Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 29 – 58.

УДК 517.5

В. С. Колесников[1]

Условия ограниченности и неограниченности снизу тригонометрических полиномов наилучшего приближения в среднем

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, равномерно ограничены, тригонометрические полиномы, наилучшего приближения.

Даются условия равномерной ограниченности и неограниченности снизу тригонометрических полиномов наилучшего приближения в среднем для функций с трижды монотонными коэффициентами Фурье.

We consider trigonometric polinoms of best approximation on the average for the functions, which Fourier coefficients are thrice-monotonic; we offer conditions of uniform boundness and boundless below for them.

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}, \ldots$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \qquad (1)$$

Далее, пусть $T_n(f;x;p)$ — тригонометрические полиномы наилучшего приближения в метрике пространства L^p; в частности,

$$T_n(f;x) = T_n(f;x;1) \text{ и } S_n(f;x) = T_n(f;x;2).$$

Будем говорить, что полиномы $T_n(f;x;p)$ *равномерно ограничены снизу*, если существует такая постоянная C, что $T_n(f;x;p) \geq C$ при всех действительных x и целых $n \geq 0$. Далее, условимся обозначать $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^i a_k = \Delta^{i-1} a_k - \Delta^{i-1} a_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$.

Будем называть последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *q-монотонной*, если все разности, до q-го порядка включительно, неотрицательны: $\Delta^i a_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, \ldots, q$. Для удобства выражения иногда вместо «3-монотонная» будем писать «трижды монотонная», и т. д., 2-монотонную последовательность принято называть *выпуклой.* Для n-монотонности последовательности достаточно потребовать только ее стремление к нулю и неотрицательность всех n-х разностей. Очевидно, что достаточно потребовать только неотрицательность всех n-х разностей.

А. С. Беловым доказано (см.[1, следствие 9]), что если последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает и

$$a_n = O\left(n^{-1}\right) \text{ при } n \to \infty,$$

[1]Шуйский государственный педагогический университет;
E-mail: vswheell@.mail.ru.

то $T_n(f;x;2) = S_n(f;\,x)$ равномерно ограничены снизу.

Также в [2, теорема 6] доказано, что показатель -1 в этом равенстве нельзя заменить на больший, т. е. для любого $-1 < \delta < 0$ существует невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая, что

$$a_n = O\left(n^{\delta}\right) \text{ при } n \to \infty,$$

но $T_n(f;x;2) = S_n(f;\,x)$ не являются равномерно ограниченными снизу.

Этот результат также будет иметь место (см. [3]), если на последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ наложить условия

$$\Delta^j a_n > 0 \text{ при всех } j \geq 1, n \geq 0.$$

В § 2 эти результаты обобщаются при $j \leq 3$ на случай $p = 1$, т. е. для $T_n(f;x;1) = T_n(f;x)$. Однако, между случаями $p = 2$ и $p = 1$ имеется существенное различие. Это показывает следующая

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел и выполнены условия*

$$\Delta a_n > 0,\ \Delta^2 a_n > 0,\ \Delta^3 a_n > 0,\ \Delta^4 a_n > 0,\ n = 0,\,1,\,\ldots.$$

Тогда полиномы $T_n(f;x)$ равномерно ограничены снизу.

А. С. Беловым в [1] доказано, что если $a_n \downarrow 0$, то имеет место следующий результат.

Если частичные суммы ряда (1) ограничены снизу в точках $\frac{3\pi}{2n}$, т. е. последовательность $S_n(f;\,\frac{3\pi}{2n})$ ограничена снизу, то частичные суммы $S_n(f;\,x)$ равномерно ограничены снизу, т. е. существует такая константа C, что $S_n(f;\,x) \geq C\ \forall x$.

Для полиномов $T_n(f;\,x)$ справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого $\alpha > 0$, $\alpha \neq \alpha_0$, $\alpha_0 = 0.985..$, которое будет определено ниже, существует такая функция $f(x)$ вида* (1), *что последовательность $\{T_n(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, но последовательность $\{T_n(f;\,\frac{2\pi\alpha_0}{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена снизу.*

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0, 2\pi)$, то полиномы наилучшего приближения $T_n(f;x)$ единственны (см. [5, с. 452–454]).

Б. Надь (1938 г., см. [7]) доказал, что если коэффициенты Фурье a_k, $0 \leq k < \infty$, четной 2π-периодической функции $f(x)$ образуют неотрицательную трижды монотонную стремящуюся к нулю последовательность, то коэффициенты a_k^n полиномов

$$T_n(f;x) = \frac{a_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^n \cos kx$$

вычисляются по формулам:

$$a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (a_{k+2l(n+1)} - a_{-k+(2l+2)(n+1)}),\quad k = 0,\,\ldots,\,n,\ n \in \mathbf{N} \qquad (2)$$

(см. также [6, с. 92]). Отсюда следуют формулы

$$\Delta^i a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} \Big((-1)^l \Delta^i a_{k+2l(n+1)} + (-1)^{l+i+1} \Delta^i a_{-(k+i)+(2l+2)(n+1)}\Big), \qquad (3)$$

где $i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 0,\ \ldots,\ n-i;\ n \in \mathbf{N}$.

