Математика и её приложения: ЖИМО. 2007. Выпуск 1 (4). С. 23 – 34.

УДК 519.6

С. В. Пухов[1], **Д. А. Тихомиров**[2]

Задача Чаплыгина как задача оптимального управления

Ключевые слова: оптимальное управление, правило множителей Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, задача Чаплыгина.

В этой статье мы применяем принцип максимума Понтрягина к решению одной многомерной вариационной задачи Чаплыгина. Получено уравнение поверхности в R^n, на которой лежит оптимальная фазовая траектория.

We apply the Pontrjagin's maximum principle to the solving of some multi-dimensional variational Chaplygin's problem. We obtain the equation of surface in R^n that includes the optimal phase trajectory.

Выдающимся отечественным ученым в области прикладной математики, теоретической механики, гидро- и аэродинамики академиком С. А. Чаплыгиным была рассмотрена задача, которая в современной науке может быть классифицирована как задача оптимального управления: *самолет за определенное время должен, находясь в одной плоскости, облететь как можно большую площадь.* При этом в задаче С. А. Чаплыгина предполагалось, что "дует постоянный ветер одного направления".

В [1, 4] задача С. А. Чаплыгина рассмотрена также как плоская задача о максимальной площади облета, но предположение о "ветре" более общее.

В данной статье задача Чаплыгина обобщается на многомерный случай, который также имеет ясный геометрический смысл.

1. Принцип максимума Понтрягина

В пятидесятых годах XX века многочисленные потребности прикладных дисциплин, в первую очередь, автоматического управления летательными аппаратами, вызвали постановку нового класса экстремальных задач, получивших название *задач оптимального управления.*

Необходимое условие экстремума для задач этого класса — *принцип максимума*, было высказано в виде гипотезы В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Л. С. Понтрягиным в 1956 г. [3] и доказано В. Г. Болтянским в 1958 г. [2]. Впоследствии оно было развито как самим Л. С. Понтрягиным, так и его учениками В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко и другими исследователями, в первую очередь, А. А. Милютиным и

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: spuhov@ivanovo.ac.ru.
[2]Ивановский государственный университет.

А. Я. Дубовицким. В сравнении с общей задачей классического вариационного исчисления — задачей Лагранжа, в задачах оптимального управления появляется новый объект — управление, и, соответственно, новое дополнительное условие на управление в виде включения (см. ниже условие (4)). Поэтому условия принципа максимума имеют иную форму в сравнении с условиями классического вариационного исчисления: в качестве обязательного в систему условий решения задачи оптимального управления вместе с классическим уравнением Эйлера–Лагранжа и условиями трансверсальности входит решение вспомогательной экстремальной задачи на максимум для гамильтоновой формулировки, которой придерживается школа Понтрягина, и на минимум — для лагранжевой формулировки. Отсюда и название — *принцип максимума Понтрягина.*

Здесь рассматривается частный случай общей постановки задачи оптимального управления: за счет выбора пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ требуется минимизировать следующий функционал смешанного вида с интегральной и терминальной составляющими частями

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt + g(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \tag{1}$$

при ограничении в виде дифференциальной связи между фазовой переменной $x(\cdot)$ и управлением $u(\cdot)$

$$\Phi(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0, \tag{2}$$

а также при граничных (краевых) условиях на фазовую переменную

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0 \tag{3}$$

и при ограничении в виде включения на управление

$$u(t) \in U \text{ для всех } t \in [t_0; t_1]. \tag{4}$$

При этом в формулах (1)–(4) отображения имеют вид

$$x(\cdot) : [t_0; t_1] \to R^n, \quad u(\cdot) : [t_0; t_1] \to R^r,$$
$$f : V \to R, \quad g : W \to R, \quad \Phi : \widetilde{V} \to R^m, \quad \psi : W \to R^s,$$

где V, $\widetilde{V}$ и W — открытые множества в пространствах $R \times R^n \times R^r$, $R \times R^n \times R^n \times R^r$ и $R^n \times R^n$ соответственно, а U — некоторое множество в пространстве R^r.

