Математика и её приложения: ЖИМО. 2007. Выпуск 1 (4). С. 3 – 6.

УДК 514.83+514.7

М. А. Андреев[1], М. А. Паринов[2]

Инварианты электромагнитных волн, допускающих эллиптические и гиперболические винты

Ключевые слова: пространство Максвелла, электромагнитная волна, инварианты электромагнитных полей.

Найдены инварианты некоторых классов электромагнитных волн, допускающих эллиптические и гиперболические винты.

We find invariants for some classes of electromagnetic waves that admit elliptic and hyperbolic helices.

1. Введение

Каждое электромагнитное поле

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -H_3 & H_2 & -E_1 \\ H_3 & 0 & -H_1 & -E_2 \\ -H_2 & H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

имеет два инварианта, задаваемые формулами [3]

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \left(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2\right) - \left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right), \\ I_2 &= \frac{1}{4} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_1 H_1 + E_2 H_2 + E_3 H_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Они являются важными характеристиками электромагнитных полей. В частности, для поля плоской волны в вакууме оба инварианта равны нулю.

Проведенная в работах [4, 5, 6] классификация электромагнитных полей по подгруппам группы Пуанкаре позволяет ввести в рассмотрение много новых полей, свойства которых еще предстоит изучить. В частности, интересно знать, какие у них инварианты. Существуют ли электромагнитные волны, отличные от плоских, для которых $I_1 = I_2 = 0$? В настоящей работе мы приводим результаты вычисления инвариантов для электромагнитных волн, полученных в работах [1, 2].

[1]Ивановский государственный университет, E-mail: mike003@mail.ru.
[2]Ивановский государственный университет, E-mail: map1951.ivgu@mail.ru.

2. Инварианты электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты

В этом разделе рассмотрим некоторые из классов электромагнитных волн, описанных в работе [1].

2.1. Класс $W_{3,4a}$. Общий вид тензора F_{ij} класса $W_{3,4a}$, группа симметрий которого соответствует алгебре $\mathcal{L}_{3,4a} = L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4),\, e_1,\, e_3\}$ $(\lambda \neq 0)$:

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = a_1 \sin\frac{x^2 + x^4}{2\lambda} - a_2 \cos\frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \\ &F_{34} = -F_{23} = a_1 \cos\frac{x^2 + x^4}{2\lambda} + a_2 \sin\frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \\ &F_{13} = a_3, \quad F_{24} = a_4 \quad (a_i = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{3}$$

Инварианты имеют вид

$$I_1 = a_3^2 - a_4^2, \quad I_2 = -a_3 a_4. \tag{4}$$

2.2. Класс $W_{3,4b}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,4b} = L\{e_{13},\, e_1,\, e_3\}$ соответствует класс $W_{3,4b}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^2,\, x^4), \quad F_{24} = C = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Инварианты имеют вид

$$I_1 = \Phi^2 - C^2, \quad I_2 = -C \cdot \Phi, \tag{6}$$

где $\Phi = \Phi(x^2,\, x^4)$.

2.3. Класс $W_{4,2b}$. Для класса $W_{4,2b}$, задаваемого тензором

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^4), \quad F_{24} = C = \mathrm{const}, \tag{7}$$

и соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{4,2b} = L\{e_{13},\, e_1,\, e_2,\, e_3\}$, инварианты имеют вид (6), где Φ теперь зависит только от x^4.

2.4. Класс $W_{4,4a}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,4a} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\, e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\}$ соответствует класс $W_{4,4a}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = a_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - a_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = a_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + a_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = a_3, \quad F_{24} = a_4 \quad (a_i = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{8}$$

Инварианты имеют вид (4).

2.5. Класс $W_{4,4b}$. Для класса $W_{4,4b}$, задаваемого тензором

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^2 - x^4), \quad F_{24} = C = \mathrm{const}, \tag{9}$$

и соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{4,2b} = L\{e_{13}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$, инварианты имеют вид (6), где Φ теперь зависит от $x^2 - x^4$.