Из (2) следуют формулы

$$\begin{aligned} a_n^n = \sum_{l=0}^{\infty} \big(\Delta a_{n+4l(n+1)} + \Delta a_{n+1+4l(n+1)} - \\ - \Delta a_{3n+2+4l(n+1)} - \Delta a_{3n+3+4l(n+1)}\big) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{3n+1} \Delta^2 a_{i+4l(n+1)} + \sum_{i=n+1}^{3n+2} \Delta^2 a_{i+4l(n+1)} \right), \quad n \in \mathbf{N}, \end{aligned} \qquad (4)$$

а из (3) и (2) —

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{j=k+2l(n+1)}^{-(k+3)+2(l+1)(n+1)} \Delta^3 a_j = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{j=k+4l(n+1)}^{-(k+3)+(4l+2)(n+1)} \Delta^3 a_j - \sum_{j=k+(4l+2)(n+1)}^{-(k+3)+(4l+4)(n+1)} \Delta^3 a_j \right] \end{aligned} \qquad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta a_{n-1}^n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (\Delta a_{n-1+2l(n+1)} + \Delta a_{-n+(2l+2)(n+1)}) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{i=4l(n+1)}^{4l(n+1)+2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n-1+i} + \sum_{i=4l(n+1)}^{4l(n+1)+2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n+2+i} \right]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Применив дважды преобразование Абеля к сумме (1), будем иметь

$$\begin{aligned} T_n(f;\, x) = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k^n \frac{\sin^2\left(\frac{k+1}{2}\, x\right)}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} + \Delta a_{n-1}^n \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\, x\right)}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} + \\ + a_n^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} = L_n(x) + M_n(x) + N_n(x). \end{aligned} \qquad (7)$$

Докажем сначала, что функции $N_n(x)$ равномерно ограничены снизу. Действительно, из (5) следует что

$$a_n^n \le 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=n}^{3n+1} \Delta^2 a_{i+4l(n+1)} \le \sum_{i=n}^{\infty} \Delta^2 a_i = 2\Delta a_n.$$

Тогда

$$N_n(x) = a_n^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \geq a_n^n\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) \geq -8\frac{n}{2}\Delta a_n. \qquad (8)$$

Но, так как Δa_k не возрастают, то

$$a_{\left[\frac{n}{2}\right]} = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \Delta a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta a_k \geq \frac{n}{2}\Delta a_n.$$

Отсюда и из (8) следует

$$N_n(x) \geq -8a_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \qquad (9)$$

т. е. $N_n(x)$ равномерно ограничены снизу.

Далее, из формул (5) следует, что

$$\Delta^2 a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{-(k+3)+2(n+1)} \left(\Delta^3 a_{i+4l(n+1)} - a_{i+(4l+2)(n+1)}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{-(k+3)+2(n+1)} \sum_{j=0}^{2n+1} \Delta^4 a_{i+j+4l(n+1)} \geq 0.$$

Значит, $L_n(x) \geq 0$. Неотрицательность же функции $M_n(x)$ следует из формул (6). Теорема 1 доказана.

Прежде чем доказывать теорему 2, приведем краткое описание построения соответствующего примера, и дадим доказательство ряда лемм, необходимых для ее доказательства.

Пусть s_0 — константа, большая чем $10^9 \cdot \alpha^4$, зависящая только от α, которое мы будем подбирать в ходе доказательства. Пусть s — натуральное число такое, что $s \geq s_0$ и $\gamma \in (2,3)$. Пусть $b_k = \frac{1}{k^\gamma}$, при $k = 3s^m$, $m = 1, 2, \ldots$, и $b_k = 0$ при остальных целых неотрицательных k. Тогда для любого k ряды $b_k^* = \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$, $b_k^{**} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i^* = \sum\limits_{i=k}^{\infty}(i+1-k)b_i$ и $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i^{**} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2}(i-k+2)(i-k+1)b_i$ сходятся.

