Математика и её приложения: ЖИМО. 2007. Выпуск 1 (4). С. 13 – 22.

УДК 519.622

С. Г. Осина[1], С. И. Хашин[2]

# Новое семейство методов Рунге – Кутты порядка 5

**Ключевые слова:** метод Рунге – Кутты, дифференциальные уравнения, численные методы.

Аналитически получено новое четырехмерное семейство 6-стадийных методов Рунге – Кутты порядка 5, не входящее в ранее известные семейства.

We receive analytically the new four-dimensional family of 6-phasic Runge – Kutta methods of the order 5; the earlier-known families do not include this family.

## 1. Введение

Методы Рунге – Кутты [1, 3], используемые для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, характеризуются двумя основными параметрами $(p, n)$ — порядком метода и количеством стадий соответственно. Классические методы имеют параметры (4, 4). Нахождение метода сводится к нахождению его матрицы коэффициентов — нижнетреугольной действительной матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$ с нулевой диагональю. Если матрица описывает некоторый метод Рунге – Кутты, то ее коэффициенты должны удовлетворять уравнениям Бутчера, соответствующих деревьям веса $< p$.

В работах [2, 3] описывается некоторое пятимерное семейство 6-стадийных методов порядка 5. Однако более подробное изучение системы уравнений Бутчера показывает, что найденное семейство не исчерпывает все решения. В настоящей работе описывается метод, позволяющий найти еще одно семейство решений.

## 2. Обозначение

Шестишаговый метод Рунге – Кутты порядка 5 задаётся нижнетреугольной матрицей $A$ размера $6 \times 6$ вида

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: osss7z@yandex.ru.

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: khash2@mail.ru. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-07-00178).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

и вектором $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$, которые можно объединить в одну расширенную матрицу $B$ размера $7 \times 7$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Задача заключается в том, чтобы найти матрицу $A$, коэффициенты которой удовлетворят некоторой системе из 17 нелинейных уравнений с 21 переменной.

Как обычно (см. [1, 3]) обозначим

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad (i = 2, \ldots, 6),$$

$$c_7 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1.$$

Тогда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 - a_{32} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 - a_{42} - a_{43} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ c_5 - a_{52} - a_{53} - a_{54} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ c_6 - a_{62} - a_{63} - a_{64} - a_{65} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 \\ 1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 - b_6 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

## 3. Исходный пример

В [3], с. 5, в качестве упражнения предлагается проверить, был ли прав Кутта (1901 г.) утверждая, что следующая матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/25 & 6/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3 & 15/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/81 & 90/81 & -50/81 & 8/81 & 0 & 0 & 0 \\ 7/30 & 18/30 & -5/30 & 4/30 & 0 & 0 & 0 \\ 48/192 & 0 & 125/192 & 0 & -81/192 & 100/192 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет порядок 5. Ответил на этот вопрос Нюстер в 1925 г. Он же вычислил, какие коэффициенты должны были быть на самом деле:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/25 & 6/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3 & 15/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/81 & 90/81 & -50/81 & 8/81 & 0 & 0 & 0 \\ 2/25 & 12/25 & -2/15 & 8/75 & 0 & 0 & 0 \\ 23/192 & 0 & 125/192 & 0 & -81/192 & 125/192 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 2000 г. одним из авторов была разработана программа, которая с помощью численного алгоритма определяет локальную размерность многообразия решений уравнений Бутчера в окрестности имеющегося решения [4]. Эта размерность оказалась равной четырем. Таким образом, можно предположить, что существует новое 4-параметрическое семейство методов Рунге – Кутты, не входящее в известные ранее семейства. Такое семейство действительно существует. В настоящей работе его удалось описать аналитически.

## 4. Система уравнений Бутчера

(1) $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1$,

(2) $b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 + b_5c_5 + b_6c_6 = \frac{1}{2}$,

(3) $\{b * A^2e\} = \frac{1}{6}$,

(4) $b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 + b_5c_5^2 + b_6c_6^2 = \frac{1}{3}$,

(5) $\{b * A^3e\} = \frac{1}{24}$,

(6) $\{b * A^2e * Ae\} = \frac{1}{8}$,

(7) $b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 + b_5c_5^3 + b_6c_6^3 = \frac{1}{4}$,

(8) $\{b * A(Ae * Ae)\} = \frac{1}{12}$,

(9) $\{b * A^4e\} = \frac{1}{120}$,

(10) $\{b * A(A^2e * Ae)\} = \frac{1}{40}$,

(11) $\{b * A(Ae * Ae * Ae)\} = \frac{1}{20}$,

(12) $\{b * A^2(Ae * Ae)\} = \frac{1}{60}$,

(13) $\{b * A^3e * Ae\} = \frac{1}{30}$,

(14) $\{b * A(Ae * Ae) * Ae\} = \frac{1}{15}$,

(15) $\{b * A^2e * A^2e\} = \frac{1}{20}$,

(16) $\{b * A^2e * Ae * Ae\} = \frac{1}{10}$,

(17) $b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 = \frac{1}{5}$.

