Математика и ее приложения : ЖИМО. 2013. Вып. 1 (10). С. 51–60

УДК 517.95

И. В. Томина[1]

Ортонормированные полные системы собственных функций оператора Лапласа для смешанных граничных задач на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$

Ключевые слова: оператор Лапласа, прямоугольный треугольник, смешанные граничные условия, собственные числа, собственные функции.

Строятся и исследуются полные ортонормированные системы собственных функций 4 смешанных граничных задач для оператора Лапласа на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$, характеризующихся тем, что на каждой стороне треугольника задается либо условие Дирихле, либо условие Неймана, причем на сторонах угла $\pi/3$ задается одно и то же условие.

Key words: Laplace operator, right-angled triangle, mixed boundary conditions, eigenvalues, eigenfunctions.

We construct and study complete orthonormal systems of eigenfunctions for 4 mixed boundary problems for the Laplace operator on a right-angled triangle with an angle $\pi/6$ (on every side either the Dirichlet boundary condition or the Neumann boundary condition is given, and on the both sides of the angle $\pi/3$ the same conditions are given).

Рассматривается следующая спектральная граничная задача

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } D, \tag{1}$$

$$\begin{cases} i_1 u + (1 - i_1)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } l_1, \\ i_2 u + (1 - i_2)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } l_2 \cup l_3, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y\sqrt{3} \le x \le (2\pi - y\sqrt{3})/3\}$$

— прямоугольный треугольник с углом $\pi/6$; $l_j = D \cap l'_j$ — стороны треугольника D; l'_1, l'_2, l'_3 — соответственно прямые $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}(2\pi/3 - x)$, $y = 0$; $\partial D = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — граница треугольника D; ν — внутренняя нормаль к ∂D; $I \equiv (i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$. Полагаем $I = I_s$, если $s = 2i_1 + i_2$. Имеем $s = \overline{0, 3}$, $I_0 = (0, 0)$ соответствует задаче Неймана, $I_3 = (1, 1)$ — задаче Дирихле.

Согласно [5] собственные числа и собственные функции задачи (1)–(2) содержатся соответственно среди собственных чисел и собственных

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: ivtomina@gmail.com

функций следующей спектральной граничной задачи для прямоугольника $\Pi = [0, \pi] \times [0, \pi/\sqrt{3}]$:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } \Pi, \tag{3}$$

$$\begin{cases} i_2 u(x,0) + (1-i_2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \text{ при } 0 \le x \le \pi, \\ i_2 u(x,\pi/\sqrt{3}) + (1-i_2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,\pi/\sqrt{3}) = 0 \text{ при } 0 \le x \le \pi, \\ i_1 u(0,y) + (1-i_1)\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \text{ при } 0 \le y \le \pi/\sqrt{3}, \\ i_1 u(\pi,y) + (1-i_1)\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \text{ при } 0 \le y \le \pi/\sqrt{3}. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть при $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}$ $e_m(x;i) = \cos\left(mx - \frac{\pi i}{2}\right)$; при $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $I = (i_1, i_2) \in \{0,1\}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $e_{mn}(I) \equiv e_{mn}(x,y;I) = e_m(x;i_1)e_n(y\sqrt{3};i_2) = \cos\left(mx - \frac{\pi i_1}{2}\right)\cos\left(ny\sqrt{3} - \frac{\pi i_2}{2}\right)$. Система $\left\{\sqrt{\frac{2\gamma_m}{\pi}} e_m(x;i) \middle| m \ge i\right\}$, где $\gamma_m = 1$ при $m \ne 0$ и $\gamma_0 = 1/2$, есть хорошо известная ортонормированная полная система (ОНПС) в $L^2(0,\pi)$. Система $\left\{\frac{2}{\pi}\sqrt{\sqrt{3}\gamma_m\gamma_n} e_{mn}(x,y;I) \middle| m \ge i_i, n \ge i_2\right\}$ является ОНПС в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)$, состоящей из собственных функций спектральной граничной задачи (3)–(4), соответствующих собственным числам $m^2 + 3n^2$ (см., например, [4]).

