Математика и её приложения: ЖИМО. 2007. Выпуск 1 (4). С. 7 – 12.

УДК 517.958

В. А. Колесова[1], М. А. Паринов[2]

О нётеровых пространствах Максвелла

Ключевые слова: группа Пуанкаре, пространство Максвелла, потенциальная структура, законы сохранения.

Введено понятие нётерова пространства Максвелла. Найдены некоторые классы нётеровых пространств Максвелла.

We introduce the concept “Noether's Maxwell space”. We discover some classes of Noether's Maxwell spaces.

1. Введение

Согласно [4] пространство Максвелла есть тройка (M, g, F), где M — 4-мерное вещественное многообразие, $F = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая внешняя дифференциальная 2-форма) на M, $g = g_{ij}dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика на M лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$. Без ограничения общности под M можно понимать область в пространстве Минковского. Пространства Максвелла — естественная основа для описания электромагнитных полей.

В работах [4, 5, 6] описаны классы пространств Максвелла, допускающих нетривиальные подгруппы группы Пуанкаре из списка в работе И. В. Белько [1]. Эта классификация связана с методом получения первых интегралов уравнений Лоренца [2, 4], основанном на использовании группы симметрий $G_S = G_g \cap G_F$ пространства Максвелла (G_g и G_F — группы диффеоморфизмов многообразия M, не меняющие g и F соответственно).

Согласно [4] потенциальная структура на гладком многообразии M есть дифференциальная 1-форма $A = A_i\, dx^i$, $A_i = A_i(x)$. Если многообразие M 4-мерно, и на нем задана еще псевдоевклидова метрика g лоренцевой сигнатуры, то пару $(M,\, g)$ можно интерпретировать как область в пространстве Минковского, а тройку $(M,\, g,\, A)$ — как 4-потенциал электромагнитного поля.

Каждой потенциальной структуре на пространстве Минковского можно сопоставить пространство Максвелла, положив

$$F = dA \quad (F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{1}$$

Обратно, каждому пространству Максвелла соответствует потенциалная структура, для которой справедливо (1); она определена с точностью до

[1]Ивановский государственный университет.
[2]Ивановский государственный университет, E-mail: map1951.ivgu@mail.ru.

дифференциала от скалярной функции. Говорят, что потенциалная структура A *подчинена* симплектической структуре F, если выполнено условие (1) [3].

Обозначая через G_A группу диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих A, получим группу симметрий потенциала $G_P = G_g \cap G_A$. Если для $(M,\, g,\, F)$ и $(M,\, g,\, A)$ выполнено (1), то $G_P \subset G_S$. В работе [7] представлена классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре (список подгрупп из [1]).

Определение. Назовем пространство Максвелла $(M,\, g,\, F)$ *нётеровым*, если оно допускает нетривиальную группу $G_S = G_g \cap G_F$ и существует такой потенциал $(M,\, g,\, A)$, что A подчинена F и группа $G_P = G_g \cap G_A$ совпадает с G_S.

Смысл введенного понятия состоит в следующем. Для нётеровых пространств Максвелла все первые интегралы уравнений Лоренца, получаемые с использованием группы G_S [2, 4], могут быть получены непосредственно из теоремы Нётер.

2. Поиск нётеровых пространств Максвелла

Каждой группе $G_{k,l}$ — подгруппе группы Пуанкаре из списка в [1], соответствует класс $C_{k,l}$ пространств Максвелла и класс потенциалов $P_{k,l}$, допускающих эту группу. При этом внешний дифференциал действует как линейный оператор из $P_{k,l}$ в $C_{k,l}$:

$$d:\ P_{k,l} \to C_{k,l} \quad (A \mapsto F = dA). \tag{2}$$

Образ $d(P_{k,l})$ отображения (2) состоит из пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$. Они будут нётеровыми при условии $G_S = G_{k,l}$. Других нётеровых пространств Максвелла не существует, т. к. для потенциальной структуры A, подчиненной симплектической структуре F, всегда выполнено включение $G_A \subset G_F$ [3], а следовательно, и $G_P \subset G_S$.