## 5. Решение системы

Итак, нам требуется найти решение системы из 17 уравнений от 21 переменной. Нахождение решений осложняется тем, что полное многообразие решений состоит из нескольких неприводимых компонент различной размерности. В данной работе мы найдем лишь одну из этих компонент, характерным признаком которой является отличие коэффициента $c_6$ от 1.

Для решения воспользуемся свободно распространяемой системой компьютерной алгебры Maple 4 Campus version, которая имеет вполне достаточные для нас средства для решения уравнений и систем.

В процессе решения на каждом шаге будем выделять из исходной системы некоторый набор уравнений и переменных так, чтобы выбранные уравнения оказывались линейными по выбранным переменным. Таким образом, на каждом шаге мы будем решать лишь систему линейных уравнений, причем количество уравнений и переменных совпадают.

Для начала в качестве свободных параметров, подчинённых лишь некоторым очевидным ограничениям, выберем коэффициенты $c_2$, $c_3$, $c_5$, $c_6$. Пусть $b_2 = 0$. Выразим $c_4$, $a_{32}$, $a_{42}$, $a_{43}$ через свободные переменные:

$$c_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_3}{p_1},$$

$$a_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_3^2}{c_2},$$

$$a_{42} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(15c_3^2 - 12c_3 + 2)c_3^2}{p_1^3 c_2},$$

$$a_{43} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{(10c_3^2 - 8c_3 + 1)c_3}{p_1^3},$$

где $p_1 = 5c_3^2 - 4c_3 + 1$.

В получающейся системе уравнения (1), (9), (10), (12), (15), (16) оказываются тождествами. В итоге остается система из 11 нелинейных уравнений от 15 переменных:

(2) $0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5c_3^2-4c_3+1} \cdot (-5\,c_3^2 + 4\,c_3 - 1 + 10\,b_3c_3^3 - 8\,b_3c_3^2 + 2\,b_3c_3 + b_4c_3 + 10\,b_5c_5c_3^2 - 8\,b_5c_5c_3 + 2\,b_5c_5 + 10\,b_6c_6c_3^2 - 8\,b_6c_6c_3 + 2\,b_6c_6)$;

(3) $0 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^2}(-4 + 600\,b_5a_{52}c_2c_3^4 - 960\,b_5a_{52}c_2c_3^3 + 624\,b_5a_{52}c_2c_3^2 - 192\,b_5a_{52}c_2c_3 + 600\,b_6a_{65}c_5c_3^4 - 960\,b_6a_{65}c_5c_3^3 + 624\,b_6a_{65}c_5c_3^2 - 192\,b_6a_{65}c_5c_3 + 624\,b_6a_{62}c_2c_3^2 - 192\,b_6a_{62}c_2c_3 + 300\,b_3c_3^6 - 480\,b_3c_3^5 + 3\,b_4c_3^2 - 192\,b_5a_{53}c_3^2 + 24\,b_5a_{53}c_3 + 60\,b_5a_{54}c_3^3 - 48\,b_5a_{54}c_3^2 + 12\,b_5a_{54}c_3 + 312\,b_3c_3^4 + 24\,b_5a_{52}c_2 - 960\,b_6a_{62}c_2c_3^3 + 624\,b_6a_{63}c_3^3 + 600\,b_5a_{53}c_3^5 + 624\,b_5a_{53}c_3^3 - 100\,c_3^4 - 96\,b_3c_3^3 - 960\,b_5a_{53}c_3^4 + 24\,b_6a_{62}c_2 + 600\,b_6a_{63}c_3^5 + 24\,b_6a_{63}c_3 - 960\,b_6a_{63}c_3^4 + 60\,b_6a_{64}c_3^3 - 48\,b_6a_{64}c_3^2 + 24\,b_6a_{65}c_5 + 12\,b_6a_{64}c_3 - 192\,b_6a_{63}c_3^2 + 600\,b_6a_{62}c_2c_3^4 + 32\,c_3 + 160\,c_3^3 + 12\,b_3c_3^2 - 104\,c_3^2)$;

(4) $0 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^2} \cdot (-100\,c_3^4 + 160\,c_3^3 - 104\,c_3^2 + 32\,c_3 - 4 + 300\,b_3c_3^6 - 480\,b_3c_3^5 + 312\,b_3c_3^4 - 96\,b_3c_3^3 + 12\,b_3c_3^2 + 3\,b_4c_3^2 + 300\,b_5c_5^2c_3^4 - 480\,b_5c_5^2c_3^3 + 312\,b_5c_5^2c_3^2 - 96\,b_5c_5^2c_3 + 12\,b_5c_5^2 + 300\,b_6c_6^2c_3^4 - 480\,b_6c_6^2c_3^3 + 312\,b_6c_6^2c_3^2 - 96\,b_6c_6^2c_3 + 12\,b_6c_6^2)$;

