Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 15 – 28.

УДК 519.816

В. Ю. Киселев [1]

О некоторых свойствах правдивых правил выборов для области предпочтений, унимодальных на дереве

Ключевые слова: правило выборов, унимодальные предпочтения, средние вершины дерева.

Приводятся некоторые свойства однозначных правдивых (т. е. защищенных от манипулирования со стороны выборщиков) положительно суверенных правил выборов на области унимодальных предпочтений на графе, имеющем вид дерева. Исследуется понятие средних вершин дерева для данного профиля унимодальных предпочтений: при нечетном числе выборщиков средняя вершина единственна и соответствует победителю по Кондорсе, а при четном числе выборщиков полностью описывается структура множества всех средних вершин и, тем самым, множества слабых победителей по Кондорсе при данном профиле.

Let $\mathcal{U}$ be a set of all single-picked profiles u on a tree G and $\varphi : \mathcal{U} \to A$ be a voting rule. We consider a set of 'middle points' of G by the profile u and investigate the structure of the set when n is even (in the case of odd n there is a unique middle point corresponding the Condorcet winner by u). So we completely describe the set of all weak Condorcet winners in case of even n.

1. Общие определения

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — *выборщики* и $A = \{a_1; \ldots ; a_p\}$ — множество *кандидатов*. Будем считать, что каждый выборщик имеет свое мнение относительно **всех** кандидатов и может расположить их в порядке убывания своего предпочтения, причем безразличие исключено: выборщику P_i соответствует некоторый строгий линейный порядок $>_i$ на множестве A, называемый *предпочтением* u_i выборщика P_i: $a_{j_1} >_i a_{j_2} >_i \ldots >_i a_{j_p}$, где $(j_1; j_2; \ldots ; j_p)$ — перестановка номеров $1, 2, \ldots, p$ (зависящая от номера выборщика i). Это означает, что выборщик P_i отдает первое место кандидату $a_{j_1} = \mathrm{top}(u_i)$, второе место — кандидату a_{j_2}, и так до кандидатуры $a_{j_p} = \mathrm{bot}(u_i)$ — наихудшего для выборщика P_i варианта. Множество строгих линейных порядков на A обозначим через $L(A)$.

Правилом голосования φ называется точечно-множественное отображение из $L(A)$ в A, ставящее в соответствие каждому *профилю* $u = |u_1\ u_2\ \ldots\ u_n| \in \mathcal{L} = (L(A))^n$ непустое множество *победителей*

[1] Ивановский государственный энергетический университет,
E-mail: vkiselev@math.ispu.ru.

$\varphi(u) \subset A$. Правило φ *однозначно*, если $|\varphi(u)| = 1$ при любом u, то есть если правило выявляет ровно одного победителя.

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to A$ — **однозначное** правило голосования, обладающее свойством *положительной суверенности* (это означает, что любой кандидат $a \in A$ может быть победителем по правилу φ при некотором профиле $u \in \mathcal{L}$). Через $u = |u_1\ u_2\ \ldots\ u_n|$ обозначим профиль, состоящий из истинных предпочтений u_i всех выборщиков P_i. Пусть $a = \varphi(u)$. Однако выборщики, вообще говоря, не обязаны сообщать при голосовании свои истинные предпочтения; ничто не мешает выборщику P_i сообщить любое другое предпочтение $v_i \in L(A)$, $v_i \neq u_i$, с целью обеспечить за счет этого избрание другого кандидата $b >_i a$.

Пусть $u_{(-i)}$ — набор истинных предпочтений всех выборщиков, кроме P_i, то есть $u_{(-i)} = |u_1\ \ldots\ u_{i-1}\ u_{i+1}\ \ldots\ u_n|$, и $v = (u_{(-i)}, v_i)$ — профиль, в котором выборщик P_i заменил свое истинное предпочтение u_i на ложное, v_i, а остальные выборщики сохранили свои истинные предпочтения u_i. Тогда правило φ *правдиво*, если для любого выборщика P_i и любого его сообщения $v_i \neq u_i$, где u_i — истинное предпочтение выборщика P_i, имеет место соотношение $\varphi(u) \geqslant_i \varphi(v)$.

При $p = 2$ легко проверить, что если φ — любое правило из следующего списка: правило относительного большинства, правило Симпсона, правило Коупленда, — дополненное, для обеспечения однозначности, каким-нибудь ненейтральным дополнением, например, алфавитным: в случае равенства между кандидатами выигрывает тот, который следует ранее по алфавиту в списке кандидатов, — то правило φ является правдивым.

В случае произвольного числа p кандидатов любое из n *диктаторских* правил δ_i, определенных равенством $\delta_i(u) = \mathrm{top}_i(u)$, является правдивым. Действительно, диктатору лгать невыгодно: и так избирается лучший для него кандидат, — а всем остальным выборщикам бесполезно: от их мнения все равно результат выборов не зависит.