Положим $a_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i^{**}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть та последовательность, которая удовлетворяет условиям теоремы 2 при некоторых γ и s. Действительно, пусть $3s^{m-1} \leq k \leq 3s^m$. Тогда

$$\Delta^2 a_k = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta^3 a_i = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma j}} = \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1}, \qquad (10)$$

$$\Delta a_k = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta^2 a_i = (3s^m - k)\Delta^2 a_{3s^m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(3s^j - 3s^{j-1}\right) \Delta^2 a_{3s^j} =$$

$$= (3s^m - k)\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}} \cdot \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} + 3 \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(s^j - s^{j-1}\right) \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma j}} \cdot \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} \le$$

$$\le \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} \cdot \frac{1}{3^\gamma} \left[\frac{3s^m}{s^{\gamma m}} + 3 \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{s^{j(\gamma-1)}}\right] =$$

$$= \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} \cdot \frac{1}{3^{(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{s^{m(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{s^{(\gamma-1)}}} = M\frac{1}{s^{m(\gamma-1)}},$$

где $M = \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} \cdot \frac{s^{\gamma-1}}{s^{\gamma-1}-1} \cdot \frac{1}{3^{(\gamma-1)}}$,

$$a_k = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta a_i \le M \sum_{j=m}^{\infty} 3s^j \frac{1}{s^{j(\gamma-1)}} = M\frac{3s^m}{s^{m(\gamma-1)}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s^{\gamma-2}}\right)^j =$$

$$= M\frac{3}{s^{m(\gamma-2)}} \sim \frac{1}{s^{m(\gamma-2)}} \to 0$$

при $k \to \infty$, а значит, и $m \to \infty$.

Далее, пусть $s^m \le n+1 \le s^{m+1}$. Положим $\lambda = \frac{n+1}{s^m}$. Тогда $1 \le \lambda \le s$.

Для доказательства теоремы 2 потребуется несколько лемм.

Суть в том, что для оценки полинома $T_n(f;x)$ будем разбивать сумму в (7) на части и в каждой из них пользоваться своими оценками коэффициентов $\Delta^2 a_k$. Леммы 1, 2, 3 и 4 содержат эти оценки. Остальные леммы содержат вспомогательные утверждения, которые применяются при доказательстве теоремы.

В дальнейшем будем считать величины θ, θ_k, θ', θ'', θ''', θ'_k, θ''_k, $k = 0, \ldots$ (если это не оговаривается ниже) по модулю не превосходящими 1.

Лемма 1. *Если $3s^{i-1} < k \le 3s^i$, $i = 1, \ldots, m-1$, то*

$$\Delta^2 a_k^n = \Delta^3 a_{3s^i} \left(1 + \frac{\theta_k}{s^\gamma - 1}\right) = \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma i}} \left(1 + \frac{\theta_k}{s^\gamma - 1}\right);$$

а если еще и $\lambda \ge 3$, то это равенство верно и при $i = m$.

Доказательство. Так как при $i \le m-1$ будет

$$k \le 3s^i \le 3s^{m-1} < n+1 \le -(k+3) + 2(n+1)$$

и $\Delta^3 a_{3s^i}$ — геометрическая прогрессия, то из (5) следует, что найдутся такие ν_j, $\nu_j \in \{0, 1, -1\}$, $j \in \mathbf{N}$, что

$$\Delta^2 a_k^n = \Delta^3 a_{3s^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \Delta^3 a_{3s^{i+j}} =$$

$$= \Delta^3 a_{3s^i} \left(1 + \theta_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s^{j\gamma}}\right) = \Delta^3 a_{3s^i} \left(1 + \frac{\theta_k}{s^\gamma - 1}\right),$$

где $|\theta_k| \le 1$. Если $\lambda \ge 3$, то $k < 3s^m \le \lambda s^m \le n+1 \le -(k+3)+2(n+1)$, и аналогично $\Delta^2 a_k^n = \Delta^3 a_{3s^m}\left(1+\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}\right)$, где $|\theta_k| \le 1$. ■

Лемма 2. *Пусть* $\lambda \in \left[1, \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)\right]$.

1. *Если* $3s^{m-1}+1 \le k \le 3s^m - 2(n+1) - 3$, *то*

$$\Delta^2 a_k^n = -\Delta^3 a_{3s^m}\left(1+\frac{\theta_k}{s_\gamma - 1}\right) = -\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1+\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}\right);$$

а если $k = 3s^m - 2(n+1) - 2, \ldots, 3s^m - 2(n+1)$, *то*

$$\Delta^2 a_k^n = \frac{\theta_k^*}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1+\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}\right).$$

2. *Если* $3s^m - 2(n+1) < k \le n-2$, *то*

$$\Delta^2 a_k^n = \Delta^3 a_{3s^m}\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}.$$

Доказательство. В условиях п. 1 имеем

$$\begin{aligned} k+2(n+1) \le 3s^m - 2(n+1) + 2(n+1) = 3s^m \le \\ \le s^m(6\lambda-3) = 4\lambda s^m + 2\lambda s^m - 3s^m \le 4(n+1) - (k+3), \end{aligned}$$

и из (8) так же, как при доказательстве леммы 1, следует заключение п. 1.