(5) $0 = \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^3}(-2 + 600\,c_3^5 - 250\,c_3^6 + 24\,b_5a_{53}c_3^2 - 24\,b_5a_{54}c_3^3 + 6\,b_5a_{54}c_3^2 + 30\,b_5c_3^4a_{54} + 7560\,b_5c_3^6a_{53} - 7200\,b_5c_3^7a_{53} + 3000\,b_5c_3^8a_{53} - 3\,b_4c_3^3 - 7200\,b_6c_3^7a_{63} + 7560\,b_6a_{63}c_3^6 + 30\,b_6c_3^4a_{64} + 3000\,b_6c_3^8a_{63} - 576\,b_6a_{65}a_{52}c_2c_3 + 15120\,b_6a_{65}a_{52}c_2c_3^4 - 8832\,b_6a_{65}a_{52}c_2c_3^3 + 6000\,b_6c_3^6a_{65}a_{52}c_2 - 14400\,b_6c_3^5a_{65}a_{52}c_2 + 3024\,b_6a_{65}a_{52}c_2c_3^2 - 288\,b_6a_{63}c_3^3 - 30\,b_4c_3^5 + 624\,b_6a_{65}a_{54}c_3^3 - 192\,b_6a_{65}a_{54}c_3^2 + 24\,b_4c_3^4 + 24\,b_6a_{65}a_{54}c_3 - 8832\,b_6a_{65}a_{53}c_3^4 + 3024\,b_6a_{65}a_{53}c_3^3 - 576\,b_6a_{65}a_{53}c_3^2 + 48\,b_6a_{65}a_{53}c_3 + 15120\,b_6a_{65}a_{53}c_3^5 + 48\,b_6a_{65}a_{52}c_2 - 14400\,b_6c_3^6a_{65}a_{53} - 4416\,b_5a_{53}c_3^5 + 600\,b_6c_3^5a_{65}a_{54} - 960\,b_6c_3^4a_{65}a_{54} + 6000\,b_6c_3^7a_{65}a_{53} - 288\,b_5a_{53}c_3^3 - 630\,c_3^4 + 1512\,b_5a_{53}c_3^4 - 4416\,b_6a_{63}c_3^5 + 1512\,b_6a_{63}c_3^4 - 24\,b_6a_{64}c_3^3 + 6\,b_6a_{64}c_3^2 + 24\,b_6a_{63}c_3^2 + 24\,c_3 + 368\,c_3^3 - 126\,c_3^2)$;

(6) $0 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^3}(-2 - 192\,b_5c_5a_{52}c_2c_3 + 1008\,b_5c_5a_{52}c_2c_3^2 + 600\,c_3^5 - 250\,c_3^6 - 2944\,b_5c_5a_{52}c_2c_3^3 + 5040\,b_5c_5a_{52}c_2c_3^4 + 2000\,b_5c_5c_3^7a_{53} - 320\,b_5c_5c_3^4a_{54} + 5040\,b_5c_5a_{53}c_3^5 - 64\,b_5c_5a_{54}c_3^2 + 208\,b_5c_5a_{54}c_3^3 + 200\,b_5c_5a_{54}c_3^5 - 1472\,b_3c_3^6 + 504\,b_3c_3^5 - 96\,b_3c_3^4 - 4800\,b_5c_5c_3^6a_{53} - 192\,b_5c_5a_{53}c_3^2 + 16\,b_5c_5a_{53}c_3 + b_4c_3^3 - 4800\,b_5c_5a_{52}c_2c_3^5 + 2000\,b_5c_5a_{52}c_2c_3^6 + 16\,b_6c_6a_{62}c_2 + 16\,b_6c_6a_{63}c_3 - 64\,b_6c_6a_{64}c_3^2 - 4800\,b_6c_6a_{62}c_2c_3^5 + 2000\,b_6c_6a_{62}c_2c_3^6 - 2944\,b_6c_6a_{62}c_2c_3^3 + 200\,b_6c_6a_{64}c_3^5 + 16\,b_6c_6a_{65}c_5 - 2944\,b_6c_6a_{63}c_3^4 + 5040\,b_6c_6a_{63}c_3^5 - 4800\,b_6c_6a_{63}c_3^6 + 8\,b_6c_6a_{64}c_3 + 2000\,b_6c_6c_3^7a_{63} - 320\,b_6c_6c_3^4a_{64} - 192\,b_6c_6a_{65}c_5c_3 + 1008\,b_6c_6a_{65}c_5c_3^2 - 192\,b_6c_6a_{62}c_2c_3 + 1008\,b_6c_6a_{62}c_2c_3^2 - 2944\,b_6c_6a_{65}c_5c_3^3 + 5040\,b_6c_6a_{65}c_5c_3^4 - 4800\,b_6c_6a_{65}c_5c_3^5 + 2000\,b_6c_6a_{65}c_5c_3^6 + 5040\,b_6c_6a_{62}c_2c_3^4 + 208\,b_6c_6a_{64}c_3^3 + 1008\,b_6c_6a_{63}c_3^3 - 192\,b_6c_6a_{63}c_3^2 + 2520\,b_3c_3^7 + 1000\,b_3c_3^9 - 2400\,b_3c_3^8 - 630\,c_3^4 + 8\,b_3c_3^3 + 24\,c_3 + 368\,c_3^3 + 8\,b_5c_5a_{54}c_3 - 2944\,b_5c_5a_{53}c_3^4 + 1008\,b_5c_5a_{53}c_3^3 - 126\,c_3^2 + 16\,b_5c_5a_{52}c_2)$;

