Математика и её приложения: ЖИМО. 2007. Выпуск 1 (4). С. 93 – 98.

УДК 519.68

С. И. Хашин[1], Ю. А. Хашина[2]

Свойства r-сегментации изображения

Ключевые слова: распознавание образов, обработка видео.

Одна из основных проблем при нахождении границ на изображении состоит в том, что построенные границы не образуют непрерывных линий и, следовательно, не позволяют разбить изображение на отдельные сегменты. Предлагается алгоритм, строящий границы на изображении в виде непрерывных линий, что позволяет сразу построить некоторую сегментацию исходного изображения.

We suggest the algorithm that construct border-line on the plane image as a continuous line. So this allows to construct some segmentation of the initial image.

1. Введение

Сегментацией изображения будем называть его разбиение на однородные области (сегменты) по некоторому признаку. Один из основных методов сегментации — выделение границ между сегментами на основе анализа градиентов функции яркости. Главным препятствием к построению сегментации изображения этим методом является то, что построенные границы не образуют замкнутых кривых, имеют большое количество разрывов или даже просто состоят из отдельных незамкнутых кривых.

В работе [1] для решения этой проблемы предлагается метод, основанный на некотором приближении к R-функции от яркости.

Определение 1. Пусть $f(x,y)$ — гладкая C^2-функция в некоторой области на плоскости. Назовем ее R-функцией величину

$$R(x,y) = R_f(x,y) = f_x^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{yy}. \qquad (*)$$

Если ∇f — градиент функции f и S — квадрат градиента $S = f_x^2 + f_y^2$, то R_f можно записать в виде скалярного произведения:

$$R_f(x,y) = \frac{1}{2}(\nabla f, \nabla S).$$

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: khash2@mail.ru.

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: khashina_julia@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-07-00178).

Если f — функция одного переменного (т. е. $f(x,y) = f(x)$), то R_f обращается в нуль в точках перегиба функции $f(x)$. Если функция f достаточно гладкая, то уравнение $R_f = 0$ задает набор замкнутых кривых на плоскости, которые можно использовать для построения сегментации области определения функции f.

Если функция f задана таблично, например, своими значениями в целочисленных точках, то можно взять некоторую ее гладкую интерполяцию (класса не ниже C^2) и к ней применить формулу (*). Однако, построенная таким образом кривая оказывается чересчур сложной и плохо подходит для практических вычислений. Например, изображение, состоящее из одной белой точки на черном фоне, сегментируется на 8 областей.

В работе [1] предлагается вместо этого вычислять значения первых и вторых частных производных функции f в целочисленных точках по обычным формулам

$$\begin{aligned}
\partial f/\partial x &\approx (f(x+1,y) - f(x-1,y))/2,\\
\partial f/\partial y &\approx (f(x,y+1) - f(x,y-1))/2,\\
\partial^2 f/\partial^2 x &\approx f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y),\\
\partial^2 f/\partial x\partial y &\approx (f(x+1,y+1) - f(x+1,y-1) - f(x-1,y+1)+\\
&\qquad + f(x-1,y-1))/4,\\
\partial^2 f/\partial^2 y &\approx f(x,y+1) - 2f(x,y) + f(x,y-1),
\end{aligned}$$

и распространять их на всю плоскость с помощью билинейной интерполяции. Построенную таким образом функцию будем назвать *r-функцией* таблично заданной функции f. Основной целью настоящей работы является изучение свойств r-функции.

2. Свойства r-функции

Теорема 1. *а) Для произвольной таблично заданной функции $f(x,y)$, функция $r_f(x,y)$ является непрерывной.*

б) На каждом единичном квадрате $r_f(x,y)$ является бикубической.

в) Пусть $g = \lambda + f$, где $\lambda = \mathrm{const}$. Тогда $R_g = R_f$ и $r_g = r_f$.

г) Пусть $g = \lambda f$, где $\lambda = \mathrm{const}$. Тогда $R_g = \lambda^3 R_f$ и $r_g = \lambda^3 r_f$.

д) Пусть функция $f = f(x,y)$ линейная, т. е. $f = a_0 + a_1 x + a_2 y$. Тогда $R_f = r_f = 0$.

Доказательство всех пунктов следует непосредственно из определений.

Теорема 2. *Пусть $f = f(x, y)$ — функция, заданная таблично своими значениями в целочисленных точках области. Тогда значения ее r-функции в квадрате*

$$x_0 \le x \le x_0 + 1, \quad y_0 \le y \le y_0 + 1$$

зависят лишь от значений исходной функции в 16 точках

$$\begin{array}{llll}
(x_0 - 1, y_0 - 1), & (x_0, y_0 - 1), & (x_0 + 1, y_0 - 1), & (x_0 + 2, y_0 - 1), \\
(x_0 - 1, y_0), & (x_0, y_0), & (x_0 + 1, y_0), & (x_0 + 2, y_0), \\
(x_0 - 1, y_0 + 1), & (x_0, y_0 + 1), & (x_0 + 1, y_0 + 1), & (x_0 + 2, y_0 + 1), \\
(x_0 - 1, y_0 + 2), & (x_0, y_0 + 2), & (x_0 + 1, y_0 + 2), & (x_0 + 2, y_0 + 2).
\end{array}$$

Для доказательства достаточно заметить, что значения частных производных в точке определяются значениями функции в этой точке и в восьми соседних с ней точках, а также, что значение r-функции в рассматриваемом квадрате зависит лишь от найденных приближенных значений частных производных в точках

$$(x_0, y_0), \ (x_0 + 1, y_0), \ (x_0, y_0 + 1), \ (x_0 + 1, y_0 + 1).$$

Теорема 3. *Пусть функция f квадратична, т. е. имеет вид*

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2.$$

Тогда $R_f(x, y) = r_f(x, y)$.

