также приближенного метода решения таких уравнений для ядер компактного типа на основе редукции к уравнениям с анизотропно однородными ядрами в ограниченных областях.

Key words: integral equations, convolution operators, approximation methods, section methods, homogeneous kernels, anisotropically homogeneous kernels.

The paper is devoted to construction of the section method of solving equations for multidimensional operators with anisotropically homogeneous kernels of finite-dimensional type. We also constructed the approximate method of solving such equations for kernels of compact type on the basis of the reduction to equations with anisotropically homogeneous kernels in bounded domains.

1. Введение

Изучение многомерных операторов с однородными ядрами было начато Л. Г. Михайловым и продолжилось в работах Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина и других авторов (см. [1, 2, 3] и цитированные там источники). Как правило, на ядра таких операторов накладывалось условие $SO(n)$-инвариантности. Для операторов с $SO(n)$-инвариантными ядрами применимость проекционного метода изучалась О. Г. Авсянкиным [2, 3]. В работах [4, 5, 6] были рассмотрены более широкие классы операторов с однородными и анизотропно однородными ядрами компактного типа.

В работах А. В. Козака [7, 8] на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [9] разработан общий проекционный метод решения уравнений свертки в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$. С помощью этих результатов в работе [10] получен некоторый приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами

[1]Южный федеральный университет; E-mail: vlade@math.rsu.ru

[2]Южный федеральный университет; E-mail: alexanderlukin9@gmail.com

и указаны приложения к теории приближенных методов для операторов с анизотропно однородными ядрами на основе редукции к уравнениям свертки.

Настоящая работа посвящена построению проекционного метода решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами конечномерного типа, а также приближенного метода решения таких уравнений для ядер компактного типа на основе редукции к уравнениям с анизотропно однородными ядрами в ограниченных областях.

2. Предварительные сведения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества действительных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant 2$. Если $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, то через $\mathscr{L}(\mathfrak{X})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$, через $I_{\mathfrak{X}}$ — тождественный оператор в $\mathfrak{X}$, а через $\mathscr{K}(\mathfrak{X})$ — идеал компактных операторов. Для произвольного изоморфизма банаховых пространств $g : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ равенство

$$\widehat{g}(A) = gAg^{-1}, \quad A \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}_1), \tag{1}$$

задает изоморфизм подобия банаховых алгебр $\widehat{g} : \mathscr{L}(\mathfrak{X}_1) \to \mathscr{L}(\mathfrak{X}_2)$, причем $\widehat{g}(\mathscr{K}(\mathfrak{X}_1)) = \mathscr{K}(\mathfrak{X}_2)$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, w и u — весовые функции на снабженных мерами пространствах X и Y соответственно; $L_p^m(X; w)$ — весовое банахово пространство комплекснозначных m-мерных вектор-функций, суммируемых на X с p-ой степенью, с обычной нормой; $L_p(X) = L_p(X; 1)$.

Через $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u) (\subset L_p(X \times Y; w \otimes u))$ будем обозначать алгебраическое тензорное произведение весовых пространств $L_p(X; w)$ и $L_p(Y; u)$, состоящее из функций вида

$$\sum_{i=1}^{l} \varphi_i \psi_i, \quad \varphi_i \in L_p(X; w), \quad \psi_i \in L_p(Y; u).$$

Топологическое тензорное произведение $L_p(X; w) \otimes L_p(Y; u)$, являющееся замыканием $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$, совпадает с $L_p(X \times Y; w \otimes u)$. Рассмотрим операторные алгебры $\mathfrak{A}(\subset \mathscr{L}(L_p(X; w)))$ и $\mathfrak{B}(\subset \mathscr{L}(L_p(Y; u)))$, $1 < p < \infty$. Через $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}(\subset \mathscr{L}(L_p(X \times Y; w \otimes u)))$ будем обозначать алгебраическое тензорное произведение алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, состоящее из операторов вида

$$\sum_{i=1}^{l} A_i \otimes B_i, \quad A_i \in \mathfrak{A}, \quad B_i \in \mathfrak{B}.$$

Топологическое тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ определяется как замыкание $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ в $\mathscr{L}(L_p(X \times Y; w \otimes u))$. Если $\mathscr{U}$ — банахова алгебра, то $L(n; \mathscr{U}) = L(n; \mathbb{C}) \otimes \mathscr{U}$ — банахова алгебра $(n \times n)$-матриц над $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}^+$ — ее унитализация.