(7) $0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^3}(-2 + 600\,c_3^5 - 250\,c_3^6 - 1472\,b_3c_3^6 + 504\,b_3c_3^5 - 96\,b_3c_3^4 + b_4c_3^3 - 96\,b_5c_5^3c_3 - 96\,b_6c_6^3c_3 + 2520\,b_3c_3^7 + 1000\,b_3c_3^9 - 2400\,b_3c_3^8 - 2400\,b_6c_6^3c_3^5 + 1000\,b_6c_6^3c_3^6 + 504\,b_6c_6^3c_3^2 - 1472\,b_6c_6^3c_3^3 + 2520\,b_6c_6^3c_3^4 - 630\,c_3^4 + 504\,b_5c_5^3c_3^2 + 8\,b_3c_3^3 + 8\,b_5c_5^3 + 8\,b_6c_6^3 - 2400\,b_5c_5^3c_3^5 + 1000\,b_5c_5^3c_3^6 + 24\,c_3 - 1472\,b_5c_5^3c_3^3 + 368\,c_3^3 + 2520\,b_5c_5^3c_3^4 - 126\,c_3^2)$;

(8) $0 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^3}(-2 + 1500\,b_3c_3^8c_2 + 600\,c_3^5 - 250\,c_3^6 + 24\,b_5a_{53}c_3^2 - 24\,b_5a_{54}c_3^3 + 6\,b_5a_{54}c_3^2 + 30\,b_5c_3^4a_{54} + 7560\,b_5c_3^6a_{53} - 7200\,b_5c_3^7a_{53} + 3000\,b_5c_3^8a_{53} - 3\,b_4c_3^3 - 7200\,b_6c_3^7a_{63} + 7560\,b_6a_{63}c_3^6 + 30\,b_6c_3^4a_{64} + 3000\,b_6c_3^8a_{63} - 288\,b_6a_{63}c_3^3 + 3000\,b_5a_{52}c_2^2c_3^6 - 288\,b_5a_{52}c_2^2c_3 + 1512\,b_5a_{52}c_2^2c_3^2 - 4416\,b_5a_{52}c_2^2c_3^3 + 7560\,b_5a_{52}c_2^2c_3^4 - 7200\,b_5a_{52}c_2^2c_3^5 - 288\,b_6a_{62}c_2^2c_3 - 30\,b_4c_3^5 + 24\,b_4c_3^4 - 4416\,b_5a_{53}c_3^5 - 288\,b_5a_{53}c_3^3 - 630\,c_3^4 + 12\,b_3c_3^2c_2 + 1512\,b_5a_{53}c_3^4 - 2208\,b_3c_3^5c_2 - 4416\,b_6a_{63}c_3^5 + 1512\,b_6a_{63}c_3^4 - 24\,b_6a_{64}c_3^3 + 6\,b_6a_{64}c_3^2 + 24\,b_6a_{63}c_3^2 + 3780\,b_3c_3^6c_2 - 3600\,b_3c_3^7c_2 + 6\,b_4c_3^2c_2 - 36\,b_4c_3^3c_2 + 45\,b_4c_3^4c_2 - 144\,b_3c_3^3c_2 + 756\,b_3c_3^4c_2 + 24\,b_5a_{52}c_2^2 + 24\,b_6a_{65}c_5^2 + 24\,b_6a_{62}c_2^2 + 1512\,b_6a_{62}c_2^2c_3^2 - 4416\,b_6a_{62}c_2^2c_3^3 + 7560\,b_6a_{62}c_2^2c_3^4 - 288\,b_6a_{65}c_5^2c_3 + 1512\,b_6a_{65}c_5^2c_3^2 - 4416\,b_6a_{65}c_5^2c_3^3 + 7560\,b_6a_{65}c_5^2c_3^4 + 24\,c_3 + 368\,c_3^3 - 7200\,b_6a_{62}c_2^2c_3^5 + 3000\,b_6a_{62}c_2^2c_3^6 - 7200\,b_6a_{65}c_5^2c_3^5 + 3000\,b_6a_{65}c_5^2c_3^6 - 126\,c_3^2)$;