Теорема 1 (А. Гиббард, М. А. Сэттертуэйт, см. [1]). *Пусть $p \geqslant 3$ и φ — правдивое однозначное положительно суверенное правило выборов. Тогда $\varphi = \delta_i$ при некотором $i = 1, \ldots, n$.* ■

Этот “отрицательный” результат показывает, что применение любого “сколь-нибудь демократического”, то есть не диктаторского, правила голосования неизбежно приводит с необходимостью мириться с тем, что при некоторых профилях предпочтений выборщиков кому-то из них будет выгодно солгать при подаче бюллетеней — сообщить не истинное свое мнение о кандидатах, а нечто иное.

2. Правдивые правила при сужении возможных вариантов предпочтений

Результат теоремы Гиббарда – Сэттертуэйта приводит к необходимости изменить постановку задачи таким образом, чтобы свободное голосование не влекло с неизбежностью сообщения неистинных предпочтений. Оказывается, такое изменение возможно, если предположить, что множество альтернатив $A = \{a; b; c; \dots\}$ имеет подходящую структуру (см. [1]).

Вместо пространства наборов **всевозможных** предпочтений выборщиков $\mathcal{L}$ мы можем взять в качестве области определения правил голосования множество профилей некоторого особого ("естественного") вида, то есть некоторую подобласть $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{D} = D^n$, где $D \subset L(A)$ — набор тех предпочтений, которые мы считаем "естественными". При этом вывод теоремы Гиббарда – Сэттертуэйта о том, что правдивы лишь диктаторские правила голосования, для ограничения правил φ на область $\mathcal{D}$ может стать неверным, и тем самым мы преодолеваем сложившуюся "отрицательную" ситуацию с отсутствием правдивых демократических правил голосования.

Ниже мы рассмотрим два способа выбора области $\mathcal{D} = D^n$ (второй способ — обобщение первого), а пока что предпошлем этому рассмотрению некоторые общие утверждения, заимствованные из [1].

Определение 1. Назовем однозначное правило голосования φ, определенное на некоторой области предпочтений $\mathcal{D} = D^n$, *сильно правдивым* на области $\mathcal{D}$, если никакая коалиция $S \subset N$ не может за счет сообщения своими участниками $P_i \in S$ неистинных предпочтений $v_i \in D$ вместо истинных предпочтений $u_i \in D$ улучшить результат выборов для всех своих участников $P_i \in S$: если $\varphi(u) >_i \varphi(u')$ для каких-то $P_i \in S$, то обязательно $\varphi(u') >_j \varphi(u)$ для некоторых других $P_j \in S$; здесь профиль u' получен из профиля u заменой истинных предпочтений $u_i \in D$ на некоторые другие предпочтения $v_i \in D$ всеми участниками коалиции S. ■

Ясно, что любое сильно правдивое правило голосования является правдивым: достаточно рассмотреть коалиции, состоящие из одного выборщика.

Определение 2. Кандидат a называется *победителем по Кондорсе* (*слабым победителем по Кондорсе*) при профиле u (будем обозначать это как $a = \mathsf{CW}(u)$ и $a \in \mathsf{WCW}(u)$ соответственно), если a выигрывает у любого другого кандидата (или, соответственно, не проигрывает никакому другому кандидату) при попарном сравнении. ■

Любой победитель по Кондорсе, очевидно, является слабым победителем по Кондорсе, а в случае нечетного числа выборщиков — и наоборот. В случае же четного числа выборщиков возможно, что два или более кандидатов находятся в равном положении, так что голоса выборщиков делятся между ними ровно пополам при их парном сравнении, и тогда все эти кандидаты являются слабыми победителями по Кондорсе.

Например, при четном $n = 2m$, $A = \{a; b; c; d\}$ и профиле u, заданном предпочтениями $a <_i b <_i c <_i d$ при $i = 1, \dots, m$ и $d <_i c <_i b <_i a$ при $i = m + 1, \dots, 2m$, все четыре кандидата — слабые победители по Кондорсе: легко видеть, что при сравнении любой пары кандидатов голоса выборщиков делятся ровно пополам.

Лемма 1 ([1]). *Пусть число n выборщиков — нечетное. Предположим, что область предпочтений $\mathcal{D}$ такова, что при любом профиле $u \in \mathcal{D}$ имеется победитель по Кондорсе. Тогда правило голосования $\varphi : u \mapsto \mathsf{CW}(u)$, при котором победителем объявляется победитель по Кондорсе (при сделанном предположении это действительно правило голосования на области $\mathcal{D}$), является сильно правдивым (и, следовательно, правдивым) на $\mathcal{D}$.*

Если число выборщиков четное и любой профиль u указанного вида имеет слабых победителей по Кондорсе, то такое правило голосования φ, при котором победитель непременно принадлежит $\mathsf{WCW}(u)$, также является сильно правдивым на $\mathcal{D}$.