3. Пространства Максвелла с 6-мерными группами симметрий

Предложение 1. *Не существует нётеровых пространств Максвелла, допускающих шестимерные подгруппы группы Пуанкаре.*

Доказательство. Вычисляя для каждого класса потенциалов $P_{6,l}$ $(l = 1, \ldots, 9)$ [7] тензор $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, получим, что $F_{ij} = 0$ во всех случаях. ■

4. Пространства Максвелла с 5-мерными группами симметрий

Предложение 2. *Пространства Максвелла классов $C_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $C_{5,9}$ являются нётеровыми. Не существует других нётеровых пространств Максвелла, допускающих пятимерные подгруппы группы Пуанкаре*[1].

Доказательство. Вычисляя тензор F_{ij} для потенциалов класса $P_{5,6}$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = K_1 e^{-x^3/\lambda}, \quad A_3 = K_2 \quad (K_1, K_2 = \mathrm{const}), \tag{3}$$

получим

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{K_1}{\lambda}\, e^{-x^3/\lambda}. \tag{4}$$

А класс $C_{5,6}$ задается тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = K\, e^{-x^3/\lambda} \tag{5}$$

[5]. Совпадение (4) и (5) достигается при $K = K_1/\lambda$. Так как согласно [5] $G_S = G_{5,6}$, то (5) задает нётеровы пространства Максвелла.

Для потенциалов класса $P_{5,9}$

$$\begin{aligned} &A_1 = Cx^1, \quad A_2 = \frac{C}{2}\left(x^2 + x^4 - \frac{(x^1)^2 + (x^3)^2}{x^2 + x^4}\right) + \frac{D}{x^2 + x^4}, \\ &A_3 = Cx^3, \quad A_4 = A_2 - C(x^2 + x^4) \quad (C,\, D = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{6}$$

тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\frac{Cx^1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{24} = -C, \\ &F_{23} = -F_{34} = \frac{Cx^3}{x^2 + x^4}, \quad (C = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно [5] класс $C_{5,9}$ задается тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{Kx^1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{24} = K, \\ &F_{23} = -F_{34} = -\frac{Kx^3}{x^2 + x^4}, \quad (K = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{8}$$

При $C = -K$ (7) совпадает с (8). Так как для (8) $G_S = G_{5,9}$ [5], то (8) задает нётеровы пространства Максвелла.

Для остальных классов $P_{5,l}$ $F_{ij} = 0$. ■

[1] кроме пространств Максвелла, допускающих группы G_S, сопряженные группам $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $G_{5,9}$.

5. Пространства Максвелла с 4-мерными группами симметрий

Здесь мы приводим результаты исследования на нётеровость пространств Максвелла только для классов $C_{4,1}$, $C_{4,4a}$, $C_{4,4b}$, $C_{4,5}$, $C_{4,6a}$ и $C_{4,6b}$. Для остальных классов $C_{4,l}$ это предмет дальнейших исследований.

Предложение 3. *Пространства Максвелла классов* $C_{4,1}$, $C_{4,4a}$ *и* $C_{4,5}$ *не являются нётеровыми.*

Доказательство. Класс $C_{4,1}$ состоит из однородных пространств Максвелла ($F_{ij} = \mathrm{const}$ в галилеевых координатах), и каждое из них допускает 6-мерную группу симметрий, поэтому согласно предложению 1 ни одно из них не является нётеровым.

Для потенциалов класса $P_{4,5}$

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1, \quad A_2 = C_2 \cdot (x^2 - x^4) + \frac{C_4}{x^2 - x^4}, \quad A_3 = C_3, \\ &A_4 = C_2 \cdot (x^2 - x^4) - \frac{C_4}{x^2 - x^4} \quad (C_k = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{9}$$

тензор F_{ij} имеет вид

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{24} = 2C_2, \tag{10}$$

т. е. задает однородное пространство Максвелла, которое не является нётеровым.