(11) $0 = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^3}(-2 - 6000\,b_3c_3^7c_2^2 + 6300\,b_3c_3^6c_2^2 - 3680\,b_3c_3^5c_2^2 + 1260\,b_3c_3^4c_2^2 - 240\,b_3c_3^3c_2^2 + 75\,b_4c_3^4c_2^2 + 600\,c_3^5 - 250\,c_3^6 - 50\,b_4c_3^6 + 5\,b_5a_{54}c_3^3 - 7360\,b_5c_3^6a_{53} + 12600\,b_5c_3^7a_{53} - 12000\,b_5c_3^8a_{53} + 2500\,b_3c_3^8c_2^2 + 12600\,b_6c_3^7a_{63} - 7360\,b_6a_{63}c_3^6 - 12000\,b_6c_3^8a_{63} - 60\,b_4c_3^3c_2^2 + 10\,b_4c_3^2c_2^2 + 5000\,b_6a_{63}c_3^9 + 5000\,b_6a_{62}c_2^3c_3^6 - 12000\,b_6a_{62}c_2^3c_3^5 + 12600\,b_6a_{62}c_2^3c_3^4 - 7360\,b_6a_{62}c_2^3c_3^3 + 2520\,b_6a_{62}c_2^3c_3^2 - 480\,b_6a_{62}c_2^3c_3 + 5000\,b_6a_{65}c_5^3c_3^6 - 12000\,b_6a_{65}c_5^3c_3^5 + 12600\,b_6a_{65}c_5^3c_3^4 - 7360\,b_6a_{65}c_5^3c_3^3 + 2520\,b_6a_{65}c_5^3c_3^2 - 480\,b_6a_{65}c_5^3c_3 + 40\,b_5a_{52}c_2^3 + 40\,b_6a_{63}c_3^3 + 40\,b_6a_{65}c_5^3 + 40\,b_4c_3^5 + 5000\,b_5a_{53}c_3^9 - 5\,b_4c_3^4 + 2520\,b_5a_{53}c_3^5 + 20\,b_3c_3^2c_2^2 + 40\,b_5a_{53}c_3^3 - 630\,c_3^4 - 480\,b_5a_{53}c_3^4 + 2520\,b_6a_{63}c_3^5 - 480\,b_6a_{63}c_3^4 + 5\,b_6a_{64}c_3^3 + 5000\,b_5a_{52}c_2^3c_3^6 - 12000\,b_5a_{52}c_2^3c_3^5 + 12600\,b_5a_{52}c_2^3c_3^4 - 7360\,b_5a_{52}c_2^3c_3^3 + 2520\,b_5a_{52}c_2^3c_3^2 - 480\,b_5a_{52}c_2^3c_3 + 24\,c_3 + 40\,b_6a_{62}c_2^3 + 368\,c_3^3 - 126\,c_3^2)$;