2.1. Унимодальные предпочтения на спектре Здесь мы изложим результат Э. Мулена (см. [1]). Пусть на множестве кандидатов A имеется линейная структура, заданная либо некоторым “естественным” линейным порядком следования кандидатов:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p,$$

либо, что эквивалентно, отождествлением их с вершинами графа G, имеющего вид простой цепи, в которой порядок следования вершин тот же: $G = (a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_p)$. Порядок $<$ на A мы будем называть *спектром* кандидатов и при $x < y$ $(x, y \in A)$ говорить, что x *левее*, чем y, и что y *правее*, чем x. Этот порядок $<$ никак не связан с порядками на A, которые означают предпочтения выборщиков P_i; эти порядки мы всюду обозначаем, снабжая нижними индексами: $<_i$.

Как обычно, $x \leqslant y$ означает, что либо $x < y$, либо x и y совпадают.

Свяжем с фиксированным линейным порядком $<$ на A некоторый класс “естественных” предпочтений выборщиков:

Определение 3. Назовем предпочтение u_i *унимодальным* на спектре $<$, или просто *унимодальным*, если существует кандидат $\widehat{a}_i \in A$ (зависящий от выборщика P_i), такой, что по мере удаления по спектру кандидатур $x \in A$ от $\widehat{a}_i$ ценность кандидатур x для выборщика P_i убывает. Кандидат $\widehat{a}_i = \mathrm{top}_i$ называется *пиком* выборщика P_i, или *i-м пиком.* Унимодальность предпочтения означает, что если две кандидатуры x и y лежат по одну сторону от пика, то $x <_i y$ при $x < y \leqslant \widehat{a}_i$, и $y >_i x$ при $\widehat{a}_i \leqslant y < x$ (см. рис. 1).

Множество профилей u, в которых каждый выборщик имеет унимодальное предпочтение u_i, назовем *областью унимодальных предпочтений* и будем обозначать $\mathcal{U}$. ■

Рассмотрим все пики выборщиков при фиксированном профиле $u \in \mathcal{U}$:

$$\widehat{a}_1; \widehat{a}_2; \ldots; \widehat{a}_n;$$

некоторые из этих пиков могут совпадать друг с другом, а при $n > p$ это неизбежно. Перенумеруем эти n пиков в порядке неубывания вдоль спектра:

$$a_1^* \leqslant a_2^* \leqslant \ldots \leqslant a_n^*. \tag{1}$$

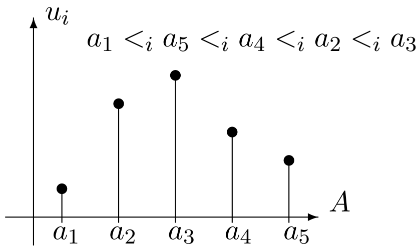

Рис. 1. Пиком $\widehat{a}_i$ служит кандидат a_3

Здесь $a_1^*; a_2^*; \ldots; a_n^*$ — список из тех же n кандидатов $\widehat{a}_1; \widehat{a}_2; \ldots; \widehat{a}_n$, среди которых могут быть совпадающие, только теперь они перечислены в другом порядке. Если n нечетно, число $m = \frac{n+1}{2}$ — целое. Тогда пик a_m^* называется *средним пиком* профиля u. Если n четно, целыми являются числа $m' = \frac{n}{2}$ и $m'' = \frac{n}{2} + 1$. Тогда пики $a_{m'}^*$ и $a_{m''}^*$ называется *средними пиками* профиля u.

Лемма 2 ([1]). *Пусть число n выборщиков нечетно. Тогда при каждом профиле $u \in \mathcal{U}$ существует (единственный) победитель по Кондорсе; это — средний пик профиля u:*

$$\mathsf{CW}(u) = a_m^* \text{ при } u \in \mathcal{U}.$$

Если же n четно, то при каждом $u \in \mathcal{U}$ все кандидаты, расположенные в спектре между двумя средними пиками профиля u (включая сами эти пики), и только они, являются слабыми победителями по Кондорсе:

$$\mathsf{WCW}(u) = \{a \in A: \ a_{m'}^* \leqslant a \leqslant a_{m''}^*\}, \text{ при } u \in \mathcal{U}.$$

Следствие 1. *В случае нечетного n правило $\varphi : \mathcal{U} \to A$, выбирающее победителем при любом профиле $u \in \mathcal{U}$ средний пик: $\varphi(u) = a_m^*$, является сильно правдивым.*

В случае четного n любое правило $\varphi : \mathcal{U} \to A$, выбирающее победителем при любом профиле $u \in \mathcal{U}$ некоторого кандидата, расположенного между двумя средними пиками: $a_{m'}^* \leqslant \varphi(u) \leqslant a_{m''}^*$, является сильно правдивым.