В условиях п. 2

$$-(k+3)+2(n+1) < 2(n+1) = 2\lambda s^m \le 3s^m < k + 2(n+1).$$

Следовательно, сумма (5) не содержит $\Delta^3 a_{3s^m}$. Далее, так же, как при доказательстве леммы 1, доказывается п. 2. ■

Лемма 3. *Пусть* $\lambda \in \left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right), \frac{3}{2}\right]$ *и* $3s^{m-1} < k \le n-2$. *Тогда*

$$\Delta^2 a_k^n = \Delta^3 a_{3s^m}\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}.$$

Доказательство. Из неравенств

$$k+2(n+1) > 3s^{m-1} + 2\lambda s^m \ge 3s^{m-1} + 2\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)s^m = 3s^m,$$

$$-(k+3)+2(n+1) < 2(n+1) = 2\lambda s^m \le 2\frac{3}{2}s^m = 3s^m$$

и (5) так же, как и в п. 2 леммы 2, следует заключение леммы 3. ■

Лемма 4. *Для всех* $\lambda \in \left[\frac{3}{2}, s\right]$ *и* $k = 1, 2, \ldots, n-2$

$$\Delta^2 a_k^n \ge -\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}}\left(1+\frac{1}{s^\gamma-1}\right).$$

Доказательство. Заключение леммы 4 следует из неравенств

$$3s^m = \frac{3}{2}2s^m \leq \lambda 2s^m = 2(n+1) < k + 2(n+1)$$

и (5). ∎

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения.*
1. *Если* $1 \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$, *то*

$$\Delta a_{n-1}^n = \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}} \left[3 - \lambda + \frac{8\theta'}{s^{\gamma-1}}\right], \quad |\theta'| < 1.$$

2. *Если* $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right) \leq \lambda \leq s$, *то*

$$\Delta a_{n-1}^n \geq \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}} \left[2\lambda - \frac{8s}{s^{\gamma-1}}\right].$$

Доказательство. Неравенство $1 \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$ обеспечивает неравенство $2(n+1) = 2\lambda s^m \leq 2 \cdot \frac{3}{2}s^m = 3s^m \leq 3(n+1)$, и тогда, используя (6) и (10), видим, что найдется такое θ_1', $|\theta_1'| \leq 1$,

$$\Delta a_{n-1}^n = \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n-1+i} + \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n+2+i} + \theta_1' 2 \sum_{i=4(n+1)}^{\infty} \Delta^2 a_{n-1+i} =$$
$$= \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1}(3s^m - n + 2) + \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1}(3s^m - n - 1) +$$
$$+ 2\theta_1' \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma i}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1}(3s^i - 3s^{i-1}). \quad (11)$$

Но так как

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{s^{\gamma i}}(s^i - s^{i-1}) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{s^{(\gamma-1)i}} = \frac{1}{s^{(\gamma-1)(m+1)}} \frac{1}{1 - \frac{1}{s^{\gamma-1}}},$$

то из (11) следует, что

$$\Delta a_{n-1}^n = 2\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right)(3s^m - (n+1)) + 3\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right) +$$
$$+ \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right) 3\theta_1' \frac{1}{s^{\gamma-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{s^{\gamma-1}}} =$$
$$= \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right)\left[3 - \lambda + \frac{3\theta_2'}{s^{\gamma-1}} + \frac{3}{2}\right] = \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[3 - \lambda + \frac{8\theta'}{s^{\gamma-1}}\right].$$

Первое утверждение доказано.

Неравенство $\frac{3s}{4} \leq \lambda \leq s$ обеспечивает неравенство

$$3(n+1) \leq 3s^{m+1} \leq 4(n+1),$$

и следовательно,

$$\Delta a_{n-1}^n = \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n-1+i} + \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta^2 a_{n+2+i} + \theta_3' 2 \sum_{i=4(n+1)}^{\infty} \Delta^2 a_{n-1+i} =$$

$$= \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} 2 \cdot 2(n+1) + 2\theta_3' \sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma i}} \frac{s^\gamma}{s^\gamma - 1} (3s^i - 3s^{i-1}) =$$

$$= \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}} \left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right) \left[2\lambda + \frac{4\theta_4' s}{s^{\gamma-1}}\right] \geq$$

$$\geq \frac{2s^m}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}} \left[2\lambda - \frac{8s}{s^{\gamma-1}}\right]$$

при $m > 2$. Из неравенства $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right) \leq \lambda \leq \frac{3s}{4}$ следует неравенство $3s^{m+1} \geq 4(n+1)$ и, следовательно, найдется такое $\theta_5' > 0$, $|\theta_5'| \leq 1$, что

$$\Delta a_{n-1}^n = \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta a_{n-1+i} + \sum_{i=0}^{2(n+1)-1} \Delta a_{n+2+i} + \theta_5' 2 \sum_{i=4(n+1)}^{\infty} \Delta a_{n-1+i} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}} 4\lambda s^m.$$

Второе утверждение доказано. ■

Лемма 6. 1. *При* $\lambda \geq 12\alpha > 0$ *имеет место неравенство*

$$3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \geq \frac{18\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{20} \frac{6^2\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\right).$$

2. *При любом* $\lambda \in [1, s]$ *верно неравенство*

$$0 \leq 3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \leq 5.$$

Доказательство. Так как при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ряд Тейлора функции $\sin x$ в нуле есть ряд типа Лейбница, то имеет место неравенство

$$3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \geq 3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \frac{6\pi\alpha}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \frac{6^3\pi^3\alpha^3}{\lambda^3} - \frac{1}{120} \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \frac{6^5\pi^5\alpha^5}{\lambda^5} =$$

$$= \frac{18\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{20} \frac{6^2\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\right).$$

Пункт 1 доказан.