(13) $0 = \frac{1}{480} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^4} \cdot (-16 + 39680\,c_3^5 - 46400\,c_3^6 - 10000\,c_3^8 + 32000\,c_3^7 + 27840\,b_5c_3^4c_5a_{53} - 2400\,b_5c_3^5c_5a_{54} - 119040\,b_5c_3^5c_5a_{53} + 150000\,b_5c_3^{10}c_5a_{53} - 480000\,b_5c_3^9c_5a_{53} - 3840\,b_5c_3^3c_5a_{53} + 327840\,b_5c_3^6c_5a_{53} + 60\,b_5c_3^2c_5a_{54} + 240\,b_5c_3^2c_5a_{53} - 150\,b_4c_3^6 - 119040\,b_6c_6a_{63}c_3^5 + 27840\,b_6c_6a_{63}c_3^4 + 60\,b_6c_6a_{64}c_3^2 - 480000\,b_6c_6a_{63}c_3^9 + 240\,b_6c_6a_{63}c_3^2 + 150000\,b_6c_6c_3^{10}a_{63} - 480\,b_6c_6a_{64}c_3^3 - 1856\,c_3^2 - 2880\,b_6c_6a_{65}a_{54}c_3^2 + 15120\,b_6c_6a_{65}a_{54}c_3^3 + 480\,b_6c_6a_{65}a_{53}c_3 - 7680\,b_6c_6a_{65}a_{53}c_3^2 + 55680\,b_6c_6a_{65}a_{53}c_3^3 - 238080\,b_6c_6a_{65}a_{53}c_3^4 + 655680\,b_6c_6a_{65}a_{53}c_3^5 + 75600\,b_6c_6c_3^5a_{65}a_{54} + 480\,b_6c_6a_{65}a_{52}c_2 + 240\,b_6c_6a_{65}a_{54}c_3 + 300000\,b_6c_6c_3^9a_{65}a_{53} + 300000\,b_6c_6c_3^8a_{65}a_{52}c_2 - 960000\,b_6c_6c_3^7a_{65}a_{52}c_2 + 1392000\,b_6c_6c_3^6a_{65}a_{52}c_2 - 1190400\,b_6c_6c_3^5a_{65}a_{52}c_2 - 595200\,b_6c_6a_{63}c_3^7 + 696000\,b_6c_6a_{63}c_3^8 + 327840\,b_6c_6a_{63}c_3^6 - 3840\,b_6c_6a_{63}c_3^3 - 72000\,b_6c_6c_3^6a_{65}a_{54} + 30000\,b_6c_6c_3^7a_{65}a_{54} - 1190400\,b_6c_6c_3^6a_{65}a_{53} + 1392000\,b_6c_6c_3^7a_{65}a_{53} - 44160\,b_6c_6c_3^4a_{65}a_{54} - 960000\,b_6c_6c_3^8a_{65}a_{53} + 1500\,b_6c_6c_3^6a_{64} - 2400\,b_6c_6c_3^5a_{64} + 1560\,b_6c_6c_3^4a_{64} + 7936\,c_3^3 - 7680\,b_6c_6a_{65}a_{52}c_2c_3 + 55680\,b_6c_6a_{65}a_{52}c_2c_3^2 - 238080\,b_6c_6a_{65}a_{52}c_2c_3^3 + 655680\,b_6c_6a_{65}a_{52}c_2c_3^4 - 21856\,c_3^4 - 15\,b_4c_3^4 + 120\,b_4c_3^5 + 1560\,b_5c_3^4c_5a_{54} + 696000\,b_5c_3^8c_5a_{53} - 480\,b_5c_3^3c_5a_{54} - 595200\,b_5c_3^7c_5a_{53} + 1500\,b_5c_3^6c_5a_{54} + 256\,c_3)$;

(14) $0 = \frac{1}{240} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^4} \cdot (-16 + 240\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 - 3840\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3 + 39680\, c_3^5 - 46400\, c_3^6 + 696000\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^6 - 59520\, b_3 c_3^6 c_2 + 163920\, b_3 c_3^7 c_2 - 297600\, b_3 c_3^8 c_2 + 348000\, b_3 c_3^9 c_2 - 240000\, b_3 c_3^{10} c_2 - 10000\, c_3^8 + 30\, b_4 c_3^3 c_2 - 180\, b_4 c_3^4 c_2 + 225\, b_4 c_3^5 c_2 - 1920\, b_3 c_3^4 c_2 + 13920\, b_3 c_3^5 c_2 + 32000\, c_3^7 + 120\, b_3 c_3^3 c_2 + 27840\, b_5 c_3^4 c_5 a_{53} - 2400\, b_5 c_3^5 c_5 a_{54} - 595200\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^5 + 327840\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^4 + 27840\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^2 - 119040\, b_5 c_3^5 c_5 a_{53} + 150000\, b_5 c_3^{10} c_5 a_{53} - 480000\, b_5 c_3^9 c_5 a_{53} - 3840\, b_5 c_3^3 c_5 a_{53} + 327840\, b_5 c_3^6 c_5 a_{53} + 60\, b_5 c_3^2 c_5 a_{54} + 240\, b_5 c_3^2 c_5 a_{53} - 119040\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^3 - 150\, b_4 c_3^6 - 119040\, b_6 c_6 a_{63} c_3^5 + 27840\, b_6 c_6 a_{63} c_3^4 + 60\, b_6 c_6 a_{64} c_3^2 - 480000\, b_6 c_6 a_{63} c_3^9 + 240\, b_6 c_6 a_{63} c_3^2 + 150000\, b_6 c_6 c_3^{10} a_{63} - 480\, b_6 c_6 a_{64} c_3^3 + 75000\, b_3 c_3^{11} c_2 - 1856\, c_3^2 - 480000\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^7 + 327840\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^4 - 119040\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^3 + 27840\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^2 - 3840\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3 + 150000\, b_5 c_5 a_{52} c_2^2 c_3^8 - 119040\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^3 + 27840\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^2 - 3840\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3 + 696000\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^6 - 480000\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^7 + 150000\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^8 + 327840\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^4 - 480000\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^7 + 696000\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^6 + 150000\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^8 - 595200\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 c_3^5 - 595200\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 c_3^5 - 595200\, b_6 c_6 a_{63} c_3^7 + 696000\, b_6 c_6 a_{63} c_3^8 + 327840\, b_6 c_6 a_{63} c_3^6 - 3840\, b_6 c_6 a_{63} c_3^3 + 1500\, b_6 c_6 c_3^6 a_{64} - 2400\, b_6 c_6 c_3^5 a_{64} + 1560\, b_6 c_6 c_3^4 a_{64} + 7936\, c_3^3 - 21856\, c_3^4 - 15\, b_4 c_3^4 + 120\, b_4 c_3^5 + 240\, b_6 c_6 a_{62} c_2^2 + 240\, b_6 c_6 a_{65} c_5^2 + 1560\, b_5 c_3^4 c_5 a_{54} + 696000\, b_5 c_3^8 c_5 a_{53} - 480\, b_5 c_3^3 c_5 a_{54} - 595200\, b_5 c_3^7 c_5 a_{53} + 1500\, b_5 c_3^6 c_5 a_{54} + 256\, c_3);$