Доказательство. Утверждение сразу следует из предыдущей леммы и из леммы 1. ■

В случае четного числа выборщиков однозначное правило выборов φ можно получить, если указать, что в случае двух различных средних пиков $a^*_{m'}$ и $a^*_{m''}$ выбирается какой-либо кандидат из отрезка спектра между этими двумя пиками, например: самый левый, то есть $a^*_{m'}$; самый правый, то есть $a^*_{m''}$; средний из этого отрезка спектра (если в отрезок спектра попадает четное число кандидатов, то, скажем, правый из двух средних).

2.2. Правдивые правила при структуре множества кандидатов в виде древовидного графа Рассмотрим теперь случай, обобщающий предыдущий. Пусть кандидаты $a \in A$ расположены в вершинах графа G, имеющего вид **дерева**, то есть связного простого графа, не имеющего циклов. Любые две вершины дерева a и b соединяет единственная цепь. Вершины этой цепи, не совпадающие ни с a, ни с b, называются *расположенными между* a и b. *Ветвью* дерева, выходящей из вершины a, называется часть графа, содержащая некоторое ребро, инцидентное вершине a, а также все вершины, лежащие на цепях, начинающихся этим ребром.

Очевидно, что цепь $G = (a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_p)$, соответствующая рассмотренному выше линейному порядку кандидатов, является частным случаем дерева.

Определение 4. Предпочтение u_i назовем *унимодальным* на дереве G, если для кандидата $\widehat{a}_i = \mathrm{top}_i$ и для всех других кандидатов x из того, что y лежит между $\widehat{a}_i$ и x, следует, что $y >_i x$ (то есть чем дальше по некоторой цепи графа от $\widehat{a}_i$ кандидат x, тем ниже стоит он в предпочтении выборщика P_i). Кандидат $\widehat{a}_i$ называется *i-м пиком* профиля u, составленного из предпочтений u_i. Множество всех профилей, составленных из унимодальных предпочтений на графе G, будем называть *областью унимодальных предпочтений* на G и, как выше, обозначать $\mathcal{U}$. ■

Поскольку цепь, соответствующая спектру (линейному порядку) кандидатов, является частным случаем дерева, предпочтение, унимодальное на этой цепи в смысле данного только что определения унимодальности на дереве, является унимодальным на спектре в смысле определения 3, так что применение все того же обозначения $\mathcal{U}$ оправдано.

Дальнейшие наши рассуждения несколько отличаются от тех, что приведены в [2] и [1].

Определение 5. Назовем *средней вершиной* такую вершину графа, удаление которой вместе со смежными ребрами приводит к распадению графа на части, каждая из которых содержит не более $\frac{n}{2}$ пиков. ■

Определение средней вершины, очевидно, можно эквивалентным образом сформулировать так: на любой ветви дерева, выходящей из *средней вершины*, лежит не более половины пиков выборщиков при данном профиле предпочтений.

В случае графа-цепи G, соответствующего спектру кандидатов, средней вершиной при нечетном n служит средний пик, справа и слева от которого лежит по $\frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$ пиков. В случае четного n средними вершинами являются оба средних пика и все вершины между ними. При удалении среднего пика по одну сторону от него остается $\frac{n}{2}$ пиков, а по другую сторону $\frac{n}{2} - 1 < \frac{n}{2}$ пиков[1]. Если же удалена средняя вершина, не являющаяся пиком ни одного выборщика, то и слева, и справа от нее остается ровно $\frac{n}{2}$ пиков.

Замечание 1. Если G — произвольное дерево, то среди средних вершин, в отличие от случая с линейной структурой множества выборщиков, даже при нечетном n не обязательно найдется пик какого-либо выборщика. Рассмотрим в качестве примера граф-клику с $1+3$ вершинами и такой профиль унимодальных предпочтений, что общая для всех ребер вершина a в середине графа не является пиком ни одного выборщика, а все три терминальные вершины b, c, d — это 3 пика трех выборщиков. Тогда вершина a в середине графа является средней вершиной графа при данном профиле (см. рис. 2; пики выборщиков обведены кружочками). См. также ниже пример 1. ∎

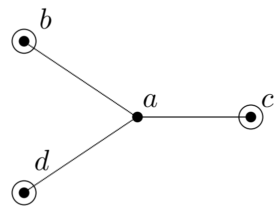

Рис. 2. Граф-клика с одной средней вершиной

Лемма 3. *Средняя вершина существует для любого дерева G и любого унимодального на этом дереве профиля u. При нечетном n средняя вершина единственна.*

Доказательство. Для начала удалим из графа G все терминальные вершины, не являющиеся пиками ни обного из выборщиков (очевидно, их удаление не нарушает связности дерева, в котором остаются все те же n пиков), и повторим эту процедуру до тех пор, пока все терминальные вершины графа не станут пиками.