3. Операторы с анизотропно однородными ядрами

В дальнейшем через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, будем обозначать мультииндекс размера k; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, и $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ — мультииндекс, соответствующий разбиению пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$, S_{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле, $\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}} = S_{n_1-1} \times \cdots \times S_{n_k-1}$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим ограниченный интегральный оператор

$$(K_\varkappa f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varkappa(x, y) f(y) dy, \tag{2}$$

где $\varkappa$ удовлетворяет условию анизотропной однородности мультистепени $(-\mathbf{n})$:

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad \forall x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \forall \beta_i \in \mathbb{R}_+ : \varkappa(\beta_1 x_{(1)}, \ldots, \beta_k x_{(k)}, \\ \beta_1 y_{(1)}, \ldots, \beta_k y_{(k)}) = \beta_1^{-n_1} \ldots \beta_k^{-n_k} \varkappa(x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}, y_{(1)}, \ldots, y_{(k)})\end{aligned} \tag{3}$$

(см. [5]). Для удобства перейдем к полисферическим координатам. Пусть $\mathbb{R}_+^k = \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$ — положительный конус в $\mathbb{R}^k$ и $(r, \sigma)(\in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$ — полисферические координаты точки $x = (x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}) \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus \{0\} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \setminus \{0\}$ (см. [5, с. 4]). Переход к полисферической системе координат индуцирует изоморфизм банаховых пространств

$$\mathbf{q}_{\mathbf{n-1}} : \ L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1). \tag{4}$$

Рассмотрим измеримую функцию l, определенную на $(\mathbb{R}_+^k)^2 \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}^2$, и анизотропно однородную мультистепени $(-\mathbf{1})$ по первым $2k$-аргументам:

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \quad \forall x_i, y_i, \mu_i \in \mathbb{R}_+ : l(\mu_1 x_1, \ldots, \mu_k x_k, \mu_1 y_1, \ldots, \mu_k y_k, \sigma, \theta) = \\ \mu_1^{-1} \ldots \mu_k^{-1} l(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, \sigma, \theta).\end{aligned}$$

Отнесем ее к классу $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$, если для почти всех $\sigma(\in \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$

$$l_{[1]}(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} |l(r, e, \vartheta, \sigma)| r^{\mathbf{n}/p-1} dr d\vartheta < \infty,$$

$$l_{[2]}(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} |l(e, r, \sigma, \vartheta)| r^{-\mathbf{n}/p} dr d\vartheta < \infty,$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^k$, $l_{[1]}, l_{[2]} \in L_\infty(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$. В [5] показано, что для произвольного $l(\in \mathcal{M}'_{\mathbf{n};p})$ формула

$$(L_l f)(r, \sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^k} \int\limits_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} l(r, \rho, \sigma, \vartheta) f(\rho, \vartheta) d\rho d\vartheta \tag{5}$$

задает оператор L_l из $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$.