(17) $0 = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{(5c_3^2-4c_3+1)^4}(-16 + 39680\, c_3^5 - 46400\, c_3^6 + 50000\, b_6 c_6^4 c_3^8 - 1280\, b_5 c_5^4 c_3 + 9280\, b_5 c_5^4 c_3^2 - 39680\, b_5 c_5^4 c_3^3 + 109280\, b_5 c_5^4 c_3^4 - 198400\, b_5 c_5^4 c_3^5 + 232000\, b_5 c_5^4 c_3^6 - 160000\, b_5 c_5^4 c_3^7 - 198400\, b_6 c_6^4 c_3^5 + 232000\, b_6 c_6^4 c_3^6 - 160000\, b_6 c_6^4 c_3^7 - 1280\, b_6 c_6^4 c_3 + 9280\, b_6 c_6^4 c_3^2 - 39680\, b_6 c_6^4 c_3^3 + 109280\, b_6 c_6^4 c_3^4 - 10000\, c_3^8 + 109280\, b_3 c_3^8 - 198400\, b_3 c_3^9 + 232000\, b_3 c_3^{10} - 160000\, b_3 c_3^{11} + 50000\, b_3 c_3^{12} + 32000\, c_3^7 - 1280\, b_3 c_3^5 + 9280\, b_3 c_3^6 - 39680\, b_3 c_3^7 - 1856\, c_3^2 + 50000\, b_5 c_5^4 c_3^8 + 7936\, c_3^3 - 21856\, c_3^4 + 5\, b_4 c_3^4 + 80\, b_3 c_3^4 + 80\, b_5 c_5^4 + 80\, b_6 c_6^4 + 256\, c_3);$

На следующем шаге заметим, что уравнения $(3), (8), (11))$ оказываются линейными относительно переменных $(a_{63}, a_{64}, a_{65})$. Эта система имеет единственное решение, которое можно найти с помощью $Maple$-команды

$$solve(eq[3], eq[8], eq[11], a[6,3], a[6,4], a[6,5]),$$

что позволяет выразить переменные $(a_{63}, a_{64}, a_{65})$ через остальные. Подставив найденные выражения в остающиеся уравнения мы получим уже 8 уравнений от 12 переменных.

Далее отметим, что после указанной подстановки уравнения $((2), (4), (7), (17))$ оказываются линейными относительно переменных $(b_3,\, b_4,\, b_5,\, b_6)$ (до подстановки это было не так). Эта линейная система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти с помощью $Maple$-команды

$$solve(eq[2], eq[4], eq[7], eq[17], b[3], b[4], b[5], b[6]),$$

что позволяет выразить переменные $(b_3,\, b_4,\, b_5,\, b_6)$ через остальные. Подставив найденные выражения в остающиеся уравнения мы получим уже 4 уравнения от 8 переменных.

Далее, аналогично, командой

$$solve(eq[6], eq[14], a[5,3], a[5,4])$$

мы сокращаем систему до двух уравнений ((5) и (13)) от 6 переменных. Первое из них после приведенных подстановок оказывается линейным относительно $a_{62}$. После его нахождения и подстановки результата во второе уравнение, оно оказывается опять линейным относительно оставшейся переменной $a_{52}$.

В итоге получаем полное решение системы:

$$a_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_3^2}{c_2},$$

$$a_{42} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(15c_3^2 - 12c_3 + 2)c_3^2}{p_1^3 c_2},$$

$$a_{43} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{(10c_3^2 - 8c_3 + 1)c_3}{p_1^3},$$

$$a_{52} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_3 c_5 p_4(c_5)}{c_2 p_4(c_3)},$$

$$a_{53} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(80c_5c_3^3 - 94c_5c_3^2 + 32c_5c_3 - 4c_5 - 20c_3^3 - c_3 + 16c_3^2)(c_3 - c_5)c_5}{c_3^2 p_2 p_4(c_3)},$$

$$a_{54} = \frac{2c_5(c_3 - c_5)p_1^2 p_5(c_5)}{c_3^2 p_2 p_4(c_3)},$$

$$a_{62} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_3 c_6(10c_6^2 - 12c_6 + 3)}{c_2 p_4(c_3)},$$