Теперь рассмотрим любую из вершин графа, скажем, a. Либо ее удаление делит граф на ветви с не более чем $\frac{n}{2}$ пиками, и тогда эта вершина a — искомая средняя вершина графа, либо на какой-то ветви, выходящей из вершины a по какому-либо ребру ab, находится больше чем $\frac{n}{2}$ пиков, причем такая ветвь ровно одна. Продвинемся по этому ребру в смежную вершину b. Позади остается ветвь, на которой не более чем $\frac{n}{2}$ пиков. Та же ветвь, которая начинается ребром ab, распадается на несколько ветвей

[1] Если это был пик только одного выборщика. Если же это пик нескольких выборщиков, то по одну сторону от неко остается не более $\frac{n}{2}$ пиков, а по другую — не более $\frac{n}{2} - 1$ пиков.

(быть может, одну, если степень вершины b равна 2). Если на каждой из этих ветвей не более $\frac{n}{2}$ пиков, то b — средняя вершина; если же нет — продвинемся из b в смежную вершину c, лежащую на той единственной ветви, на которой больше чем $\frac{n}{2}$ пиков; снова позади остается ветвь с не более чем $\frac{n}{2}$ пиками. Действуя так и дальше, получаем цепь $abc\ldots$, которая либо заканчивается средней вершиной на каком-либо шаге, либо мы доходим до терминальной вершины (напомним, что граф конечен и имеет конечное число вершин, так что процесс завершится после конечного числа шагов). Но в последнем случае именно в эту терминальную вершину попадает более $\frac{n}{2}$ пиков, и она-то и будет средней вершиной графа. В любом случае средняя вершина будет найдена.

Единственность средней вершины в случае нечетного n будет доказана ниже; мы выведем этот факт из единственности победителя по Кондорсе. ■

Пример 1. Рассмотрим дерево рис. 3. Пики $\widehat{a}_i$ ($n = 4$, $i = 1, 2, 3, 4$) профиля унимодальных предпочтений обведены кружками. По определению средней вершины, каждая из вершин b, c, d является средней. Заметим, что эти три средние вершины не являются пиками выборщиков.

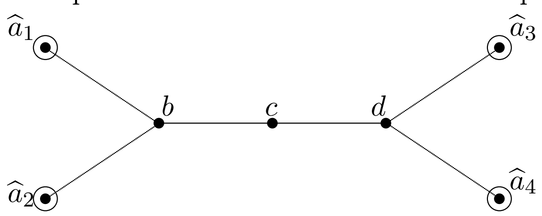

Рис. 3. Граф с тремя средними вершинами

Пусть теперь $n = 6$ и граф изображен на рис. 4. (В вершине a совпали два пика, $\widehat{a}_2$ и $\widehat{a}_3$.) Средними вершинами снова служат b, c и d, но теперь $d = \widehat{a}_5$ — пик одного из выборщиков. ■

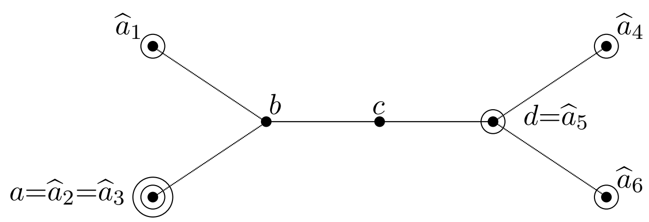

Рис. 4. Граф с тремя средними вершинами, одна из которых — пик

Лемма 4. *Вершина a служит средней вершиной дерева при профиле $u \in \mathcal{U}$ с пиками выборщиков $\widehat{a}_i$ в том и только том случае, если a —*

победитель по Кондорсе при профиле и в случае нечетного n или слабый победитель по Кондорсе при профиле и в случае четного n.