Если $\lambda < 12\alpha$, то нижняя оценка в пункте 2 следует из неравенства

$$3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \geq 3 - \frac{12\alpha}{2\pi\alpha} = 3 - \frac{6}{\pi} > 0$$

и пункта 1.

Докажем верхнюю оценку в пункте 2. Если $\lambda < 12\alpha$, то

$$3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \leq 3 + \frac{12\alpha}{2\pi\alpha} = 3 + \frac{6}{\pi} \leq 5.$$

В случае же $\lambda \geq 12\alpha$ справедливо неравенство

$$3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda} \leq 3 - 3 + \frac{1}{6}\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\frac{6^3\pi^3\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{18\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} \leq \frac{18\pi^2\alpha^2}{12^2\alpha^2} < 2 < 5.$$

Неравенство пункта 2 доказано. ■

Лемма 7. *Для любого* $\alpha \geq 0.75$ *справедливо неравенство*

$$0.59\alpha^2 > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) - 4\sin^2\pi\alpha + 0.005.$$

Доказательство. Докажем сначала это неравенство для $\alpha \in [0.75, 0.95]$. Для этого достаточно доказать неравенство

$$q(\alpha) = 0.59\alpha^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\pi\alpha}\right) + 4\sin^2\pi(1-\alpha) - 0.005 > 0.$$

Так как

$$q'(\alpha) = 1.18\alpha + \frac{1}{4\pi\alpha^2} - 4\pi\sin 2\pi(1-\alpha) <$$

$$< 1.18 \cdot 0.95 + 0.0882 - 4\pi\frac{2}{\pi}2\pi \cdot 0.05 < 1.121 + 0.0882 - 1.256 < -0.04 < 0,$$

то на отрезке $[0.75, 0.95]$ справедливо неравенство

$$q(\alpha) \geq q(0.95) > 0.532 + 0.097 - 0.584 - 0.005 = 0.04 > 0.$$

Пусть теперь $0.95 \leq \alpha \leq 1$. Доказываемое неравенство перепишем в следующем виде

$$0.59\alpha^2 + 4\sin^2\pi(1-\alpha) > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\pi(1-\alpha)}{2\pi\alpha}\right) + 0.005.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно доказать следующее неравенство

$$0.59\alpha^2 > \frac{1}{2\alpha} + 0.005$$

или

$$p(\alpha) = 0.59\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha} - 0.005 > 0.$$

Действительно,

$$p'(\alpha) = 1.18\alpha + \frac{1}{2\alpha^2} > 0.$$

Следовательно, минимум функции $p(\alpha)$ на отрезке $[0.95; 1]$ достигается в точке $\alpha = 0.95$, т. е.

$$p(\alpha) \ge p(0.95) = 0.59 \cdot 0.95^2 - \frac{1}{2 \cdot 0.95} - 0.005 > 0.532 - 0.527 - 0.005 = 0.$$

Этим неравенство леммы доказано в случае $0.95 \le \alpha \le 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда $1 < \alpha \le 1.5$. В этом случае неравенство леммы перепишем в следующем виде

$$0.59\alpha^2 + 4\sin^2\left(\pi(\alpha - 1)\right) > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin\left(2\pi(\alpha-1)\right)}{2\pi\alpha}\right) + 0.005,$$

которое верно, так как

$$0.59\alpha^2 - 0.5 - 0.005 > 0.59 - 0.5 - 0.005 = 0.085 > 0.$$

Если же $1.5 < \alpha$, то неравенство леммы следует из неравенств

$$0.59 \cdot 1.5^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\pi \cdot 1.5}\right) - 0.005 > 0.$$

■

Лемма 8. 1. *При всех $k_1 = 0, 1, \ldots, n-2$ и $k_2 = 0, 1, \ldots, n-2$, $k_1 \le k_2$ верно равенство*

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[k_2 - k_1 - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{2k_2\pi\alpha}{n+1} - \sin\frac{2k_1\pi\alpha}{n+1}\right)\right] + 10\tilde{\theta}\alpha,$$

при $n \to \infty$ равномерно по k_1 и k_2.

2. *Если $k_2 \le \frac{n+1}{2\alpha}$, то*

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[k_2 - k_1 - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{2k_2\pi\alpha}{n+1} - \sin\frac{2k_1\pi\alpha}{n+1}\right)\right] + 2\theta''\left(\frac{\pi\alpha k_2}{n+1}\right)^2,$$

где $|\theta''| \le 1$.