Из очевидных равенств $e_m(x + 2\pi; i) = e_m(x;i)$, $e_{-m}(x;i) = (-1)^i e_m(x;i)$, $e_m(\pi - x; i) = (-1)^{m+i} e_m(x;i)$, справедливых при всех $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$, получаем

$$e_{mn}(x + 2\pi, y + 2\pi/\sqrt{3}; I) = e_{mn}(x,y;I), \tag{5}$$

$$e_{-m,n}(x,y;I) = (-1)^{i_1} e_{mn}(x,y;I), \tag{6}$$

$$e_{m,-n}(x,y;I) = (-1)^{i_2} e_{mn}(x,y;I), \tag{7}$$

$$e_{mn}(-x,y;I) = (-1)^{i_1} e_{mn}(x,y;I), \tag{8}$$

$$e_{mn}(x,-y;I) = (-1)^{i_2} e_{mn}(x,y;I), \tag{9}$$

$$e_{mn}(\pi - x, \pi/\sqrt{3} - y; I) = (-1)^{m+n+i_1+i_2} e_{mn}(x,y;I). \tag{10}$$

Формулы (5)–(10) справедливы при всех $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $I = (i_1, i_2) \in \{0,1\}^2$.

Пусть, в соответствии с [5] (см. также [1]), W_k, $k = 1, 2, 3$, — преобразование симметрии (отражение) плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно прямой l'_k, V_0 — тождественное отображение $\mathbb{R}^2$ на себя, $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 W_3$ (поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ против часовой стрелки на угол $\pi/3$ вокруг точки $O(0,0)$), $V_3 = W_1 W_2 = W_2 W_1$, $V_4 = W_2$, $V_5 = W_2 W_3$; заметим, что при $k = 0,1,2$ $V_{k+3} = V_k W = W V_k$, где W — центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно точки $B(\pi/2, \pi\sqrt{3}/6)$. Для $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ при $k = \overline{0,5}$ полагаем $V_k M = M_k(x_k, y_k)$. Получаем разбиение прямоугольника $\Pi = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi \text{ и } 0 \le y \le \pi/\sqrt{3}\}$ на 6 равных треугольников $D_k = V_k D = \{M_k \mid M \in D\}$, где $k = \overline{0,5}$ (см. рис. 1 работы [5]). Одним из этих треугольников является исходный треугольник $D = D_0$. Любые две точки M_k, лежащие в смежных треугольниках D_k, симметричны относительно общей стороны этих треугольников. Для $x_0 = x$, $y_0 = y$ имеем $x_1 = (x + y\sqrt{3})/2$, $y_1 = (x\sqrt{3} - y)/2$, $x_2 = (x - y\sqrt{3})/2$, $y_2 = (x\sqrt{3} + y)/2$; при $k = 0$, 1, 2 получаем $x_{k+3} = \pi - x_k$, $y_{k+3} = \pi/\sqrt{3} - y_k$.

Из теоремы 1 статьи [5], зная указанные выше собственные числа и собственные функции задачи (3)–(4), можно сделать следующие выводы:

- для каждого собственного числа λ спектральной граничной задачи (1)–(2) найдутся целые числа $m \geq i_i$, $n \geq i_2$ такие, что $\lambda = m^2 + 3n^2$;

- каждое собственное число λ задачи (1)–(2) конечнократно, и его кратность не превосходит кратности этого числа как собственного числа задачи (3)–(4);

- любая собственная функция $u(x, y)$ спектральной задачи (1)–(2), соответствующая собственному числу λ, имеет вид
$$u(x, y) = \sum_{\substack{m_k^2+3n_k^2=\lambda \\ m_k \geq i_1,\, n_k \geq i_2}} \alpha_k e_{m_k n_k}(x, y; I), \tag{11}$$
где $\alpha_k \in \mathbb{C}$; таким образом, $u(x, y)$ есть тригонометрический многочлен двух переменных x и y;

- ненулевая функция $u(x, y)$ из (11) является собственной функцией спектральной задачи (1)–(2), соответствующей собственному числу $\lambda = m^2 + 3n^2$, в том и только том случае, когда $u(x, y)$ удовлетворяет условиям симметрии
$$u(x_k, y_k) = (-1)^{s_k} u(x, y) \quad (k = \overline{0, 5}), \tag{12}$$
где $(x, y) = (x_0, y_0)$ — любая точка из D. Здесь и далее полагаем $s_0 = s_5 = 0,\ s_1 = i_1,\ s_2 = s_3 = i_1 + i_2,\ s_4 = i_2$.