Будем полагать, что измеримая функция α, определенная на $(\mathbb{R}^k_+)^2$ и удовлетворяющая условию анизотропной однородности мультистепени $(-\mathbf{1})$, принадлежит классу $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)}$, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k_+} |\alpha(\rho, e)|\rho^{-\mathbf{n}/p-1} d\rho < \infty, \quad e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^k_+.$$

Пусть $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ — замыкание $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)} \odot L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$ в $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$. Ядра из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ называются ядрами компактного типа. Замкнутую подалгебру операторов из $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$, порожденную операторами (5) с ядрами из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$, обозначим через $\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p}$. Пусть $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p}$ — класс функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, полученный из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ переходом к декартовой системе координат посредством изометрического изоморфизма $\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{n}$, определяемого равенством (1.6) из [5]:

$$(\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{n}\varphi)(x, y) = \varphi\Big(|x_{(1)}|, \ldots, |x_{(k)}|, |y_{(1)}|, \ldots, |y_{(k)}|, \frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \ldots, \frac{x_{(k)}}{|x_{(k)}|}, \frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|}, \ldots, \frac{y_{(k)}}{|y_{(k)}|}\Big) \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{|y_{(j)}|^{n_j-1}}, \quad x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{6}$$

Замкнутую подалгебру операторов из $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную операторами (2) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p}$ обозначим через $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$.

Зафиксируем в $L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$ базис и через G_m обозначим подпространство $L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$, порожденное первыми m функциями из этого базиса. Пусть $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ — замыкание $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)} \odot G_m$ в $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$. Ядра из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ называются ядрами конечномерного типа. Замкнутую подалгебру операторов из $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$, порожденную операторами (5) с ядрами из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$, обозначим через $\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p;m}$. Пусть $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p;m}$ — класс функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, полученный из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ переходом к декартовой системе координат (см. (6)). Замкнутую подалгебру операторов из $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную операторами (2) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p;m}$ обозначим через $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m}$.

4. Приближенный метод

Приведем классическое определение проекционного метода (см. [11, с. 189]). Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\{P_k\}_{k=1}^\infty (\subset \mathscr{L}(\mathfrak{X}))$ — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к $I_\mathfrak{X}$, и $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{X})$. Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = \psi. \tag{7}$$

Приближенный метод решения уравнения (7), состоящий в отыскании решения $\varphi_k (\in P_k\mathfrak{X})$ уравнения

$$P_k A P_k \varphi_k = P_k \psi \tag{8}$$

называется проекционным методом. Если, начиная с некоторого номера k_0, для любого $\psi (\in \mathfrak{X})$ уравнение (8) имеет единственное решение φ_k, и при k стремящемся к бесконечности последовательность $\{\varphi_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ стремится к решению уравнения (7), то говорят, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов (P_k, P_k).

Пусть M — замкнутое в $\mathbb{R}^k$ множество с гладкой границей ∂M, точка 0 принадлежит внутренности $\mathrm{int}M$ множества M; K_x — конус с вершиной в точке $x(\in \partial M)$, образованный касательной к ∂M в точке x, для которого $0 \in K_x$. Пусть $sM = \{sx, x \in M\}$, где $s > 0$. Определим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^k)$ проектор P_M:

$$(P_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим в $L_p(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$ проектор Q^m, порожденный первыми m элементами базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$(Q^m f)(x) := Q^m(\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i e_i(x), \quad f_i \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

В [5] строится изометрический изоморфизм

$$\mathbf{u_{n-1}} : L_p(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}),$$

$$(\mathbf{u_{n-1}}\varphi)(x_1, \ldots, x_k, \boldsymbol{\sigma}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_{(k)}) = e^{\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i} \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_k}, \boldsymbol{\sigma}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_{(k)}),$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \boldsymbol{\sigma}_{(i)} \in S_{n_i - 1}, \quad i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{11}$$

При помощи $\mathbf{q_{n-1}}$ и $\mathbf{u_{n-1}}$ (см. (4) и (11)) определим изоморфизм

$$\mathbf{v_{n-1}} = \mathbf{u_{n-1}}\mathbf{q_{n-1}} : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}),$$

Конструкция (1) по $\mathbf{u_{n-1}}$ и $\mathbf{v_{n-1}}$ позволяет определить изоморфизмы подобия операторных алгебр:

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n-1}} : \mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1)) \to \mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})),$$
$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}} : \mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^n)) \to \mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})). \tag{12}$$

Рассмотрим семейства проекторов

$$\{H_{sM}^m = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}^{-1}(P_{sM} \otimes Q^m)\}_{s,m=1}^{\infty}, \quad \{H_{K_x}^m = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}^{-1}(P_{K_x} \otimes Q^m)\}_{m=1}^{\infty},$$

и уравнение

$$H_{sM}^m A H_{sM}^m \varphi_s^m = H_{sM}^m \psi, \tag{13}$$

где $A \in (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$. Основными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть оператор* $A(\in (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+)$ *обратим и, начиная с некоторого* m_0, *операторы* $H^m_{K_x} A H^m_{K_x} (\in \mathscr{L}(H^m_{K_x} L_p(\mathbb{R}^n)))$ *обратимы для всех* $m(\geqslant m_0)$ *и для всех* $x(\in \partial M)$. *Тогда для любого* $\psi(\in L_p(\mathbb{R}^n))$ *существует номер* $\widetilde{m}_0$, *такой что для каждого* $m(\geqslant \widetilde{m}_0)$ *найдется номер* $s_0(m)$, *при котором для каждого* $s(\geqslant s_0(m))$ *уравнение* (13) *имеет единственное решение* φ^m_s *и*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{s\to\infty} \varphi^m_s = \varphi, \tag{14}$$

где φ *— решение уравнения* (7).

Теорема 2. *Пусть*

$$\{H_{sM} = \widehat{\mathbf{v}}^{-1}_{\mathbf{n-1}}(P_{sM} \otimes I)\}^\infty_{s=1}, \quad H_{K_x} = \widehat{\mathbf{v}}^{-1}_{\mathbf{n-1}}(P_{K_x} \otimes I).$$

К оператору $A(\in (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m})^+)$ *применим проекционный метод по системе проекторов* (H_{sM}, H_{sM}) *тогда и только тогда, когда операторы* $H_{K_x} A H_{K_x} (\in \mathscr{L}(H_{K_x} L_p(\mathbb{R}^n)))$ *обратимы для всех* $x(\in \partial M)$.

5. Обоснование приближенного метода

Доказательство теоремы 1 проведем путем редукции к операторам свертки с компактными коэффициентами. Через $V_p(= V_p(\mathbb{R}^k))$ обозначим замкнутую подалгебру $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденную операторами свертки

$$(C_a f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} a(x-y) f(y) dy, \quad a \in L_1(\mathbb{R}^k).$$

Пусть $V^m_p = L(m; V_p)$, $\mathcal{X}$ — произвольный хаусдорфов компакт с мерой, $\mathscr{K}_p = \mathscr{K}(L_p(\mathcal{X}))$. Рассмотрим замкнутую банахову алгебру $V^{\mathscr{K}_p}_p = V_p \otimes \mathscr{K}_p$. Рассмотрим в $L_p(\mathcal{X})$ проектор Q^m на первые m элементов базиса (см. (10)). Следующая лемма доказывается по схеме из [11, с. 200] и содержится в [10].

Лемма 1. *К оператору* $D(\in (V^{\mathscr{K}_p}_p)^+)$ *применим проекционный метод по системе проекторов* $(I \otimes Q^m, I \otimes Q^m)$ *тогда и только тогда, когда он обратим.*

Рассмотрим семейство проекторов $\{P_{sM} \otimes Q^m\}^\infty_{s,m=1}$ (см. (9) и (10)) и уравнение

$$(P_{sM} \otimes Q^m) D (P_{sM} \otimes Q^m) \varphi^m_s = (P_{sM} \otimes Q^m)\psi, \tag{15}$$