$$a_{63} = \frac{1}{2c_3^2 p_2 p_3(c_5)(c_3 - c_5)p_4(c_3)} \cdot c_6(c_3 - c_6)(-1200c_6c_3^5 + 1950c_6c_3^4 -$$

$$-1072c_6c_3^3 + 1896c_6c_3^2c_5 - 528c_6c_3c_5 - 1064c_6^2c_3^2 + 252c_6^2c_3 - 40c_6c_5^2 +$$

$$+56c_6c_5 + 920c_6c_3^4c_5 + 300c_3^5 - 20c_6c_3 - 24c_6^2 - 520c_5^2c_3^3 + 400c_5^2c_3^4 -$$

$$-10c_5^2c_3 + 180c_5^2c_3^2 + 2260c_6^2c_3^3 - 2400c_6^2c_3^4 - 8c_3^2 - 1580c_6c_5^2c_3^2 +$$

$$+60c_5c_3^3+320c_5c_3^4-400c_5c_3^5-4c_5c_3-55c_5c_3^2+1000c_6^2c_3^5-1600c_6c_3^4c_5^2-$$

$$-400c_3^4+238c_6c_3^2+143c_3^3-2730c_6c_3^3c_5+2680c_3^3c_6c_5^2+600c_6c_3^5c_5+400c_6c_3c_5^2),$$

$$a_{64}=\frac{2}{c_3^2p_2p_3(c_5)p_4(c_3)p_5(c_5)}\cdot c_6p_1^2p_5(c_6)(c_3-c_6)(100c_6c_3^3-250c_5c_3^3-$$

$$-200c_5^2c_3^3-260c_5^2c_3^2-160c_6c_3^2+15c_3^2+340c_5c_3^2+78c_6c_3-162c_5c_3+$$

$$+120c_5^2c_3-8c_3-20c_5^2-12c_6+28c_5),$$

$$a_{65}=\frac{c_6p_5(c_6)(-2+5c_3)(c_3-c_6)(c_5-c_6)}{c_5p_3(c_5)p_5(c_5)(c_3-c_5)},$$

$$b_2=0,$$

$$b_3=\frac{1}{60c_3^2p_2(c_3-c_5)(c_3-c_6)}\cdot(-150c_5c_3^2+200c_6c_3^2c_5-150c_6c_3^2+120c_3^2-$$

$$-190c_6c_3c_5+140c_5c_3-111c_3+140c_6c_3-30c_5+40c_6c_5+24-30c_6),$$

$$b_4=\frac{4p_1^4(-20c_5c_3-20c_6c_3+30c_6c_3c_5+15c_3-12+15c_5-20c_6c_5+15c_6)}{15c_3^2p_2p_5(c_5)p_5(c_6)},$$

$$b_5=-\frac{p_4(c_3)p_3(c_6)}{60c_5p_5(c_5)(c_3-c_5)(c_5-c_6)},$$

$$b_6=-\frac{p_4(c_3)p_3(c_5)}{60c_6p_5(c_6)(c_3-c_6)(c_5-c_6)},$$

где

$$p_1=5c_3^2-4c_3+1,$$

$$p_2=10c_3^2-8c_3+1,$$

$$p_3(c)=20c\cdot c_3-15c_3-10c+8,$$

$$p_4(c)=3-12c+10c^2,$$

$$p_5(c)=10c\cdot c_3^2-8c\cdot c_3+2c-c_3.$$

Таким образом, обнаружено новое семейство 6-стадийных методов Рунге – Кутты порядка 5, причем не удовлетворяющее ни одному упрощающему предположению.

## 6. Численный пример

Для удобства проверок выпишем одно из решений системы. Подберем свободные переменные $c_2$, $c_3$, $c_5$, $c_6$ так, чтобы все коэффициенты метода были не слишком громоздкими:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/25 & 1/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9/64 & 1/32 & 5/64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13/135 & 1/135 & 1/9 & 16/135 & 0 & 0 & 0 \\ -23/125 & -9/125 & 83/25 & -112/25 & 252/125 & 0 & 0 \\ 23/12 & 0 & -2125/48 & 1472/21 & -945/32 & 625/224 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{5},\ c_4 = 1,\ c_5 = \frac{1}{3},\ c_6 = \frac{3}{5}.$$

## Список использованной литературы

1. *Butcher J. C.* Numerical analysis of ordinary differential equations. – Toronto: John Wiley & Sons, 1987. – 425 p.
2. *Butcher J. C.* Coefficients for the study of Runge – Kutta iteration processes // J. of the Australian Math. Soc. – 1963. – Vol. 3. – P. 185–201.
3. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. *Хашин С.И.* Численное решение уравнений Бутчера // Вестник ИвГУ. – 2000. – Вып. 3. – С. 155–164.

*Поступила в редакцию 19.11.2007.*