Для более детального исследования спектральной задачи (1)–(2) естественно ввести подпространство $H(I)$ гильбертова пространства $L^2(\Pi)$, состоящее из всех функций $g \in L^2(\Pi)$, для которых выполнено условие симметрии (12). Таким образом, $H(I) = \{g \in L^2(\Pi) \,|\, g(M_k) = (-1)^{s_k} g(M)$ при всех $k = \overline{1, 5}$ и $M = M_0 \in D \backslash \partial D\}$. Собственная функция $u(x, y)$ спектральной задачи (3)–(4) является собственной функцией спектральной задачи (1)–(2) в том и только том случае, когда $u \in H(I)$.

Для функции $f \in L^2(D)$ строим функцию $\tilde{f}(I) = \tilde{f}(M; I) \in H(I)$, полагая $\tilde{f}(M_k; I) = (-1)^{s_k} f(M)$ при всех $k = \overline{0, 5}$ и $M = M_0 \in D \backslash \partial D$.

Очевидно, что $H(I) = \{\tilde{f}(I) \,|\, f \in L^2(D)\}$. Оператор A_I, действующий по правилу $A_I f = \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{f}(I)$, осуществляет изоморфизм гильбертова пространства $L^2(D)$ на подпространство $H(I)$ гильбертова пространства

$L^2(\Pi)$. Обратный оператор A_I^{-1} действует по правилу $A_I^{-1}g = \sqrt{6}g|_D$ и изоморфно отображает $H(I)$ на $L^2(D)$.

Через $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ обозначаем соответственно скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве $L^2(D)$:

$$(f_1, f_2)_0 = \iint\limits_D f_1(x,y)\overline{f_2(x,y)}dxdy, \quad \|f\|_0 = \sqrt{\iint\limits_D |f(x,y)|^2 dxdy}.$$

Через $(\cdot,\cdot)_1$ и $\|\cdot\|_1$ обозначаем соответственно скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)$:

$$(g_1, g_2)_1 = \iint\limits_\Pi g_1(x,y)\overline{g_2(x,y)}dxdy, \quad \|g\|_1 = \sqrt{\iint\limits_\Pi |g(x,y)|^2 dxdy}.$$

Рассмотрим произвольную функцию $g \in H(I)$ и исследуем поведение ее коэффициентов Фурье по ОНПС $\left\{\frac{2}{\pi}\sqrt{\sqrt{3}\gamma_m\gamma_n}e_{mn}(x,y;I)\middle| m \geq i_i, n \geq i_2\right\}$ в $L^2(\Pi)$. Так как $g = \tilde{f}(I)$, где f — некоторая функция из $L^2(D)$, и наоборот, для любой $f \in L^2(D)$ $\tilde{f}(I) \in H(I)$, то достаточно изучить следующую величину при любой $f \in L^2(D)$:

$$(\tilde{f}(I), e_{mn}(I))_1 = \iint\limits_\Pi \tilde{f}(x,y;I)e_{mn}(x,y;I)dxdy. \tag{13}$$

Пусть вначале f — любая непрерывная функция на D. Тогда $\tilde{f}(x,y;I)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на Π (точки разрыва могут быть лишь на $\bigcup\limits_{k=0}^{5}\partial D_k$), и правая часть (13) есть двойной интеграл Римана. Поскольку двойной интеграл как предел интегральных сумм Римана не зависит от способа разбиения области интегрирования на части и от выбора точек на участках разбиения, то будем разбивать прямоугольник Π на такие участки, каждый из которых полностью лежит в одном из треугольников D_k, $k=\overline{0,5}$. При этом наряду с каждым участком разбиения $\Delta D \subset D_0$ рассматриваем еще 5 участков разбиения $\Delta D_k = V_k\Delta D_0 \subset D_k$, $k=\overline{1,5}$; площади ΔS_k участков ΔD_k равны площади $\Delta S = \Delta S_0$ участка ΔD_0. На каждом участке разбиения ΔD_k выберем по точке $M_k = V_kM_0$, где M_0 — некоторая точка внутри участка $\Delta D_0 = \Delta D$. Тогда интегральная сумма для двойного интеграла в правой части (13) состоит из слагаемых вида

$$\sum_{k=0}^{5}\tilde{f}(M_k;I)e_{mn}(M_k;I)\Delta S \stackrel{\hat{1}}{=} f(M_0;I)\sum_{k=0}^{5}(-1)^{s_k}e_{mn}(M_k;I)\Delta S \stackrel{\hat{2}}{=}$$
$$\stackrel{\hat{2}}{=} [1+(-1)^{m+n}]f(M_0;I)\sum_{k=0}^{2}(-1)^{s_k}e_{mn}(M_k;I)\Delta S.$$