где $D \in (V^{\mathscr{K}_p}_p)^+$. В [8] А. В. Козаком получен критерий применимости проекционного метода для операторов из $(V^m_p)^+$. Опираясь на этот критерий, в [10] доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть оператор* $D(\in (V^{\mathscr{K}_p}_p)^+)$ *обратим и, начиная с некоторого* m_0, *операторы*

$$(P_{K_x} \otimes Q^m) D (P_{K_x} \otimes Q^m) (\in \mathscr{L}((P_{K_x} \otimes Q^m) L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X})))$$

обратимы для всех $m(\geqslant m_0)$ *и для всех* $x(\in \partial M)$. *Тогда для любого* $\psi(\in L_p(\mathbb{R}^k \times \mathcal{X}))$ *существует номер* $\widetilde{m}_0$, *такой что для любых* $m(\geqslant \widetilde{m}_0)$ *найдется номер* $s_0(m)$, *при котором для всех* $s(\geqslant s_0(m))$ *уравнение* (15) *имеет единственное решение* φ_s^m *и*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}\varphi_s^m = \varphi, \tag{16}$$

где φ *— решение уравнения* (7).

Доказательство теоремы 1. Из конструкции (1) изоморфизма $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}$ следуют равенства

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}(H_{K_x}^m A H_{K_x}^m) = (P_{K_x}\otimes Q^m)(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)(P_{K_x}\otimes Q^m),$$

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}(H_{sM}^m A H_{sM}^m) = (P_{sM}\otimes Q^m)(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)(P_{sM}\otimes Q^m). \tag{17}$$

В [5] доказывается, что ограничение $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}$ на $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ задает изоморфизм подобия $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ на $(V_p^{\mathscr{K}_{p;n}})^+ = (V_p(\mathbb{R}^k)\otimes\mathscr{K}_p(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}))^+$. Зафиксируем произвольную функцию $\psi(\in L_p(\mathbb{R}^n))$. Из леммы 2 следует, что существует номер $\widetilde{m}_0$, такой что для любых $m(\geqslant \widetilde{m}_0)$ найдется номер $s_0(m)$, при котором для всех $s(\geqslant s_0(m))$ уравнение

$$(P_{sM}\otimes Q^m)(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)(P_{sM}\otimes Q^m)\widetilde{\varphi}_s^m = (P_{sM}\otimes Q^m)\mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}\psi \tag{18}$$

имеет единственное решение $\widetilde{\varphi}_s^m$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{s\to\infty}\widetilde{\varphi}_s^m = \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi}$ — решение уравнения

$$(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)\widetilde{\varphi} = \mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}\psi. \tag{19}$$

При помощи равенств (1) и (17) от уравнений (18) и (19) можем перейти к равносильным уравнениям

$$H_{sM}^m A H_{sM}^m \mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}^{-1}\widetilde{\varphi}_s^m = H_{sM}^m\psi, \quad A\mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}^{-1}\widetilde{\varphi} = \psi,$$

из которых следует, что решения уравнений (13) и (7) представимы в виде

$$\varphi_s^m = \mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}^{-1}\widetilde{\varphi}_s^m, \quad \varphi = \mathbf{v}_{\mathbf{n-1}}^{-1}\widetilde{\varphi},$$

и равенство (14) выполнено. •

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся конструкцией $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}$ (см. (1) и (12)):

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}(H_{K_x} A H_{K_x}) = (P_{K_x}\otimes I)(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)(P_{K_x}\otimes I),$$

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}(H_{sM} A H_{sM}) = (P_{sM}\otimes I)(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A)(P_{sM}\otimes I).$$

Аналогично тому, как это сделано в [5], доказывается, что ограничение $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}$ на $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m})^+$ задает изоморфизм подобия $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m})^+$ на алгебру матричных сверток $(V_p^m)^+$. Следовательно, $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A \in (V_p^m)^+$. Воспользовавшись критерием [8, с. 71] получаем, что к оператору $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n-1}}A$ применим проекционный метод по системе проекторов $((P_{sM}\otimes I),(P_{sM}\otimes I))$. Таким образом, к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов (H_{sM}, H_{sM}). $\bullet$