Ограничение (2), когда функция Φ не зависит от $\dot{x}$ и u, т. е. имеет вид $\Phi(t, x) = 0$, называется в вариационном исчислении *фазовым.* В механике фазовые ограничения называют также *голономными связями.*

Другой случай — когда соотношение (2) можно разрешить относительно производной $\dot{x}$. Ниже мы будем считать, что именно в таком виде выполнено условие (2):

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{5}$$

где $\varphi : R \times R^n \times R^r \ \to \ R^n$.

В дальнейшем мы также считаем моменты времени t_0 и t_1 фиксированными (т. н. задача с фиксированным, или закрепленным временем), а функции f, g, φ и ψ предполагаем непрерывно дифференцируемыми. Как всегда, $KC^1([t_0;t_1],R^m)$ и $KC([t_0;t_1],R^m)$ означают пространства кусочно непрерывно дифференцируемых и, соответственно, кусочно непрерывных вектор-функций, действующих из $[t_0;t_1]$ в R^m.

Пара $(x(\cdot),u(\cdot))$ называется *управляемым процессом* в задаче (1), (3)–(5), если управление $u(\cdot)$ — *кусочно непрерывная* вектор-функция, удовлетворяющая условию (4), фазовая траектория $x(\cdot)$ — *кусочно непрерывно дифференцируемая* вектор-функция и при этом всюду, кроме точек разрыва управления $u(\cdot)$, функция $x(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5). Управляемый процесс называется *допустимым*, если, кроме того, удовлетворяются краевые условия (3).

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называют *оптимальным* в задаче (1), (3)–(5), если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого управляемого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что $|x(t)-\hat{x}(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0;t_1]$, выполняется неравенство $I(x(\cdot),u(\cdot)) \geq I(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$.

Для решения экстремальных задач, в первую очередь, механики Лагранж разработал *метод неопределенных множителей* и сформулировал правило, которое теперь называется *правилом множителей Лагранжа.* Этот метод был не полностью обоснован Лагранжем, и прошло более ста лет прежде, чем выводам Лагранжа был придан вид строго доказанных теорем.

Принцип Лагранжа для решения экстремальных задач с ограничениями состоит в сведении исходной ("сложной") экстремальной задачи к решению вспомогательной ("более простой", т. е. уже изученной) экстремальной задачи. При этом, на первом этапе применения метода для исходной задачи составляется т. н. *функция Лагранжа* (для отдельных классов экстремальных задач определен ее вид), в которой с помощью (неопределенных) множителей учитываются как минимизируемый функционал, так и, по возможности, все ограничения. На втором этапе рассматривается *вспомогательная экстремальная задача* минимизации функции Лагранжа при ограничениях исходной задачи, не учтенных в функции Лагранжа. Если оказывается, что эта вспомогательная задача уже изучена ("проще исходной"), то в ней выписывается система необходимых условий экстремума. Принцип Лагранжа утверждает, что полученная таким образом система условий является системой необходимых условий экстремума в исходной экстремальной задаче. Принцип Лагранжа, в целом, выполняется для всех изученных классов экстремальных задач, в т. ч. и для задач оптимального управления.

Для задачи оптимального управления (1), (3)–(5) функция Лагранжа имеет следующий вид (ограничения (4) в функции Лагранжа не учитываются):

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L dt + l, \tag{6}$$

где

$$L = L(t, x, \dot{x}, u) = \langle p(t),\, \dot{x} - \varphi(t, x, u)\rangle + \lambda_0 f(t, x, u), \tag{7}$$

$$l = l(x_0, x_1) = \lambda_0 g(x_0, x_1) + \langle \mu,\, \psi(x_0, x_1)\rangle\,, \tag{8}$$

а $\langle a, b\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов a и b в соответствующем евклидовом пространстве.