Доказательство. Пусть сначала $k_2 \le \frac{n+1}{2\alpha}$. Тогда

$$\sin^2\left(\frac{(k_2+1)\pi\alpha}{n+1}\right) + \int_{k_1-1}^{k_2-1} \sin^2\left(\frac{(t+1)\pi\alpha}{n+1}\right)dt \le \\ \le \sum_{k=k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) \le \int_{k_1-1}^{k_2-1} \sin^2\left(\frac{(t+1)\pi\alpha}{n+1}\right)dt - \sin^2\left(\frac{k_1\pi\alpha}{n+1}\right),$$

т. к. функция $\sin x$ монотонна на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = \int_{k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{t\pi\alpha}{n+1}\right)dt + \theta_6' \sin^2\left(\frac{(k_2+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= \int_{k_1}^{k_2} \sin^2\left(\frac{t\pi\alpha}{n+1}\right)dt + 2\theta''\left(\frac{k_2\pi\alpha}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\sin\frac{2t\pi\alpha}{n+1}\right]\Bigg|_{k_1}^{k_2} + 2\theta''\left(\frac{k_2\pi\alpha}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[k_2 - k_1 - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{2k_2\pi\alpha}{n+1} - \sin\frac{2k_1\pi\alpha}{n+1}\right)\right] + 2\theta''\left(\frac{k_2\pi\alpha}{n+1}\right)^2.$$

Пункт 2 леммы 8 доказан.

Если же $k_2 \geq \frac{n+1}{2\alpha}$, то разбив отрезок $[k_1, k_2]$ на интервалы монотонности функции $\sin^2\left(\frac{t\pi\alpha}{n+1}\right)$ (их будет не более 2α), применяя доказательство пункта 2 к каждому из этих интервалов и суммируя соответствующие этим интервалам суммы, получим пункт 1. ■

Лемма 9. *Для $i \leq m-1$ верно следующее равенство*

$$\sum_{k=3s^{i-1}+1}^{3s^i} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = 9\pi^2\alpha^2\frac{s^{3i}}{\lambda^2 s^{2m}}\left(1 + \theta'''\frac{22\alpha^2}{s}\right).$$

Доказательство. Действительно, условие

$$\frac{3s^i\pi\alpha}{n+1} < \frac{\pi}{2}$$

эквивалентно условию $6\alpha < \lambda\frac{s^m}{s^i}$ и выполнено при $s > s_0 > 6\alpha$, так как $i \leq m-1$ и $\lambda \geq 1$. Тогда, применив лемму 8, п 2, получим

$$\sum_{k=3s^{i-1}+1}^{3s^i} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=3s^{i-1}}^{3s^i} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) - \sin^2\left(\frac{(3s^{i-1}+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3s^i - 3s^{i-1} - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{6s^i\pi\alpha}{n+1} - \sin\frac{6s^{i-1}\pi\alpha}{n+1}\right)\right] +$$

$$+ 2\theta_i''\left(\frac{3s^i\pi\alpha}{n+1}\right)^2 + \theta\frac{(3s^{i-1}+1)^2\pi^2\alpha^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3s^i - 3s^{i-1} - 3s^i + \frac{n+1}{2\pi\alpha}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{6s^i\pi\alpha}{n+1}\right)^3 - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{6s^i\pi\alpha}{n+1}\right)^5\theta_8' + \right.$$

$$\left. + 3s^{i-1} - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{6s^{i-1}\pi\alpha}{n+1}\right)^3\theta_9'\right] + \theta_i''\frac{3\cdot 3^2 s^{2i}\pi^2\alpha^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2\pi\alpha}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{6s^i\pi\alpha}{n+1}\right)^3\left(1 - \theta_8'\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{2^2 3^2 s^{2i}\pi^2\alpha^2}{\lambda^2 s^{2m}} - \frac{\theta_9'}{s^3}\right) + \theta_i''\frac{27s^{2i}\pi^2\alpha^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{9s^{3i}\pi^2\alpha^2}{(n+1)^2}\left(1 - \frac{18\alpha^2\theta_{10}'}{s^2} - \frac{\theta_9'}{s^3} + \theta''\frac{3}{s^i}\right) = \frac{9s^{3i}\pi^2\alpha^2}{\lambda^2 s^{2m}}\left(1 + \theta_i'''\frac{22\alpha^2}{s}\right).$$

■

Лемма 10. *Пусть* $1 \le \lambda \le \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)$. *Тогда*

$$\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m-2(n+1)} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}s^m\left[3 - 2\lambda - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha(\frac{3}{\lambda} - 2)\right) + \theta_{12}'\frac{400\alpha^2}{s^3}\right].$$

