Математика и ее приложения : ЖИМО. 2013. Вып. 1 (10). С. 61–64

УДК 512.543

Е. А. Туманова[1]

К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, аппроксимируемость корневыми классами.

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение $\mathcal{K}$-групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,H$, составленная из ограничений на H всевозможных внутренних автоморфизмов группы G. Ранее автором установлено, что если $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B. В данной статье построены примеры, показывающие, что ни одно из этих условий не является необходимым для существования указанного гомоморфизма.

Keywords: generalized free product, root-class residuality.

Let $\mathcal{K}$ be a root class of groups, let $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ be the free product of $\mathcal{K}$-groups A and B with normal amalgamated subgroups H and K, and let $\mathrm{Aut}_G(H)$ be the subgroup of $\mathrm{Aut}\,H$ consisting of the restrictions on H of all inner automorphisms of G. The author has proved earlier that, if $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, than there exists a homomorphism of G onto a group of $\mathcal{K}$ which is injective on A and B. This paper contains the examples showing that no one of these conditions is necessary for the existence of such a homomorphism.

Пусть A и B — некоторые группы, H и K — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ (эти обозначения предполагаются фиксированными до конца статьи). Заметим, что в силу нормальности объединяемых подгрупп в свободных множителях подгруппа H является нормальной в G. Поэтому ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы G оказывается автоморфизмом группы H. Множество всех таких автоморфизмов будем обозначать через $\mathrm{Aut}_G(H)$.

Напомним [2], что содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{K}$,

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: helenfog@bk.ru

то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$.

В [1] автором анонсирован ряд результатов об аппроксимируемости группы G корневыми классами. В частности, им доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Если $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B.*

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то данная теорема превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие два утверждения равносильны.*

1. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B.*
2. *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы привести примеры, показывающие, что в случае, когда корневой класс $\mathcal{K}$ не замкнут относительно факторизации, ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ не является необходимым для существования гомоморфизма группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективного на свободных множителях A и B. В частности, утверждение следствия для такого класса перестает быть верным.

Пример 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$, B, H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами c, b, c^3 соответственно, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, переводящий b в c^3.*

Тогда группы A, B принадлежат классу $\mathcal{K}$. Подгруппы H и K центральны в группах A и B соответственно, откуда следует, что группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ тривиальна и потому также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Фактор-группа A/H изоморфна $\mathbb{Z}$, значит, является $\mathcal{K}$-группой, в то время как фактор-группа B/K изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и, следовательно, не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Покажем, что при этом существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на A и B.

Заметим, что задание группы G порождающими символами и определяющими соотношениями имеет вид

$$G = \langle a, b, c;\ ab = ba,\ b = c^3\rangle = \langle a, c;\ ac^3 = c^3a\rangle.$$

Пусть $F = \langle x, y;\ xy = yx\rangle$ — свободная абелева группа ранга 2. Отображение порождающих группы G в группу F, выполняемое по правилу $a \to x$, $c \to y$ и естественным образом продолжаемое до отображения *слов, переводит определяющее соотношение группы G в равенство, верное в группе F, и потому задает сюръективный гомоморфизм $\rho\colon G \to F$. Так как $A\rho = \mathrm{sgp}\{x, y^3\}$ и $B\rho = \mathrm{sgp}\{y\}$, то $\ker\rho \cap A = \ker\rho \cap B = 1$, и потому ρ является искомым гомоморфизмом.*

Пример 2. *Пусть снова $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a; b\}$. Пусть также B — неабелево расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим c при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d, т. е.*

$$B = \langle c, d;\ d^{-1}cd = c^{-1}\rangle;$$

H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами b и c^n, $n \geqslant 1$, соответственно; $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм подгрупп, отождествляющий элементы b и c^n.

Тогда A и B являются $\mathcal{K}$-группами, но группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ не принадлежит классу $\mathcal{K}$, так как содержит элемент порядка 2 — автоморфизм группы H, совпадающий с ограничением на эту группу внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом d.

Фактор-группа A/H содержится в $\mathcal{K}$, так как она изоморфна $\mathbb{Z}$. Если $n = 1$, то фактор-группа B/K также изоморфна $\mathbb{Z}$ и, следовательно, является $\mathcal{K}$-группой. Если же $n > 1$, то cK — отличный от 1 элемент конечного порядка фактор-группы B/K. Значит, B/K не является группой без кручения, а потому не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Построим гомоморфизм группы G на $\mathcal{K}$-группу, инъективный на свободных множителях A и B.