Равенство $\hat{1}$ выполняется, так как в силу выбора точек M_k и принадлежности $\tilde{f}$ классу $H(I)$ имеем $\tilde{f}(M_k;I) = (-1)^{s_k} f(M_0;I)$, $k = \overline{0,5}$. Равенство $\hat{2}$ верно, поскольку $M_{k+3} = WM_k$ при $k = 0,1,2$, а ввиду (10) $e_{mn}(WM;I) = (-1)^{m+n+i_1+i_2} e_{mn}(M;I)$ для всех $M \in \mathbb{R}^2$. откуда следует

$$(-1)^{s_{k+3}} e_{mn}(M_{k+3};I) = (-1)^{m+n+s_k} e_{mn}(M_k;I)$$

при всех $k = 0,1,2$.

Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, когда ранг разбиения стремится к 0, получаем, что для любой непрерывной на D фукнции f справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Pi} \tilde{f}(x,y;I) e_{mn}(x,y;I)dxdy =$$
$$= [1+(-1)^{m+n}] \iint\limits_{D} f(x,y) \sum_{k=0}^{2} (-1)^{s_k} e_{mn}(x_k,y_k;I)dxdy. \quad (14)$$

Пусть теперь $f \in L^2(D)$. Тогда найдется такая последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ непрерывных на D функций, что $\lim\limits_{i\to\infty} f_i = f$ в $L^2(D)$. Записав равенство (14) для функций f_i и перейдя в нем к пределу при $i \to \infty$ с учетом очевидного соотношения $\lim\limits_{i\to\infty} \tilde{f}_i(I) = \tilde{f}(I)$ в $L^2(\Pi)$, получаем, что равенство (14) справедливо для любой $f \in L^2(D)$.

При $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $I \in \{0,1\}^2$ полагаем

$$u_{mn}(I) = u_{mn}(x,y;I) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{s_k} e_{mn}(x_k,y_k;I) =$$
$$= e_{mn}(x,y;I) + (-1)^{i_1} e_{mn}(x_1,y_1;I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(x_2,y_2;I). \quad (15)$$

Сформулируем только что полученный результат в виде леммы.

Лемма 1. *Если $f \in L^2(D)$, $I = (i_1,i_2) \in \{0,1\}^2$ и $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, то*

$$(\tilde{f}(I), e_{mn}(I))_1 = [1+(-1)^{m+n}](f, u_{mn}(I))_0. \quad (16)$$

Эквивалентная формулировка леммы 1: *Если $I \in \{0,1\}^2$, $g \in H(I)$ и $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, то $(g, e_{mn}(I))_1 = [1+(-1)^{m+n}](g|_D, u_{mn}(I))_0$.*

Изучим подробнее функции $u_{mn}(I)$. Ввиду (16) нас интересует случай $(-1)^{m+n} = 1$. При $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $(-1)^{m+n} = 1$ и $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, используя формулы произведения и суммы тригонометрических функций, после элементарных преобразований получаем

$$(-1)^{i_1} e_{mn}(x_1,y_1;I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(x_2,y_2;I) =$$
$$= (-1)^{i_2} e_{m_1 n_1}(x,y;I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{m_2 n_2}(x,y;I). \quad (17)$$

Здесь и всюду далее для $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ при $(-1)^{m+n}=1$ полагаем

$$m_1=\frac{3n-m}{2},\quad n_1=\frac{n+m}{2},\quad m_2=\frac{3n+m}{2},\quad n_2=\frac{n-m}{2};\tag{18}$$

кроме того, $m_0=m$, $n_0=n$.