Здесь имеется полная аналогия с конечномерным случаем в том, что терминальная часть функции Лагранжа l имеет вид (8). Что же касается ограничения $\dot{x} = \varphi(t, x, u)$, то оно должно выполняться почти для всех $t \in [t_0; t_1]$, и соответствующий множитель Лагранжа $p(\cdot)$ по аналогии должен быть вектор-функцией t, а его вклад в функцию Лагранжа имеет вид интеграла, а не суммы.

Далее, в соответствии с принципом Лагранжа, рассматривается вспомогательная экстремальная задача

$$\mathcal{L}\left(x(\cdot), u(\cdot), \hat{p}(\cdot), \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0\right) \xrightarrow{(x(\cdot),u(\cdot))} \inf \tag{9}$$

при ограничениях (4), не учтенных в функции Лагранжа. При этом множители Лагранжа $p(\cdot) = \hat{p}(\cdot)$, $\mu = \hat{\mu}$, $\lambda_0 = \hat{\lambda}_0$ считаются фиксированными, а переменные $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ — независимыми.

Задача (9) естественным образом распадается на две:

$$\mathcal{L}\left(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{p}(\cdot), \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0\right) \ \to\ \inf\ \ (\text{по } x(\cdot)), \tag{10}$$

$$\mathcal{L}\left(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), \hat{p}(\cdot), \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0\right) \ \to\ \inf\ \ (\text{по } u(\cdot) \in \widetilde{U}), \tag{11}$$

где через $\widetilde{U}$ обозначено множество кусочно непрерывных вектор-функций $u(\cdot):\ [t_0; t_1] \to R^r$ со значениями в U.

Задача (10) — это задача Больца, и, в соответствии с необходимыми условиями, в ней выполнены уравнения Эйлера – Лагранжа

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)\right) + L_x\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)\right) = 0 \tag{12}$$

и условия трансверсальности

$$L_{\dot{x}}(t_k, \hat{x}(t_k), \dot{\hat{x}}(t_k), \hat{u}(t_k)) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_k}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), \quad k = 0,\, 1. \tag{13}$$

Задача (11) имеет следующий вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} \chi(t, u(t)) dt \ \to\ \inf, \quad u(\cdot) \in \widetilde{U}, \tag{14}$$

где $\chi(t, u) = \hat{\lambda}_0 f(t, \hat{x}(t), u)\ - \langle \hat{p}(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u)\rangle$.

Необходимое (и достаточное) условие экстремума в задаче (14) следующее: $\hat{u}(\cdot) \in \tilde{U}$ доставляет минимум в задаче (11) тогда и только тогда, когда при всех $t \in [t_0; t_1]$ кроме, может быть, точек разрыва $\hat{u}(\cdot)$ выполнено соотношение

$$\min_{u \in U} \chi(t, u) = \chi(t, \hat{u}(t)), \tag{15}$$

которое равносильно соотношению

$$\min_{u \in U} L\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u\right) = L\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)\right), \tag{16}$$

а это, в свою очередь, равносильно следующему

$$\max_{u \in U} \left[\langle \hat{p}(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u)\rangle - \hat{\lambda}_0 f(t, \hat{x}(t), u)\right] = \\ = \langle \hat{p}(t), \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\rangle - \hat{\lambda}_0 f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)). \tag{17}$$

Необходимые условия экстремума (12) и (13) в задаче (10) вместе с условием (17) приводят к системе необходимых условий экстремума в задаче (1), (3)–(5), получившей название *принципа максимума Понтрягина* из-за специфического вида условий (17). Точнее, имеет место следующее утверждение (принцип максимума Понтрягина).

Теорема. *Если* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *есть оптимальный процесс для задачи* (1), (3)–(5)*, то найдутся множители Лагранжа*

$$\hat{\lambda}_0 \geq 0, \quad \hat{p}(\cdot) \in KC^1([t_0; t_1], R^n), \quad \hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_s),$$

не равные нулю одновременно и такие, что выполнено уравнение Эйлера – Лагранжа (12)*, принцип максимума* (17) *и условия трансверсальности* (13)*, где* L *и* l *имеют вид* (7)*,* (8).