<u>Доказательство</u>. По лемме 8, п. 1, и неравенству $\frac{24\alpha}{s^m} < \frac{40\alpha^2}{s^3}$, $m \ge 4$, получаем

$$\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m-2(n+1)} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=3s^{m-1}}^{3s^m-2(n+1)} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) - \sin^2\left(\frac{(3s^{m-1}+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3s^m - 2(n+1) - 3s^{m-1} - \frac{n+1}{2\pi\alpha}\sin\left(\frac{2\pi\alpha(3s^m - 2(n+1))}{n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + 3s^{m-1} - \theta_{11}'\frac{1}{6}\frac{2^2\pi^2\alpha^2 s^{3m}3^3}{(n+1)^2 s^3}\right] + \frac{1}{2}s^m\frac{2\cdot 12\tilde{\theta}\alpha}{s^m} =$$

$$= \frac{1}{2}s^m\left[3 - 2\lambda - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha(\frac{3}{\lambda} - 2)\right) + \theta_{12}'\frac{400\alpha^2}{s^3}\right],$$

где $|\theta_{12}'| \le 1$. ■

В дальнейшем нам понадобится функция

$$g(\lambda,\alpha)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\right]-\right.$$
$$\left.-2(3-\lambda)\sin^2\left(\pi(1-\alpha)\right)\right].$$

Лемма 11. *Имеет место равенство*

$$K_0=\max_{\lambda\in[1,\,3/2],\,\alpha\in[0.75,\,\infty]}g(\lambda,\alpha)=0.59\ldots,$$

причем этот максимум достигается в квадрате

$$\lambda\in[1,\,3/2],\quad \alpha\in[0.75,\,1.25]$$

в единственной точке $(\lambda_0,\,\alpha_0)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0^*=1.0861,\ \ \alpha_0^*=0.985$. Очевидно, что

$$\max_{\lambda\in[1,\,3/2],\,\alpha\in[0.75,\,\infty]}g(\lambda,\alpha)\geq g(\lambda_0^*,\alpha_0^*)\geq 0.599.$$

Прежде всего покажем, что максимум функции $g(\lambda,\alpha)$ в области $\{(\lambda,\alpha):\ \lambda\in[1,\,3/2],\,\alpha\in[0.75,\,\infty]\}$ не достигается в области

$$\{(\lambda,\alpha):\ \lambda\in[1,\,3/2],\ \alpha\in[1.25,\,\infty]\},$$

и стало быть достигается в прямоугольнике

$$D=\{(\lambda,\alpha):\ \lambda\in[1,\,3/2],\ \alpha\in[0.75,\,1.25]\}.$$

Действительно, при $1.25\leq\alpha\leq 1.75$ верно неравенство

$$g(\lambda,\alpha)\leq\frac{1.5^2}{1.25^2}\left[\frac{1}{2}\left[3-2+\frac{1.5}{2\pi\cdot 1.25}\right]-2(3-1.5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\leq$$
$$\leq 1.44\cdot[0.595-1.5]<0,$$

а при $\alpha\geq 1.75$ — неравенство

$$g(\lambda,\alpha)\leq\frac{1.5^2}{1.75^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[3-2+\frac{1.5}{2\pi\cdot 1.75}\right]\leq 0.43<0.599<g(\lambda_0^*,\alpha_0^*)<K_0.$$

Для доказательства того, что функция $g(\lambda,\alpha)$ достигает своего максимума в прямоугольнике $\{(\lambda,\alpha):\ \lambda\in[1,\,3/2],\ \alpha\in[0.75,\,1.25]\}$ в единственной точке, докажем, что 1) квадратичная форма d^2g отрицательно определена в прямоугольнике $D_0=\{(\lambda,\alpha):\ 1.05\leq\lambda\leq 1.1,\ 0.95\leq\alpha\leq 1\}$, и стало быть $g(\lambda,\alpha)$ достигает максимума в D_0 не более чем в одной точке, 2) в области $D\setminus D_0$ функция $g(\lambda,\alpha)$ меньше 0.59. Для этого докажем, что в D_0 будет $g''_{\lambda\lambda}<0$ и $\Delta=g''_{\lambda\lambda}g''_{\alpha\alpha}-(g''_{\lambda\alpha})^2>0$.

Докажем 1). Вычислим g'_λ и g'_α:

$$g'_\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\right]-2(3-\lambda)\sin^2\pi\alpha\right]+$$
$$+\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left[-1-\frac{1}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\frac{6\pi\alpha}{\lambda^2}+\right.$$
$$\left.+2\sin^2\pi\alpha\right]=\frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[1-\lambda-\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(\lambda-2)\sin^2\pi\alpha\right],$$

и

$$g'_\alpha = -\frac{2\lambda^2}{\alpha^3}\left[\frac{1}{2}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\right]-2(3-\lambda)\sin^2\pi\alpha\right]+$$
$$+\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left[\frac{\lambda}{4\pi\alpha^2}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-2\pi\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-\right.$$
$$\left.-2(3-\lambda)\pi\sin 2\pi\alpha\right]=\frac{\lambda^2}{\alpha^3}\left[-3+2\lambda+\frac{3\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(3-\lambda)(2\sin^2\pi\alpha-\pi\alpha\sin 2\pi\alpha)\right].$$