Из (18) следует $(m_k,n_k)\in\mathbb{Z}^2$, $(-1)^{m_k+n_k}=1$ при $k=0,1,2$ и

$$m^2+3n^2=m_1^2+3n_1^2=m_2^2+3n_2^2.\tag{19}$$

Из (15) и (17) получается следующее представление функции $u_{mn}(I)$ при $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ и $(-1)^{m+n}=1$:

$$u_{mn}(I)=u_{mn}(x,y;I)=e_{mn}(x,y;I)+(-1)^{i_2}e_{m_1n_1}(x,y;I)+\\+(-1)^{i_1+i_2}e_{m_2n_2}(x,y;I).\tag{20}$$

Ввиду (19), (6) и (7) формула (20) имеет вид (11), поэтому, если $(-1)^{m+n}=1$ и $u_{mn}\not\equiv 0$, то $u_{mn}(I)$ есть собственная функция спектральной задачи (3)–(4) для прямоугольника П; соответствующее собственное число приведено в (19). Выясним, когда $u_{mn}(I)$, где $(-1)^{m+n}=1$, является собственной функцией спектральной задачи (1)–(2), то есть, согласно полученным выше результатам, когда $0\not\equiv u_{mn}(I)\in H(I)$. Предварительно рассмотрим простейшие свойства двойных тригонометрических многочленов $u_{mn}(I)$ при $(-1)^{m+n}=1$, приведенные в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $(-1)^{m+n}=1$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $I\in\{0,1\}^2$. Тогда имеют место равенства:*

$$u_{mn}(x+2\pi,y+2\pi/\sqrt{3};I)=u_{mn}(x,y;I);\tag{21}$$

$$u_{-m,n}(x,y;I)=(-1)^{i_1}u_{mn}(x,y;I);\tag{22}$$

$$u_{m,-n}(x,y;I)=(-1)^{i_2}u_{mn}(x,y;I);\tag{23}$$

$$u_{mn}(-x,y;I)=(-1)^{i_1}u_{mn}(x,y;I);\tag{24}$$

$$u_{mn}(x,-y;I)=(-1)^{i_2}u_{mn}(x,y;I);\tag{25}$$

$$u_{mn}(\pi-x,\pi/\sqrt{3}-y;I)=(-1)^{i_1+i_2}u_{mn}(x,y;I);\tag{26}$$

$$u_{mn}(x_1,y_1;I)=(-1)^{i_1}u_{mn}(x,y;I);\tag{27}$$

$$u_{mn}(x_2,y_2;I)=(-1)^{i_1+i_2}u_{mn}(x,y;I);\tag{28}$$

$$u_{m_1n_1}(x,y;I)=(-1)^{i_2}u_{mn}(x,y;I);\tag{29}$$

$$u_{m_2n_2}(x,y;I)=(-1)^{i_1+i_2}u_{mn}(x,y;I).\tag{30}$$

Доказательство. Свойства (21)–(25) вытекают из (15), (20) и соответствующих свойств (5)–(9) функции $e_{mn}(x,y;I)$. Из (20) и (10) с учетом того, что $(-1)^{m_k+n_k}=1$ $(k=0,1,2)$, находим

$$u_{mn}(\pi-x,\pi/\sqrt{3}-y;I)=(-1)^{i_1+i_2}[e_{mn}(x,y;I)+\\+(-1)^{i_2}e_{m_1n_1}(x,y;I)+(-1)^{i_1+i_2}e_{m_2n_2}(x,y;I)],$$

то есть справедлива формула (26).

Применяя (15), затем (8) и снова (15), получаем (27):

$$\begin{aligned}u_{mn}(x_1, y_1; I) = e_{mn}(x_1, y_1; I) + (-1)^{i_1} e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(-x_2, y_2; I) = (-1)^{i_1}[e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_1} e_{mn}(x_1, y_1; I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(x_2, y_2; I)] =\\ = (-1)^{i_1} u_{mn}(x, y; I).\end{aligned}$$

Аналогично с помощью (15), (8) и (9) находим (28):

$$\begin{aligned}u_{mn}(x_2, y_2; I) = e_{mn}(x_2, y_2; I) + (-1)^{i_1} e_{mn}(x, -y; I) +\\ + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(-x_1, y_1; I) = (-1)^{i_1+i_2}[e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_1} e_{mn}(x_1, y_1; I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{mn}(x_2, y_2; I)] =\\ = (-1)^{i_1+i_2} u_{mn}(x, y; I).\end{aligned}$$

Далее, согласно (20) и (7) имеем

$$\begin{aligned}u_{m_1 n_1}(x, y; I) = e_{m_1 n_1}(x, y; I) + (-1)^{i_2} e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_1+i_2} e_{m_2, -n_2}(x, y; I) = (-1)^{i_2}[e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_2} e_{m_1 n_1}(x, y; I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{m_2 n_2}(x, y; I)] =\\ = (-1)^{i_2} e_{mn}(x, y; I).\end{aligned}$$

Получаем свойство (29).