Пространства Максвелла класса $C_{4,4a}$ задаются тензорами F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_i = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{11}$$

и допускают группу $G_{4,4a}$, соответстующую алгебре

$$\mathcal{L}_{4,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\ e_1,\ e_3,\ e_2 + e_4\} \tag{12}$$

при $\lambda \neq 0$. Для потенциалов класса $P_{4,4}$ ($\lambda \neq 0$)

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + C_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad A_2 = C_3, \\ &A_3 = C_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - C_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad A_4 = C_4 \quad (C_i = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{13}$$

тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = \frac{C_1}{\lambda} \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda} \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = \frac{C_1}{\lambda} \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda} \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = F_{24} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Пространства Максвелла, задаваемые тензорами вида (14) принадлежат классу $C_{4,4a}$, но их группа симметрий G_S 6-мерна и соответствует алгебре

$$L\{e_{12}+e_{14},\, e_{23}-e_{34},\, e_{13}+\lambda e_2,\, e_1,\, e_3,\, e_2+e_4\}.$$

Поэтому они не являются нётеровыми. ■

Пространство Максвелла класса $C_{4,4b}$ соответствует алгебре (12) при $\lambda=0$ и задается тензором F_{ij} вида

$$F_{12}=F_{14}=F_{23}=F_{34}=0,\ F_{13}=\mathrm{const},\ F_{24}=\Psi(x^2-x^4), \tag{15}$$

где $\Psi(u)$ — произвольная гладкая функция одной переменной.

Предложение 4. *Пространства Максвелла класса $C_{4,4b}$ являются нётеровыми, если $F_{13}=0$, и не являются нётеровыми, если $F_{13}\neq 0$.*

Доказательство. Для потенциалов класса $P_{4,4}$ $(\lambda=0)$

$$A_1=A_3=0,\quad A_2=A_2(x^2-x^4),\quad A_4=A_4(x^2-x^4) \tag{16}$$

имеем

$$F_{12}=F_{13}=F_{14}=F_{23}=F_{34}=0,\quad F_{24}=\partial_2A_4+\partial_4A_2. \tag{17}$$

Совпадение компонент F_{24} в (15) и (17) возможно, если положить

$$A_2=0,\quad A_4=\int\limits_0^{x^2-x^4}\Psi(u)\,du.$$

Остается добавить, что группа G_S для (15) совпадает с $G_{4,4b}$ лишь при условии $\Psi(u)\neq\mathrm{const}$. ■

Алгебре $\mathcal{L}_{4,6}=L\{e_{24}+\lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$ соответствуют класс пространств Максвелла $C_{4,6a}$ (при $\lambda\neq 0$), задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}&F_{23}=a_1\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}+a_2\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda},\quad F_{34}=a_1\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}+a_2\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda},\\ &F_{12}=F_{14}=0,\quad F_{24}=a_3,\quad F_{13}=a_4\quad (a_i=\mathrm{const}),\end{aligned} \tag{18}$$

и класс $C_{4,6b}$ (при $\lambda=0$), задаваемый тензором

$$F_{12}=F_{14}=F_{23}=F_{34}=0,\quad F_{13}=F_{13}(x^3),\quad F_{24}=\mathrm{const}\,. \tag{19}$$

Предложение 5. *Пространства Максвелла класса $C_{4,6a}$ являются нётеровыми, если $a_3=a_4=0$, и не являются нётеровыми, если $a_3\neq 0$ или $a_4\neq 0$. Пространства Максвелла класса $C_{4,6b}$ являются нётеровыми, если $F_{24}=0$, и не являются нётеровыми, если $F_{24}\neq 0$.*

Доказательство. Для потенциалов класса $P_{4,6a}$ $(\lambda \neq 0)$

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1, \quad A_2 = C_2 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + C_4 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \\ &A_3 = C_3, \quad A_4 = -C_2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} - C_4 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} \end{aligned} \tag{20}$$

$(C_k = \mathrm{const})$ тензор F_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{23} = -\frac{C_4}{\lambda} \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda} \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{34} = -\frac{C_4}{\lambda} \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda} \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda}, \\ &F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Пространства Максвелла, задаваемые тензорами вида (21) принадлежат классу $C_{4,4a}$, и согласно [5] их группа симметрий G_S совпадает с $G_{4,6a}$. Поэтому они являются нётеровыми.

Обоснование утверждения для класса $C_{4,6b}$ проводится аналогично доказательству предложения 4. ■

Список использованной литературы

1. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
2. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 197–203.
3. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. – Иваново: ИвГУ, 1994. – 60 с.
4. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.
5. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237.
6. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 174–175.
7. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225.

Поступила в редакцию 20.10.2007.