Приведенная выше схема доказательства теоремы 1 показывает, что решение уравнений для операторов с однородным ядром тесно связано с решением сверточных систем уравнений в ограниченных областях. Проиллюстрируем этот факт на примере уравнения с оператором $K_\varkappa$ из работы [5, с. 15]. Рассмотрим оператор $I+K_\varkappa(\in(\mathfrak{V}_{(2,2);p})^+)$, где $K_\varkappa$ — оператор вида (2) с ядром $\varkappa$ из $\mathfrak{C}_{(2,2);p}$:

$$((I+K_\varkappa)f)(x_{(1)},x_{(2)}) = I + \int\limits_{\mathbb{R}^4}\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|y_{(j)}|^2}\left(\frac{|y_{(j)}|}{|x_{(j)}|}\right)^{\frac{2}{p}} e^{-\alpha_j \ln^2 \frac{|x_{(j)}|}{|y_{(j)}|}}\right)$$
$$\beta\left(\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|},\frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|},\frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|},\frac{y_{(2)}}{|y_{(2)}|}\right) f(y_{(1)},y_{(2)})dy_{(1)}dy_{(2)},$$

где

$$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\quad \beta\in L_\infty(\mathbb{T}_{(1,1)}\times\mathbb{T}_{(1,1)}),\quad x_{(1)},x_{(2)},y_{(1)},y_{(2)}\in\mathbb{R}^2.$$

При помощи изоморфизма (6) перейдем к функции

$$\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\mathbf{q}}^{-1}_{(2,2)}\varkappa$$

из $\mathfrak{C}'_{(2,2);p}$. Рассмотрим оператор $L_{\widetilde{\varkappa}}$ вида (5) с ядром $\widetilde{\varkappa}$. Из леммы 1.1 [5] следует, что

$$L_{\widetilde{\varkappa}} = \widehat{\mathbf{q}}_{(1,1)}K_\varkappa,$$

где $\mathbf{q}_{(1,1)}$ — изоморфизм, индуцированный переходом к полисферическим координатам (4). Из леммы 3.4 [5] следует, что оператор

$$C_{\widetilde{\varkappa}} = I + \widehat{\mathbf{u}}_{(1,1)}L_{\widetilde{\varkappa}}$$

(см. (11) и (1)) принадлежит $(V_p^{\mathscr{K}_{p;4}})^+(=(V_p(\mathbb{R}^2)\otimes\mathscr{K}_p(\mathbb{T}_{(1,1)}))^+)$. Оператор $C_{\widetilde{\varkappa}}$ имеет вид:

$$(C_{\widetilde{\varkappa}}\varphi)(x,\sigma) = I + \int\limits_{\mathbb{R}^2_+}\int\limits_{\mathbb{T}_{(1,1)}}\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|r_j\vartheta_j|^2}\left(\frac{|r_j\vartheta_j|}{|e^{x_j}\sigma_j|}\right)^{\frac{2}{p}} e^{-\alpha_j \ln^2 \frac{|e^{x_j}\sigma_j|}{|r_j\vartheta_j|}} r_j\right)$$
$$\beta\left(\frac{e^{x_1}\sigma_1}{|e^{x_1}\sigma_1|},\frac{e^{x_2}\sigma_2}{|e^{x_2}\sigma_2|},\frac{r_1\vartheta_1}{|r_1\vartheta_1|},\frac{r_2\vartheta_2}{|r_2\vartheta_2|}\right) f(x_1,x_2,\sigma_1,\sigma_2)drd\vartheta.$$