Доказательство. При попарном сравнении кандидата a с любым другим кандидатом x за x против a голосует только часть тех выборщиков P_i, для которых a не лежит на цепи между их собственным пиком $\widehat{a}_i$ и x, то есть на той ветви, выходящей из a, на которой лежат $\widehat{a}_i$ и x. (Все остальные выборщики P_j, очевидно, голосуют за a против x, поскольку a лежит на цепи $x \dots \widehat{a}_j$ и предпочтительнее, чем x, так как ближе к $\widehat{a}_j$.) Но на любой такой выходящей из a ветви, по определению средней вершины, лежит менее (не более, в случае четного n) чем $\frac{n}{2}$ пиков, то есть x получает против a меньше (не больше) половины голосов. Значит, a выигрывает у любого $x \neq a$ более, чем половиной голосов выборщиков P_j и является победителем по Кондорсе в случае нечетного n и не проигрывает, получая не менее, чем половину голосов выборщиков P_j и являясь, тем самым, слабым победителем по Кондорсе, в случае четного n.

Если b — не средняя вершина, это означает, что из b выходит некоторое ребро ba, такое что на части дерева, состоящей из цепей $ba \dots$, лежит более, чем $\frac{n}{2}$ пиков выборщиков. Эти выборщики, составляя строгое большинство, предпочитают кандидата a кандидату b, поскольку b расположен дальше, чем a от их пиков. Значит, кандидат b проигрывает кандидату a при их парном сравнении и $b \notin \mathsf{WCW}(u)$. ■

Поскольку победитель по Кондорсе $\mathsf{CW}(u)$ — единственный, мы в случае нечетного n заодно доказали единственность средней вершины графа при любом унимодальном профиле предпочтений u, завершив тем самым доказательство леммы 3.

При четном n средняя вершина графа, как и слабый победитель по Кондорсе, могут быть не единственными. Тогда выделяется непустое множество средних вершин графа (не обязательно одна), причем слабыми победителями по Кондорсе являются все эти средние вершины. При этом любая вершина, лежащая на цепи между двумя средними вершинами, тоже является средней, что сразу следует из определения средней вершины.

Лемма 5. *Все средние вершины дерева при профиле унимодальных предпочтений образуют цепь. Все вершины этой цепи, кроме, быть может, одной или двух конечных, не могут быть пиками ни одного из выборщиков. Нет ни одного пика также на тех ветвях дерева, которые выходят из всех средних вершин, кроме двух конечных.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что любая средняя вершина имеет не более двух смежных с ней средних вершин[2]. Если это не так, то существует средняя вершина d, имеющая по меньшей мере три (а не 1 или 2) смежные средние вершины a, b и c (см. рис. 5). При удалении вершины a на той части дерева, в которой лежат вершины d, b, c, расположены не более половины, скажем

[2]Смежных со средней вершиной **не** средних вершин может быть сколько угодно.

$x \leqslant \frac{n}{2}$, пиков выборщиков, поскольку a — средняя вершина. Аналогично, $y \leqslant \frac{n}{2}$ и $z \leqslant \frac{n}{2}$, где y и z — число пиков на частях дерева, получающихся при удалении, соответственно, средних вершин b и c и содержащих, соответственно, вершины d, a, c и d, a, b. Пусть $w \geqslant 0$ — число пиков в вершине d и на всех ветвях дерева, выходящих из d и не содержащих вершин a, b, c (если к вершине d примыкает более трех ребер). Тогда, очевидно, $x + y + z - w = 2n$ — каждый пик посчитан ровно два раза. Однако, с другой стороны,

$$x + y + z - w \leqslant x + y + z \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n < 2n.$$

Полученное противоречие доказывает, что число смежных средних вершин средней вершины d не может быть больше двух, то есть средние вершины образуют цепь.

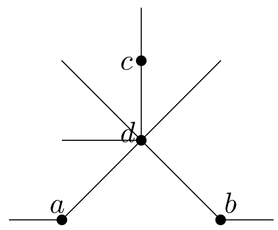

Рис. 5. Расположение вершин в графе при доказательстве леммы 5

Пусть a, b, c — три последовательные вершины этой цепи (см. рис. 6). Покажем, что вершина b не может быть пиком, и ни одного пика нет на выходящих из нее ветвях дерева, не содержащих иных средних вершин, кроме b. Тем самым мы докажем второе утверждение леммы. Рассмотрим получающиеся при удалении вершины b две ветви дерева: содержащую вершину a и содержащую вершину c. Пусть число пиков на этих ветвях соответственно равно x и y. Поскольку b — средняя вершина, выполнены неравенства $x \leqslant \frac{n}{2}$ и $y \leqslant \frac{n}{2}$. Пусть $w \geqslant 0$ — число пиков выборщиков, попадающих в вершину b и на все ветви дерева, выходящие из b, но не проходящие через a и c. Тогда, очевидно, $x + y + w = n$. Удалим среднюю вершину c; на части дерева, содержащей вершины b и a, размещается $w + x \leqslant \frac{n}{2}$ пиков. При удалении средней вершины a получаем, что на части дерева, содержащей вершины b и c, размещается $w + y \leqslant \frac{n}{2}$ пиков. Складывая два последних неравенства, с учетом того что $x + y + w = n$, получаем $x + y + 2w = n + w \leqslant n$. Поскольку $w \geqslant 0$, отсюда следует, что $w = 0$; это завершает доказательство. ■