3. Инварианты электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты

В этом разделе рассмотрим некоторые из классов электромагнитных волн, описанных в работе [2].

3.1. Класс $W_{3,5}$. Общий вид тензора F_{ij} класса $W_{3,5}$, группа симметрий которого соответствует алгебре $\mathcal{L}_{3,5} = L\{e_{24},\ e_1,\ e_3\}$:

$$\begin{aligned} &F_{12} = \frac{c_1}{r}\operatorname{ch}\varphi + \frac{b_1}{r}\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{14} = -\frac{c_1}{r}\operatorname{sh}\varphi - \frac{b_1}{r}\operatorname{ch}\varphi,\\ &F_{23} = \frac{c_2}{r}\operatorname{ch}\varphi + \frac{b_2}{r}\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{34} = \frac{c_2}{r}\operatorname{sh}\varphi + \frac{b_2}{r}\operatorname{ch}\varphi,\\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = c_3 \quad (c_i,\, b_i = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{10}$$

где связь между координатами $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^1,\, r,\, \tilde{x}^3,\, \varphi\}$ задается формулами

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r\operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r\operatorname{sh}\varphi. \tag{11}$$

Инварианты имеют вид

$$I_1 = \frac{c_1^2 + c_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{(x^2)^2 - (x^4)^2} + b_3^2 - c_3^2, \quad I_2 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{(x^2)^2 - (x^4)^2} - b_3 c_3. \tag{12}$$

3.2. Класс $W_{3,7}$. Алгебре $\mathcal{L}_{3,7} = L\{e_{24} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2 - e_4\}$ соответствует класс $W_{3,7}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{\lambda c_1}{\sqrt{(x^2)^2 - (x^4)^2}}, \quad F_{13} = c_1,\\ &F_{24} = c_2, \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{c_3}{x^2 + x^4} \quad (c_k = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{13}$$

Инварианты имеют вид

$$I_1 = c_1^2 - c_2^2, \quad I_2 = -c_1 c_2. \tag{14}$$

3.3. Класс $W_{4,5}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24} + \lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$ соответствует класс $W_{4,5}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \quad F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4},\\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_k = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{15}$$

Инварианты имеют вид

$$I_1 = b_3^2 - b_4^2, \quad I_2 = -b_3 b_4. \tag{16}$$

3.4. Класс $W_{4,13}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,13} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует класс $W_{4,13}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = \frac{d_3}{r}e^{-\varphi}, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{d_4}{r}e^{-\varphi}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \tag{17}$$

где d_3, $d_4 = \mathrm{const}$, а связь между координатами задается формулами

$$x^1 = \lambda\varphi + \tilde{x}^1, \quad x^2 = r\,\mathrm{ch}\,\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r\,\mathrm{sh}\,\varphi. \tag{18}$$

Оба инварианта равны нулю: $I_1 = I_2 = 0$.

3.5. Класс $W_{4,15}$**.** Для класса $W_{4,15}$, задаваемого тензором

$$F_{12} = F_{14} = \frac{k_2}{r}e^{-\varphi}, \quad F_{13} = -F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{k_3}{r}e^{-\varphi}, \tag{19}$$

и соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{4,15} = L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}, e_{24}+\lambda e_1, e_2-e_4\}$, оба инварианта равны нулю.

3.6. Класс $W_{5,7}$**.** Для класса $W_{5,7}$, задаваемого тензором

$$F_{12} = F_{14} = \frac{k_1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{k_2}{x^2 + x^4}, \tag{20}$$

и соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{5,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$, оба инварианта равны нулю.

Список использованной литературы

1. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2004. – № 1. – С. 51–62.
2. *Иванова А. С.* Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих гиперболические винты // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2005. – № 2. – С. 61–72.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
4. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.
5. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.
6. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 174–175.

Поступила в редакцию 9.11.2007.