Короче, принцип максимума Понтрягина утверждает, что в задаче оптимального управления (1), (3)–(5) имеет место принцип Лагранжа снятий ограничений.

Заметим также, что уравнение Эйлера – Лагранжа (12) и условия трансверсальности (13) после вычисления соответствующих производных могут быть записаны в виде

$$-\dot{\hat{p}}(t) = \varphi_x^*(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\hat{p}(t) - \hat{\lambda}_0 f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \tag{18}$$

$$\hat{p}(t_k) = (-1)^k \left[\psi_{x_k}^*(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))\hat{\mu} + \hat{\lambda}_0 g_{x_k}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))\right], \quad k = 0, 1. \tag{19}$$

2. Постановка обобщенной задачи Чаплыгина

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T \langle Ax(t), u(t)\rangle\, dt \to \inf$$

при дифференциальном ограничении

$$\dot{x}(t) - u(t) = 0,$$

краевых условиях

$$x(0) = a,\ x(T) = b$$

и условии на управление

$$u(t) \in U \text{ при } t \in [0; T],$$

где

$x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in KC^1([0;T]; R^n)$,

$u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in KC([0;T]; R^n)$,

A — матрица $n \times n$ с действительными элементами,

$a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — векторы из R^n,

U — множество в R^n,

T — фиксированное число.

Таким образом, в поставленной задаче

$$f(t, x, u) = \langle Ax, u\rangle\,, \quad \varphi(t, x, u) = u, \quad l(x_0, x_1) = (x_0 - a,\ x_1 - b).$$

3. Система уравнений для оптимального процесса

Если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс в этой задаче, то в соответствии с принципом максимума Понтрягина существуют множители Лагранжа

$$\hat{p}(\cdot) = (\hat{p}_1(\cdot) \dots \hat{p}_n(\cdot)) \in KC^1([t_0, t_1], R^n), \quad \hat{\lambda}_0 \geq 0,$$
$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n) \in R^n, \quad \hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_n) \in R^n$$

такие, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^T L dt + l,$$

где

$$L(t, x, \dot{x}, u) = \hat{\lambda}_0 \langle Ax, u \rangle + \langle \hat{p}, \dot{x} - u \rangle ,$$
$$l = \langle \hat{\mu}, x(0) - a \rangle + \langle \hat{\eta}, x(T) - b \rangle ,$$

а) выполнено *уравнение Эйлера – Лагранжа* (“по x”)

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0,$$

которое имеет вид

$$-\dot{\hat{p}} + \hat{\lambda}_0 A^* \hat{u} = 0, \tag{20}$$

так как $L_x(t, x, \dot{x}, u) = \hat{\lambda}_0 A^* u$, $L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, u) = \hat{p}$ (A^* — матрица, сопряженная к матрице A);

б) выполнены *условия трансверсальности*

$$L_{\dot{x}} \left(t_k, x(t_k), \dot{x}(t_k), u(t_k) \right) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_k} l \left(x(t_0), u(t_1) \right) , \quad k = 0,\, 1,$$

таким образом,

$$\dot{\hat{p}}(0) = \hat{\mu}, \ \dot{\hat{p}}(T) = -\hat{\eta}, \tag{21}$$

в) выполнено условие оптимальности “по u” (*принцип максимума Понтрягина*)

$$\min_{u \in U} L \left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u \right) = L \left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t) \right) \quad \text{для п. в. } t \in [0; T].$$

В нашей задаче это условие имеет вид

$$\max_{u \in U} \left[\langle \hat{p}, u \rangle - \hat{\lambda}_0 \langle A\hat{x}, u \rangle \right] = \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle - \hat{\lambda}_0 \langle A\hat{x}, \hat{u} \rangle . \tag{22}$$

Из (20) имеем $\dot{\hat{p}} = \hat{\lambda}_0 A^* \hat{u}$, $\dot{\hat{p}} = \hat{\lambda}_0 A^* \dot{\hat{x}}$, откуда следует

$$\hat{p} = \hat{\lambda}_0 A^* \hat{x} + c, \tag{23}$$

где $c \in R^n$.