Пусть M — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в нуле; K_x — полуплоскость, образованная касательной к M в точке x, и содержащая точку 0; $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — тригонометрический базис в $L_p(\mathbb{T}_{(1,1)})$; проекторы P_{sM} и Q^m определяются равенствами (9) и (10). Опишем схему приближенного метода для решения уравнения

$$(I+K_\varkappa)\varphi = \psi, \tag{20}$$

где ψ — известная функция из $L_p(\mathbb{R}^4)$. От (20) перейдем к уравнению

$$(P_{sM} \otimes Q^m) C_{\widetilde{\varkappa}} (P_{sM} \otimes Q^m) \widetilde{\varphi}_s^m = (P_{sM} \otimes Q^m) \widetilde{\psi}, \tag{21}$$

где

$$\widetilde{\psi} = (\mathbf{v}_{(1,1)} \psi)(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = e^{\frac{1}{p}(2x_1 + 2x_2)} \psi(e^{x_1} \sigma_1, e^{x_2} \sigma_2).$$

Из теоремы 1 и лемм 1, 2 следует, что если оператор $C_{\widetilde{\varkappa}}$ обратим и, начиная с некоторого m_0, операторы

$$(P_{K_x} \otimes Q^m) C_{\widetilde{\varkappa}} (P_{K_x} \otimes Q^m) (\in \mathscr{L}((P_{K_x} \otimes Q^m) L_p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(1,1)})))$$

обратимы для всех $m \geqslant m_0$ и для всех $x (\in \partial M)$, тогда существует номер $m_0' (\geqslant m_0)$, начиная с которого уравнение

$$(I \otimes Q^m) C_{\widetilde{\varkappa}} (I \otimes Q^m) \widetilde{\varphi}^m = (I \otimes Q^m) \widetilde{\psi}$$

для любых $m (\geqslant m_0')$ имеет единственное решение $\widetilde{\varphi}^m$ и

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{v}_{(1,1)}^{-1} \widetilde{\varphi}^m = \varphi,$$

где φ — решение уравнения (20). Из критерия [8, с. 71] следует, что для каждого фиксированного $m (\geqslant m_0')$ к оператору

$$(I \otimes Q^m) C_{\widetilde{\varkappa}} (I \otimes Q^m)$$

применим проекционный метод по системе проекторов

$$((P_{sM} \otimes I), (P_{sM} \otimes I)),$$

и решение $\widetilde{\varphi}^m$ может быть найдено по формуле

$$\widetilde{\varphi}^m = \lim_{s \to \infty} \widetilde{\varphi}_s^m,$$

где $\widetilde{\varphi}_s^m$ — решение уравнения (21) при заданном m. Таким образом, искомое решение φ задается формулой

$$\varphi = \lim_{m \to \infty} \lim_{s \to \infty} \mathbf{v}_{(1,1)}^{-1} \widetilde{\varphi}_s^m.$$

Список литературы

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. Birkhäuser Boston : Boston, MA, 2001. 427 p.
2. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с биоднородными ядрами: проекционный метод и псевдоспектры // Сиб. матем. журн. 2006. Вып. 47 (3). С. 501–513.
3. *Авсянкин О. Г.* Проекционный метод для матричных многомерных парных интегральных операторов с однородными ядрами // Владикавк. матем. журн. 2006. Вып. 8 (1). С. 3–10.

4. *Деундяк В. М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Мат. заметки. 2010. Вып. 87 (5). С. 713–729.

5. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Изв. вузов. 2012. № 7. С. 1–15.

6. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Вычисление индекса многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа // Математика и ее приложения: журн. Иван. мат. о-ва. 2011. Вып. 1 (8). С. 39–48.

7. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 6. С. 1287–1289.

8. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Элиста : Интегральные и дифференциальные уравнения и их приложения. 1983. С. 58–73.

9. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону : Изд-во ЦВВР, 2007. 120 с.

10. *Деундяк В. М., Лукин А. В.* Приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами и приложения // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. Вып. 6. С. 5–8.

11. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М. : Нуака, 1969. 456 с.

Поступила в редакцию 20.11.2013.