Доказательство В. рассматриваемом случае первые частные производные функции f являются линейными, а вторые — константами. В обоих случаях их билинейная аппроксимация является точной. ■

Замечание. В предыдущей теореме R- и r-функции можно явно выразить через коэффициенты исходной, но получающиеся формулы будут чересчур громоздки. Однако

$$R(p\,x^2 + q\,y^2) = 8(p^3 x^2 + q^3 y^2).$$

Согласно теореме 2 значения r-функции в квадрате $x_0 \le x \le x_0 + 1$, $y_0 \le y \le y_0 + 1$ зависят лишь от значений исходной функции в 16 соседних точках. А по этим значениям однозначно находится бикубическая функция, принимающая данные значения в этих 16 точках. Поэтому имеет смысл рассмотреть следующую конструкцию.

Определение 2. Пусть $f(x, y)$ — произвольная бикубическая функция. Через $\rho_f(x, y)$ обозначим бикубическую функцию, совпадающую с $r_f(x, y)$ на квадрате $1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2$.

Так как бикубические функции задаются 16-ю коэффициентами, ρ можно рассматривать как алгебраическое отображение из $\mathbf{R}^{16}$ в $\mathbf{R}^{16}$. Из однородности r-функции следует, что отображение ρ также является однородным степени 3. Учитывая, что r_f не меняется при прибавлении константы, мы можем рассматривать исходные бикубические функции лишь с нулевым свободным членом. Таким образом, получаем однородное алгебраическое отображение $\rho : \mathbf{R}^{15} \to \mathbf{R}^{16}$ степени 3.

3. Алгоритм сегментации

Пусть изображение (однокомпонентное, серое) задано своей матрицей яркости $f[x, y]$ в области $U_c = \{0 \leq x < m_x,\ 0 \leq y < m_y\}$, где (m_x, m_y) — размеры изображения. Непрерывная кривая $r_f(x, y) = 0$ разбивает область U_c на некоторый набор сегментов. Будем называть такое разбиение r-сегментацией.

Математически такая сегментация определяется просто, но с вычислительной точки зрения такая сегментация неудобна. При обработке изображения на компьютере область определения U — это дискретное множество точек с целочисленными координатами и сегментация есть разбиение множества U на непересекающиеся подмножества:

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Определение 3. Две целочисленные соседние (по вертикали или по горизонтали) точки P_1 и P_2 будем называть *связанными* на изображении $f[x, y]$, если функция $r_f(x, y)$ не меняет знак на отрезке $[P_1, P_2]$.

Согласно теореме 2 функция r_f является бикубической на каждом единичном квадрате, и, следовательно, ее ограничение на отрезок $[P_1, P_2]$ является многочленом степени 3. Корни этого многочлена всегда можно найти по формулам Кардано [2]. Однако, в нашем случае задача существенно упрощается: нам требуется лишь проверить наличие корней у некоторого кубического многочлена $h(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Если значения $h(0)$ и $h(1)$ имеют разный знак, корень имеется. Пусть теперь $h(0) > 0$ и $h(1) > 0$.

В этом случае для проверки наличия корней на отрезке достаточно найти корни (t_i) производной $h'(t) = 0$ (квадратное уравнение), лежащие на отрезке $[0, 1]$ и проверить знак значения функции в них.

Таким образом, проверка связанности двух соседних точек может быть осуществлена достаточно эффективно.

Разбиение области U, объединяющее в один сегмент связанные точки, назовем сегментацией по связанными точкам.

4. Результаты сегментации

Рассмотрим для примера известное тестовое изображение *lena.bmp* размера 512*512 точек (256К точек).

- r-сегментация — свыше 66 тысяч сегментов. Точное их число будет, по всей видимости чуть больше, т. к. могли остаться неучтенными некоторые сегменты, целиком лежащие внутри единичных квадратов.
- Сегментация по связанным точкам — около 50.5 тысяч сегментов.

Таким образом, получающееся количество сегментов чересчур велико для практического применения в большинстве случаев. Для получения более приемлемого результата естественно попробовать применить два метода: уменьшение размера в несколько раз (в примере ниже в $1, 2, 4, 8, 16$ раз) и сглаживание изображения с некоторым радиусом ($r = 0, \ldots, 10$).

Сглаживание с радиусом r производится путем свертки с ядром $K(x, y) = K(|x|)K(|y|)$, где

$$K(x) = \frac{r + 1 - x}{(r + 1)^2} \quad (0 \le x \le r).$$

Сглаживание с радиусом 0 оставляет изображение без изменений.

Зависимость количества сегментов от радиуса сглаживания и уменьшенного размера изображения.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	50531	25859	15894	13108	11727	11117	10685	10502	10343
2	13998	7860	5290	4174	3617	3229	2846	2774	2709
4	4742	2690	1845	1196	923	935	813	686	637
8	1421	756	560	289	246	190	155	159	192
16	429	197	135	82	47	70	52	46	66

Из этой таблицы можно сделать следующие выводы:

- Сглаживание с радиусом более 3 почти не уменьшает количество сегментов. Предпочтительный радиус сглаживания (рассматриваемым методом) равен 2.

- С уменьшением размеров изображения количество сегментов уменьшается несколько медленнее, чем количество точек на изображении. Более детальные измерения показывают, что при уменьшении количества точек в k раз, количество сегментов уменьшается примерно в $k^{0.87}$ раз.

Список использованной литературы

1. *Кручинин А. Е., Хашин С.И.* Сегментация изображения путем выделения непрерывных границ // Вестник ИвГУ. – 2007. – Вып. 3. – С. 80–83.
2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 432 с.

Поступила в редакцию 19.11.2007.