4. Вырожденный оптимальный процесс

Рассмотрим случай $\hat{\lambda}_0 = 0$. Из (21)–(23) имеем

$$\hat{p}(t) = \text{const} = \hat{p}, \quad \hat{\mu} = -\hat{\eta}, \quad \max_{u \in U} \langle \hat{p}, u \rangle = \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle . \tag{24}$$

Отметим, что $\hat{p} \neq 0$, иначе $\hat{\mu} = \hat{\eta} = 0$ (известно, что не все множители Лагранжа равны нулю).

Таким образом, $\langle \hat{p}, \hat{u} - u \rangle \geq 0$ при всех $u \in U$.

Будем рассматривать множество U следующего вида

$$U = \{u \in R^n \mid \langle B(u - u_0), u - u_0 \rangle \leq 1\}, \tag{25}$$

где B — положительно определенная матрица, а граница множества U имеет вид

$$\partial U = \{u \in R^n \mid \langle B(u - u_0), u - u_0 \rangle = 1\}.$$

Обозначим

$$F(u) = \langle B(u - u_0), \ u - u_0 \rangle , \tag{26}$$

тогда

$$\partial U = \{u \in R^n \mid F(u) = 1\}.$$

Скалярное произведение $\langle \hat{p}, u \rangle$ максимально на U при $u = \hat{u}(t)$, если $\hat{u}(t) \in \partial U$ и вектор $\hat{p}$ сонаправлен с нормалью касательной плоскости к множеству ∂U в точке $\hat{u}(t)$, т. е. с градиентом $\operatorname{grad} F(u)$ при $u = \hat{u}(t)$:

$$(B^* + B)(\hat{u}(t) - u_0) = k\hat{p},$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности векторов, функция, зависящая от $t, k > 0$. Выразим отсюда $\hat{u}(t)$:

$$\hat{u}(t) = k(B^* + B)^{-1}\hat{p} + u_0.$$

Правая часть равенства — константа, поэтому

$$\hat{u}(t) = \text{const} = \hat{u} \text{ при всех } t \in [0; T].$$

Отсюда для оптимального решения получаем $\dot{\hat{x}} = \hat{u} = \text{const}$; значит, $\hat{x}$ — линейная функция. Так как $\hat{x}(0) = a, \ \hat{x}(T) = b$, то

$$\hat{x}(t) = a + \frac{t}{T}(b - a).$$

При $a = b$ получаем $\hat{x}(t) \equiv a, \ \hat{u}(t) \equiv 0, \ I = 0$, т. е. вырожденное решение.

5. Регулярный оптимальный процесс

Рассмотрим случай $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Так как $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, то без потери общности можно считать, что $\hat{\lambda}_0 = 1$; тогда из принципа максимума (22) и уравнения (23) получаем для п. в. $t \in [0;T]$:

$$\max_{u\in U} \langle (A^* - A)\hat{x} + c,\ u\rangle = \langle (A^* - A)\hat{x} + c,\ \hat{u}\rangle .$$

Будем исследовать на максимум функционал

$$\langle (A^* - A)\hat{x} + c,\ u\rangle \to \max,\ u \in U.$$

На множестве U, определенном в (25), рассмотрим, как и выше, функцию $F(u)$, определенную в (26); ее градиент имеет вид

$$\operatorname{grad} F(u) = B^*(u - u_0) + B(u - u_0) = (B^* + B)(u - u_0). \tag{27}$$