Обозначим через N нормальное замыкание элемента a в группе G и положим $U = N \cap A$. Из представления группы G порождающими символами и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} G &= \langle a, b, c, d;\ ab = ba,\ d^{-1}cd = c^{-1},\ b = c^n\rangle \\ &= \langle a, c, d;\ ac^n = c^n a,\ d^{-1}cd = c^{-1}\rangle \end{aligned}$$

видно, что $N \cap B = 1$ и $G/N \cong B$. Поэтому в силу теоремы о строении подгрупп обобщенного свободного произведения [3] группа N представима в виде свободного произведения некоторой свободной группы F и семейства подгрупп, сопряженных с U, причем среди сомножителей есть и сама подгруппа U.

Определим гомоморфизм ρ группы N на группу U таким образом, что каждый элемент свободной группы F переходит в 1, а элементы групп, изоморфных U, отображаются в соответствующие им элементы группы U. Тогда гомоморфизм ρ инъективен на всех сомножителях, изоморфных U, включая и саму группу U.

Так как группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и последний замкнут относительно взятия подгрупп, то группа U также содержится в классе $\mathcal{K}$. Тогда $1 \leqslant \ker\rho \leqslant N \leqslant G$ — субнормальный ряд группы G такой, что *фактор-группы* G/N *и* $N/\ker\rho$ *принадлежат классу* $\mathcal{K}$. *Отсюда в силу условия Грюнберга в группе* G *существует нормальная подгруппа* M *такая, что* $M \subseteq \ker\rho$ *и фактор-группа* G/M *содержится в классе* $\mathcal{K}$.

Так как $M \subseteq \ker\rho$ *и* $\ker\rho \subseteq N$, *то*

$$M \cap A = M \cap \ker\rho \cap N \cap A = M \cap \ker\rho \cap U = 1$$

и $M \cap B = M \cap N \cap B = 1$.

Таким образом, естественный гомоморфизм группы G *на фактор-группу* G/M *является искомым.*

Пример 3. *Вначале проведем несложное общее построение. Пусть* A, B, C — *некоторые изоморфные группы,* $\varepsilon\colon A \to C$ *и* $\delta\colon B \to C$ — *изоморфизмы,* $L \leqslant C$, $H = L\varepsilon^{-1}$, $K = L\delta^{-1}$ *и* $\varphi = (\varepsilon\delta^{-1})|_H$ — *изоморфизм подгрупп* H *и* K.

Отображения ε *и* δ, *очевидно, согласованы с изоморфизмом* φ, *и поэтому их можно продолжить до гомоморфизма* ψ *группы* G *на группу* C. *Положим* $N = \ker\psi$. *Так как* ε *и* δ *инъективны, то* $N \cap A = N \cap B = 1$.

Если, кроме того, $\mathcal{K}$ — *некоторый корневой класс групп и* $C \in \mathcal{K}$, *то* ψ — *гомоморфизм группы* G *на* $\mathcal{K}$*-группу* C, *инъективный на подгруппах* A *и* B.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — *класс всех разрешимых групп без кручения,* C — *некоторое расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим* c *при помощи бесконечной циклической группы с порождающим* d *(т. е. либо свободная абелева группа ранга* 2, *либо метабелева группа из примера 2),* L — *подгруппа группы* C, *порожденная элементом* c^3.

Тогда группы A *и* B *принадлежат классу* $\mathcal{K}$. *При этом* $c\varepsilon^{-1}H$ *и* $c\delta^{-1}K$ — *отличные от* 1 *элементы конечного порядка фактор-групп* A/H *и* B/K *соответственно. Значит,* A/H *и* B/K *не содержатся в классе* $\mathcal{K}$.

Если группа C *абелева, то подгруппа* $\mathrm{Aut}_G(H)$ *тривиальна и, следовательно, принадлежит классу* $\mathcal{K}$. *Если же группа* C *не является абелевой, то, как и в примере 2,* $\mathrm{Aut}_G(H) \notin \mathcal{K}$.

Список литературы

1. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Матер. XII Межд. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. С. 97–100.

2. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.

3. *Karrass A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227–255.

Поступила в редакцию 18.09.2013.