Пример 2. Рассмотрим первый граф из примера 1 (рис. 3). При попарных сравнениях за кандидата b против c (либо d) голосуют выборщики P_1 и P_2, а за c (либо d) против b голосуют P_3 и P_4; так же поровну делятся

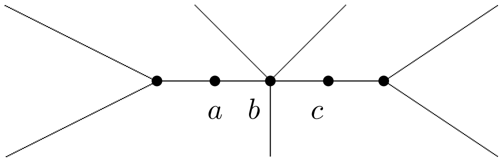

Рис. 6. Средняя вершина b не может быть пиком

голоса при сравнении c и d. Кандидаты $\widehat{a}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, проигрывают при попарном сравнении любому из кандидатов b, c, d со счетом $1 : 3$. Значит, $\mathsf{WCW}(u) = \{b; c; d\}$.

Проверьте, проведя попарные сравнения кандидатов, что в случае второго графа примера 1 (рис. 4) слабыми победителями по Кондорсе также являются кандидаты b, c и d. ■

Теорема 2. *Любое однозначное правило $\varphi : \mathcal{U} \to A$, объявляющее победителем среднюю вершину дерева при профиле $u \in \mathcal{U}$ (или какую-либо из средних вершин в случае четного n), является сильно правдивым на области унимодальных предпочтений на дереве G.*

Доказательство. Согласно лемме 1, правило выборов, объявляющее победителя по Кондорсе (в случае нечетного n) или какого-либо из слабых победителей по Кондорсе (в случае четного n), является сильно правдивым. С учетом результата леммы 4, отсюда сразу следует доказываемое утверждение. ■

В книге [1, с. 364, 382] намечен другой (как мы сейчас увидим, эквивалентный) подход к нахождению средних вершин в графах-деревьях при профиле $u \in \mathcal{U}$ с пиками выборщиков $\widehat{a}_i$. Утверждается, что средние вершины графа (то есть, в соответствии с леммой 4, победители по Кондорсе при нечетном n или слабые победители по Кондорсе при четном n) — это те вершины $a = \widehat{a}$, которые реализуют минимум суммы расстояний от них до пиков выборщиков:

$$M(u) = \min_a \sum_i r(a, \widehat{a}_i) = \sum_i r(\widehat{a}, \widehat{a}_i),$$

где через $r(a, b)$ обозначено расстояние (число ребер графа) между вершинами a и b, а через $M(u)$ — значение минимума суммы расстояний, зависящее от расположения пиков выборщиков при профиле унимодальных предпочтений u.

Пример 3. В случае графов примера 1 нетрудно подсчитать, что $M(u) = 8$ для первого графа и $M(u) = 11$ для второго. ■

Итак, сформулируем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть* $u \in \mathcal{U}$. *Вершина* a *является средней вершиной дерева* G *при профиле* u *с пиками выборщиков* $\widehat{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *тогда и только тогда, когда* a *— это точка минимума функции* $m(a) = \sum\limits_i r(a, \widehat{a}_i)$, *то есть* $m(a) = M(u)$.

Доказательство. Докажем, что если a — точка минимума функции $m(a)$, то a — средняя вершина. Предположив обратное, мы можем найти такую ветвь дерева, выходящую из a, на которой расположено $k > \frac{n}{2}$ пиков профиля u. Пусть b — вершина на этой ветви, смежная с a. Легко подсчитать, что тогда

$$m(b) = m(a) - k + (n - k) = m(a) + n - 2k < m(a),$$

вопреки предположению о минимальности $m(a)$. Значит, все ветви, выходящие из a, содержат не более $\frac{n}{2}$ пиков, то есть a — средняя вершина.

Докажем теперь, что значение $m(a)$ минимально, если a — средняя вершина. Покажем сначала, что a — точка локального минимума функции m на дереве G. Действительно, если a — средняя вершина, то на каждой ветви дерева, выходящей из a, лежит не более $\frac{n}{2}$ пиков, а в самой вершине a и всех остальных ветвях, выходящих из нее, не менее $\frac{n}{2}$ пиков. Точно так же, как в предыдущем абзаце, легко видеть, что перемещение в любую смежную с a вершину b не может привести к уменьшению значения $m(b)$ по сравнению с $m(a)$.