Для п. в. $t \in [0;T]$ скалярное произведение $\langle (A^* - A)\hat{x} + c,\ u\rangle$ максимально на U при $u = \hat{u}(t)$, если $\hat{u}(t) \in \partial U$ и вектор $(A^*-A)\hat{x}+c$ сонаправлен с нормалью касательной плоскости к множеству ∂U в точке $\hat{u}(t)$, т. е. с градиентом $\operatorname{grad} F(u)$ при $u = \hat{u}(t)$

$$\begin{cases} k(B^* + B)(\hat{u} - u_0) = (A^* - A)\hat{x} + c, \\ \langle B(\hat{u} - u_0),\ \hat{u} - u_0\rangle \ = 1, \end{cases} \tag{28}$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности векторов, функция, зависящая от t, $k > 0$. Отсюда

$$\begin{cases} (\hat{u} - u_0) = \frac{1}{k}\ (B^* + B)^{-1}((A^* - A)\hat{x} + c), \\ \langle B(\hat{u} - u_0),\ \hat{u} - u_0\rangle = 1, \end{cases} \tag{29}$$

и значение $k = k(t)$ определяется следующим уравнением

$$k = \left\langle B(B^* + B)^{-1}((A^* - A)\hat{x} + c), (B^* + B)^{-1}((A^* - A)\hat{x} + c)\right\rangle^{1/2}. \tag{30}$$

Далее, т. к. $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то из первого уравнения системы (28)

$$\dot{\hat{x}} = \frac{1}{k}\left((B^* + B)^{-1}((A^* - A)\hat{x} + c)\right) + u_0. \tag{31}$$

Продифференцируем k по t :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \frac{1}{2k}\Big(\Big\langle B(B^* + B)^{-1}[(A^* - A)\hat{x} + c],\ (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}}\Big\rangle + \\ &+ \Big\langle (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}},\ B^*(B^* + B)^{-1}[(A^* - A)\hat{x} + c]\Big\rangle\Big) = \\ &= \frac{1}{2k}\Big(\Big\langle (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}},\ B(B^* + B)^{-1}[(A^* - A)\hat{x} + c]\Big\rangle + \\ &+ \Big\langle (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}},\ B^*(B^* + B)^{-1}[(A^* - A)\hat{x} + c]\Big\rangle\Big) = \\ &= \frac{1}{2k}\Big\langle (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}},\ (B^* + B)(B^* + B)^{-1}[(A^* - A)\hat{x} + c]\Big\rangle = \\ &= \frac{1}{2k}\Big\langle (B^* + B)^{-1}(A^* - A)\dot{\hat{x}},\ (A^* - A)\hat{x} + c\Big\rangle . \end{aligned}$$

Подставим $\dot{\hat{x}}$ из (31)

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2k}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)[u_0 + \frac{1}{k}((B^*+B)^{-1}[(A^*-A)\hat{x}+c])],\right.$$
$$\left.(A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2k^2}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)(B^*+B)^{-1}[(A^*-A)\hat{x}+c],\, (A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2k}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)u_0,\ (A^*+A)\hat{x}+c\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2k^2}\left\langle Y[(A^*-A)\hat{x}+c],\ (A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2k}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)u_0,\ (A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle,$$

где для сокращения записи обозначено $Y = (B^*+B)^{-1}(A^*-A)(B^*+B)^{-1}$.

Далее, подставляем вместо $(A^*-A)\hat{x}+c$ левую часть первого уравнения системы (28):

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2k}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)u_0,\ (A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2k^2}\left\langle Y[(A^*-A)\hat{x}+c],\ (A^*-A)\hat{x}+c\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2k}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)u_0,\ k(B^*+B)(\hat{u}-u_0)\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2k^2}\left\langle kY(B^*+B)(\hat{u}-u_0),\ k(B^*+B)(\hat{u}-u_0)\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle (B^*+B)^{-1}(A^*-A)u_0,\ (B^*+B)(\hat{u}-u_0)\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle Y(B^*+B)(\hat{u}-u_0),\ (B^*+B)(\hat{u}-u_0)\right\rangle.$$