Аналогично с учетом (20), (6) и (7)находим

$$\begin{aligned}u_{m_2 n_2}(x, y; I) = e_{m_2 n_2}(x, y; I) + (-1)^{i_2} e_{-m,n}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_1+i_2} e_{m_1, -n_1}(x, y; I) = (-1)^{i_1+i_2}[e_{mn}(x, y; I) +\\ + (-1)^{i_2} e_{m_1 n_1}(x, y; I) + (-1)^{i_1+i_2} e_{m_2 n_2}(x, y; I)].\end{aligned}$$

Доказано свойство (30). ■

Из (26)–(28) следует выполнение (12) при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ для любой функции $u_{mn}(x, y; I)$ ($I = (i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $(-1)^{m+n} = 1$).

Отметим, что функция $u_{mn}(I)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^2$. Пусть $(-1)^{m+n} = 1$. В силу (25) и теоремы 1 статьи [3] имеем $u_{mn}(I)|_{l_3} = 0$ при $i_2 = 1$ и $\left.\frac{\partial u_{mn}(I)}{\partial y}\right|_{l_3} = 0$ при $i_2 = 0$. Согласно (27) $u_{mn}(W_1 M; I) = (-1)^{i_1} u_{mn}(M; I)$ для всех $M \in \mathbb{R}^2$; снова применяя теорему 1 статьи [3], получаем, что $u_{mn}(I)$ удовлетворяет на l_1 условию Дирихле при $i_1 = 1$ и условию Неймана при $i_1 = 0$. В силу (26) и (27) находим, что при $M \in \mathbb{R}^2$

$$u_{mn}(M_4; I) = u_{mn}(W M_1; I) = (-1)^{i_1+i_2} u_{mn}(M_1; I) = (-1)^{i_2} u_{mn}(M; I).$$

Таким образом, ввиду теоремы 1 статьи [3] $u_{mn}(I)$ при $i_2 = 0$ удовлетворяет на l_2 условию Неймана, а при $i_2 = 1$ — условию Дирихле.

Итак, при всех $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, для которых $(-1)^{m+n}=1$, функция $u_{mn}(I)$, если она отлична от 0, является собственной функцией спектральной задачи (1)–(2). Впрочем, этот результат следует также из того, что такая функция $u_{mn}(I)$ является собственной функцией спектральной задачи (3)–(4) и удовлетворяет условиям симметрии (12) на $\mathbb{R}^2$ и, в частности, на D. Одновременно мы установили, что каждая функция $u_{mn}(I)$ при $(-1)^{m+n}=1$ принадлежит пространству $H(I)$.

Из (22) и (23) следует, что каждая функция $u_{mn}(I)$, где $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $(-1)^{m+n}=1$, с точностью до знака принадлежит множеству $\{u_{mn}(I)\,|\,(m,n)\in J'\}$, где $J'=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\,|\,m\geq 0,\ n\geq 0,\ (-1)^{m+n}=1\}$. Это множество может содержать нулевые функции, а ввиду (29), (30) — совпадающие с точностью до знака функции.

Введем множества $J_0=\{(m,n)\in J'\,|\,n\geq m\geq 0\}$, $J_1=\{(m,n)\in J'\,|\,0\leq n\leq m\leq 3n\}$, $J_2=\{(m,n)\in J'\,|\,m\geq 3n\geq 0\}$. Очевидно, что $J'=J_0\cup J_1\cup J_2$. Пусть, далее, для $i=0,1,2$ и $\lambda\geq 0$ $J_{i\lambda}$ есть множество всех точек $(m,n)\in J_i$, для которых $m^2+3n^2=\lambda$.