Покажем наконец, что любой локальный минимум функции m равен глобальному, то есть $M(u)$. Если это не так, рассмотрим какую-либо из средних вершин a, в которых достигается минимум на всем графе G, равный $M(u)$, и среднюю вершину b, в которой достигается локальный минимум функции m, равный какому-то числу $m(b) > M(u)$. Соединим a и b цепью $\eta = (a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_s, b = c_{s+1})$ и, двигаясь по цепи, найдем такую вершину c_j, что $m(c_{j+1}) < m(c_j)$. Значит, c_j — не точка локального минимума функции m и, следовательно, не средняя вершина, согласно полученному в предыдущем абзаце. Однако в лемме 5 мы показали, что все вершины цепи η — средние. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

В статье [2] рассмотрен пример построения унимодальных предпочтений на дереве в случае, когда заданы произвольные, не обязательно единичные, длины ребер графа $(x; y)$, равные $d(x; y) > 0$ (такой граф называется *нагруженным*); при этом предполагается, что между любой вершиной a и различными $x \neq a$ различны расстояния

$$r(a; x) = \sum_{k=0}^{s-1} d(y_k; y_{k+1}), \tag{2}$$

посчитанные по (единственной) цепи $(a = y_0, y_1, \ldots, y_s = x)$, соединяющей a с x: $r(a; x) \neq r(a; y)$ при $x \neq y$. Эти расстояния дают выборщику P_i, каков бы ни был его пик $\widehat{a}_i = a$, возможность ранжировать кандидатуры: предпочтительность кандидатуры убывает по мере увеличения расстояния до пика и никакие две кандидатуры не имеют одинаковой предпочтительности. Полученные таким образом предпочтения унимодальны на дереве G. Обозначим через R множество предпочтений, построенных по фиксированному набору длин ребер дерева $\{d(x; y)\}$ и рассмотрим область унимодальных предпочтений $\mathcal{R} = R^n$. Утверждение теоремы 3 с минимальными изменениями в доказательстве переносится на случай области $\mathcal{R}$ вместо области всех унимодальных предпочтений $\mathcal{U}$. А именно, имеет место

Теорема 4. *Пусть $u \in \mathcal{R}$. Вершина a является средней вершиной дерева G при профиле u с пиками выборщиков $\widehat{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, тогда и только тогда, когда a — это точка минимума функции $m(a) = \sum\limits_i r(a, \widehat{a}_i)$, где расстояния $r(a, x)$ задаются формулой* (2). ■

Замечание 2. В статье [2] получен также интересный результат, связанный с иным подходом к понятию унимодальности предпочтений. А именно, множество предпочтений $D \subset L(A)$ называется *унимодальным*, если из любых трех (несовпадающих) кандидатур $a, b, c \in A$ имеется одна, которая не является худшей (из этих трех) ни в каком предпочтении $u_i \in D$.

Это определение не связано ни с каким графом, но мотивируется тем, что для предпочтений, унимодальных на спектре, постулируемое свойство действительно выполнено: если $a < b < c$, то либо 1) b — i-й пик, либо 2) a и b или b и c лежат по одну сторону от i-го пика. В первом случае b — лучшая из трех кандидатур для выборщика P_i, во втором — либо $b >_i a$, если a и b лежат по одну сторону от пика, либо $b >_i c$, если b и c лежат по одну сторону от пика, так что для любого предпочтения u_i кандидатура b не худшая из трех.

Примером [2, с. 393] унимодального множества предпочтений, не сводящегося к некоторому подмножеству области унимодальных предпочтений на спектре, служит такое множество предпочтений для 4 кандидатов a, b, c, d:

$$\begin{aligned} D = \{&a >_i b >_i c >_i d;\\ &a >_i c >_i b >_i d;\\ &a >_i c >_i d >_i b;\\ &a >_i d >_i c >_i b\}. \end{aligned}$$

Легко увидеть, рассмотрев всевозможные спектры из 4 кандидатур a, b, c, d, что ни для какого спектра все линейные порядки из D не являются одновременно унимодальными.

В [2, теорема 1] доказано, что для любого унимодального множества предпочтений D можно найти такое дерево G, что набор профилей D^n совпадет с областью $\mathcal{U}$ унимодальных предпочтений на дереве G.

Заметим, что пример дерева рис. 2 показывает, что понятие унимодальных предпочтений на некоторых деревьях шире, чем понятие унимодального множества предпочтений в рассмотренном только что смысле. Если в качестве тройки кандидатур взяты терминальные вершины b, c, d рис. 2, то каждая из этих кандидатур может быть худшей для некоторого из унимодальных предпочтений $u_i \in \mathcal{U}$. ■

Список литературы

1. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
2. *Demange G.* Single peaked orders on a tree // Mathematical social sciences. – 1982. – № 3. – P. 389–396.
3. *Moulin H.* Axioms of cooperative decision making. – Cambridge University Press. – 1988. – 360 p.