Подставим $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$ в производную:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)u_0,\ \dot{\hat{x}}-u_0\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)(\dot{\hat{x}}-u_0),\ \dot{\hat{x}}-u_0\right\rangle,$$
$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}-u_0\right\rangle,$$
$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ u_0\right\rangle.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle$. Для любой матрицы A имеем $\left\langle A\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle = \left\langle \dot{\hat{x}},\ A^*\dot{\hat{x}}\right\rangle$, или $\left\langle A^*\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle = \left\langle A\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle$, отсюда $\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ \dot{\hat{x}}\right\rangle = 0$. Таким образом,

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{2}\left\langle (A^*-A)\dot{\hat{x}},\ u_0\right\rangle;$$

интегрируя по t, получаем

$$k + \frac{1}{2}\langle (A^* - A)\hat{x},\ u_0\rangle = \mathrm{const}\,.$$

Подставляя сюда k из (30), получаем уравнение для $\hat{x}(t)$:

$$\big\langle B(B^*+B)^{-1}[(A^*-A)\hat{x}+c],\ (B^*+B)^{-1}[(A^*-A)\hat{x}+c]\big\rangle^{1/2} + \\ + \frac{1}{2}\langle (A^*-A)\hat{x},\ u_0\rangle = \mathrm{const}\,. \quad (32)$$

В случае, если $B = B^*$,

$$\big\langle (A^*-A)x + c,\ B^{-1}((A^*-A)x+c)\big\rangle^{1/2} + \langle (A^*-A)x,\ u_0\rangle = \mathrm{const}, \quad (33)$$

данное уравнение описывает поверхность в R^n, на которой лежит фазовая траектория $\{\hat{x}(t) : 0 \le t \le T\}$.

6. Классическая изопериметрическая задача

Изопериметрическая задача будет представлять собой частный случай рассмотренной нами в разд. 2 задачи с матрицами следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}-1 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in R$ — произвольные элементы матрицы. Тогда

$$A^* - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B = B^*,\ \ U = \{u = (u_1; u_2) \in R^2\ :\ u_1^2 + u_2^2 \le 1\}.$$

Воспользуемся (33):

$$\left\langle \begin{pmatrix} -x_2 + c_1 \\ x_1 + c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 + c_1 \\ x_1 + c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = ((x_2 - c_1)^2 + (x_1 + c_2)^2) = \mathrm{const},$$

таким образом, оптимальная траектория есть окружность.

7. Задача Чаплыгина

Для задачи Чаплыгина матрицы будут выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}-1 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1/V^2 & 0 \\ 0 & 1/V^2 \end{pmatrix},\ u_0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

тогда

$$A^* - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = B^*, U = \{u = (u_1; u_2) \in R^2 : (u_1 - u^0)^2 + u_2^2 \le V^2\}.$$

Воспользуемся (33):

$$V \cdot \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 + c_1 \\ x_1 + c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 + c_1 \\ x_1 + c_2 \end{pmatrix} \right\rangle^{1/2} + \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{const},$$

$$((x_2 - c)^2 + (x_1 + c_2)^2)^{1/2} - \frac{u_1^0 x_2}{V} = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, оптимальная траектория — эллипс.

8. Заключение

В обобщенной задаче Чаплыгина, где подынтегральная функция имеет вид $\langle Ax, u\rangle$, A — некоторая матрица, и множество управлений

$$U = \{u \in R^n \mid \langle B(u-u_0), u-u_0\rangle \leq 1\}$$

представляет собой n-мерный эллипсоид (B — положительно определенная симметричная матрица), получаем в R^n поверхность вида

$$\big\langle (A^*-A)x+c,\ B^{-1}((A^*-A)x+c)\big\rangle^{1/2} + \langle (A^*-A)x,\ u_0\rangle = \mathrm{const},$$

на которой лежит оптимальная фазовая траектория $\{\hat{x}(t) : 0 \leq t \leq T\}$.

Список использованной литературы

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. *Болтянский В. Г.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 119. – № 6. – С. 1070–1073.
3. *Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С.* К теории оптимальных процессов // ДАН СССР. – 1956. – Т. 110. – № 1. – С. 7–10.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Поступила в редакцию 11.12.2007.