Исходя из (18), легко проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. 1) *$(m,n)=(m_1,n_1)\Leftrightarrow m=n$;*

2) *$(m_1,n_1)=(m_2,n_2)\Leftrightarrow m=0$;*

3) *$(m,n)=(m_2,n_2)\Leftrightarrow (m,n)=(0,0)$;*

4) *$(m,n)=(m_1,n_1)=(m_2,n_2)\Leftrightarrow (m,n)=(0,0)$;*

5) *$(m,n)\in J_0\Leftrightarrow (m_1,n_1)\in J_1\Leftrightarrow (m_2,n_2)\in J_2$;*

6) *$(m,n)\in J_{0\lambda}\Leftrightarrow (m_1,n_1)\in J_{1\lambda}\Leftrightarrow (m_2,n_2)\in J_{2\lambda}$;*

7) *при $n>m>0$ точки (m,n), (m_1,n_1), (m_2,n_2) попарно различны;*

8) *при $m=n=p>0$ $(m_1,n_1)=(p,p)$ совпадает с (m,n), $(m_2,n_2)=(2p,0)\neq(m,n)$;*

9) *при $n>m=0$ имеем $(m,n)=(0,2p)$, где $p\in\mathbb{N}$, $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)=(3p,p)$;*

10) *если $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ и $(-1)^{m+n}=1$, то найдется $(p,q)\in J_0$ такое, что либо $u_{mn}(I)=u_{pq}(I)$, либо $u_{mn}(I)=-u_{pq}(I)$.*

Остановимся лишь на доказательстве утверждения 10). Не умаляя общности, имеем $m,n\geq 0$; тогда достаточно положить (p,q) равным (m,n) при $(m,n)\in J_0$, (m_1,n_1) при $(m,n)\in J_1$, $(-m_1,n_1)$ при $(m,n)\in J_2$.

Из (22) получаем, что при $i_1=1$ $u_{0n}(I)\equiv 0$ при всех четных $n\in\mathbb{Z}$. Из (23) следует, что при $i_2=1$ и всех четных $m\in\mathbb{Z}$ $u_{m0}(I)\equiv 0$. Применяя (29) и утверждение 1) леммы, находим, что $u_{nn}(I)\equiv 0$ при $i_2=1$ и всех $n\in\mathbb{Z}$.

С учетом утверждения 10) леммы 3 получаем, что любая ненулевая функция $u_{mn}(I)$, где $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ и $(-1)^{m+n}=1$, с точностью до знака принадлежит множеству

$$U(I)=\{u_{mn}(I)\,|\,(m,n)\in J(I)\},$$

где

$$J(I)=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\,|\,i_1\leq m\leq n-i_2 \text{ и } (-1)^{m+n}=1\}.$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Для каждого* $I = (i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$ $U(I)$ *есть полная ортогональная в* $L^2(D)$ *система собственных функций спектральной задачи* (1)–(2). *При этом для всех* $(m, n) \in J(I)$ *имеем*

$$\|u_{mn}(I)\|_0^2 = \frac{\theta_{mn}}{2}\|e_{mn}(I)\|_1^2 = \frac{\pi^2\theta_{mn}}{8\sqrt{3}\gamma_m\gamma_n}, \tag{31}$$

где θ_{mn} — *количество нулей среди целых чисел* 0, $m - n$ *и* $m^2 + n^2$. *Собственное число, соответствующее* $u_{mn}(I)$, *равно*

$$\lambda_{mn}(I) = m^2 + 3n^2. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $(m, n) \in J(I)$ и $(p, q) \in J(I)$. Тогда, полагая в (16) $f = u_{pq}(I)$, получаем с учетом (20):

$$(u_{pq}(I), u_{mn}(I))_0 = \frac{1}{2}(u_{pq}(I), e_{mn}(I))_1 = \frac{1}{2}(e_{pq}(I), e_{mn}(I))_1 + \\ + (-1)^{i_2}\frac{1}{2}(e_{p_1q_1}(I), e_{mn}(I))_1 + (-1)^{i_1+i_2}\frac{1}{2}(e_{p_2q_2}(I), e_{mn}(I))_1. \tag{33}$$

Если $(p, q) \neq (m, n)$, то с учетом леммы 3 имеем $(p_1, q_1) \neq (m, n)$, $(p_2, q_2) \neq (m, n)$. Используя ортогональность $\{e_{mn}(I) \,|\, m \geq i_1 \text{ и } n \geq i_2\}$ в $L^2(\Pi)$, получаем из (33), что $(u_{pq}(I), u_{mn}(I))_0 = 0$. Таким образом, система $U(I)$ ортогональна в $L^2(D)$.

Пусть теперь $(p, q) = (m, n)$. Тогда из (33) с помощью утверждений 1) и 3) леммы 3 следует

$$\|u_{mn}(I)\|_0^2 = \frac{\theta_{mn}}{2}\|e_{mn}(I)\|_1^2,$$

где θ_{mn} — количество совпадающих с (m, n) среди точек (m, n), (m_1, n_1), (m_2, n_2). Из леммы 3 вытекает, что θ_{mn} есть количество нулей среди чисел 0, $m - n$ и $m^2 + n^2$. Таким образом, справедлива формула (31).

Докажем полноту системы $U(I)$ в $L^2(D)$. Пусть $f \in L^2(D)$ и $(f, u_{mn}(I))_0 = 0$ для всех $(m, n) \in J(I)$. Поскольку при всех (m, n) из $J_0/J(I)$ имеем $u_{mn}(I) \equiv 0$, то $(f, u_{mn}(I))_0 = 0$ для всех $(m, n) \in J_0$ и, следовательно, в силу утверждения 10) леммы 3, для всех $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ при $(-1)^{m+n} = 1$. Отсюда, используя лемму 1, получаем $(\tilde{f}(I), e_{mn}(I))_1 = 0$ при всех $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ и, в частности, лри всех $m \geq i_1$ и $n \geq i_2$. Поскольку ортогональная система $\{e_{mn}(I) \,|\, m \geq i_1, n \geq i_2\}$ полна в $L^2(\Pi)$, то $\tilde{f} = 0$ в $L^2(\Pi)$, откуда $f = 0$ в $L^2(D)$. Таким образом, система $U(I)$ полна в $L^2(D)$.

Прежде уже было доказано, что всякая функция $u_{mn}(I) \in U(I)$ является решением спектральной задачи (1)–(2), соответствующим собственному числу $m^2 + 3n^2$. Из (31) следует $u_{mn}(I) \not\equiv 0$, поэтому $u_{mn}(I)$ есть собственная функция спектральной задачи (1)–(2), соответствующая собственному числу (32). ■

Следствие. *При любом* $I = (i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$

$$\hat{U}(I) = \left\{ \sqrt{\frac{8\sqrt{3}\gamma_m\gamma_n}{\pi^2\theta_{mn}}} u_{mn}(I) \,|\, (m, n) \in J(I) \right\}$$

есть полная ортонормированная в $L^2(D)$ *система.*

Ранее в [7] были доказаны ортогональность и полнота, а в [6] — линейная независимость и полнота некоторых близких к $U(I)$ систем собственных функций всех 4 смешанных граничных спектральных задач для оператора Лапласа на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$; при этом для каждой из этих смешанных задач рассмотренные в [6] собственные функции при $a = 2\pi/3$ отличаются от соответствующих собственных функций системы $U(I)$ лишь постоянными множителями. Нормы собственных функций в [7] и [6] не вычислялись. Метод доказательства теоремы 1 в идейном плане близок к методу [7].

Доказательство теоремы 1 при $s = 3$ (случай задачи Дирихле) и ее формулировка при $s = 0$ (случай задачи Неймана) опубликованы в [1]. Приведенное в настоящей работе доказательство теоремы 1, справедливое одновременно для всех $s = 0, 1, 2, 3$, ранее содержалось только в [2].

Список литературы

1. *Томина И. В.* Первый регуляризованный след степени оператора Лапласа на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$ в случае залачи Дирихле // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 2. С. 569–572.
2. *Томина И. В.* Регуляризованные следы степени оператора Лапласа с потенциалом на треугольниках // Диссерт. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Владимир : ВГПУ. 1995. 98 с.
3. *Томина И. В.* О симметричном и антисимметричном продолжениях функций двух переменных // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2000. Вып. 3. С. 103–108.
4. *Томина И. В.* О регуляризованных следах степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольниках в случае смешанных граничных задач // Вестн. Иван. гос. энергетического ун-та. 2001. Вып. 1. С. 85–89.
5. *Томина И. В.* Связь между смешанными граничными задачами для оператора Лапласа на прямоугольнике и прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$ // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2011. Вып. 1 (8). С. 139–144.
6. *Шестопал А. Ф.* Геометрия оператора Лапласа. К. : Выща шк., 1991. 159 с.
7. *Makai E.* Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1970. № 5. P. 51–62.

Поступила в редакцию 17.12.2013.