Далее

$$g''_{\lambda\lambda} = \frac{3}{\alpha^2}\left[1-\lambda-\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+2(\lambda-2)\sin^2\pi\alpha\right]+\frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[-1-\frac{1}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$+\frac{6\pi\alpha}{\lambda^2}\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{3\pi\alpha}{\lambda^2}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$\left.+2\sin^2\pi\alpha\right]=\frac{3}{\alpha^2}\left[1-2\lambda+\left(\frac{3\pi\alpha}{\lambda}-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\right)\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+2\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+4(\lambda-1)\sin^2\pi\alpha\right],$$

$$g''_{\lambda\alpha} = -\frac{6\lambda}{\alpha^3}\left[1-\lambda-\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(\lambda-2)\sin^2\pi\alpha\right]+$$
$$+\frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[\frac{\lambda}{4\pi\alpha^2}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-\frac{\lambda}{4\pi\alpha}2\pi\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(\lambda-2)\pi\sin 2\pi\alpha\right]=$$
$$=\frac{3\lambda}{\alpha^3}\left[-2+2\lambda+\left(\frac{3\lambda}{4\pi\alpha}-\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)+1\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)-2(2-\lambda)(\pi-2)\sin^2\pi\alpha\Bigg],$$

$$g''_{\alpha\alpha}=-\frac{3\lambda^2}{\alpha^4}\Bigg[-3+2\lambda+\frac{3\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(3-\lambda)(2\sin^2\pi\alpha-\pi\alpha\sin 2\pi\alpha)\Bigg]+$$
$$+\frac{\lambda^2}{\alpha^3}\Bigg[-\frac{3\lambda}{4\pi\alpha^2}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{3\lambda}{4\pi\alpha}2\pi\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)2\pi\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+2(3-\lambda)(2\pi\sin 2\pi\alpha-\pi\sin 2\pi\alpha-\pi\alpha 2\pi\cos 2\pi\alpha)]=$$
$$=\frac{\lambda^2}{\alpha^4}\Bigg[9-6\lambda\alpha+\left(\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)2\pi\alpha-\frac{3\lambda}{\pi\alpha}\right)\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+(9-6\lambda)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+2(3-\lambda)(4\pi\alpha\sin 2\pi\alpha-6\sin^2\pi\alpha-2\pi^2\alpha^2\cos 2\pi\alpha)\Big].$$

Для доказательства отрицательной определенности квадратичной формы d^2g в прямоугольнике D_0 оценим производные $g''_{\lambda\lambda}$, $g''_{\lambda\alpha}$ и $g''_{\alpha\alpha}$ в D_0.

Прежде всего, так как в D_0 выполняются неравенства

$$1.38\le 2\cdot 0.95\cdot\left(\frac{3}{1.1}-2\right)\le 2\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\le 2\left(\frac{3}{1.05}-2\right)\le 1.72,$$

то

$$-1\le\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\le -0.77$$

и

$$-0.37\le\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\le 0.64.$$

Следовательно,

$$g''_{\lambda\lambda}\le\frac{3}{\alpha^2}\Bigg[1-2\cdot 1.05+\left(\frac{3\pi\cdot 0.95}{1.1}-\frac{1.1}{2\pi\cdot 0.95}\right)\cdot(-0.77)+2\cdot 0.64+$$
$$+4\cdot 0.1\cdot\sin^2(0.05\pi)\Big]\le\frac{3}{\alpha^2}[-1.1-6.125+1.28+0.01]\le$$
$$\le\frac{3}{\alpha^2}(-5.93)\le-\frac{17}{\alpha^2},$$

$$g''_{\alpha\alpha}\le\frac{\lambda^2}{\alpha^4}\Bigg[9-6\cdot 1.05\cdot 0.95+\left(0.4\cdot 0.73\cdot 2\pi\cdot 0.95-\frac{3\cdot 1.1}{\pi\cdot 0.95}\right)\cdot(-0.77)+$$
$$+(9-6\cdot 1.05)\cdot 0.63+2(3-1.1)(-2\pi^2\alpha^2\cdot 0.95)\Big]\le$$
$$\le\frac{\lambda^2}{\alpha^4}[3.02-0.46+1.73-63.8]\le\frac{\lambda^2}{\alpha^4}\cdot(-55),$$

$$g''_{\lambda\alpha} \le \frac{3\lambda}{\alpha^3}\left[-2+2\cdot 1.1+\left(\frac{3\cdot 1.05}{4\pi}-\pi\left(\frac{3}{1.05}-2\right)\right)\cdot(-1)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2\cdot 0.95}\cdot 0.45+1\right)\cdot(-0.37)\right] \le \frac{3\lambda}{\alpha^3}\left[0.2+2.45+0.46\right] \le \frac{\lambda}{\alpha^3}10,$$

$$g''_{\lambda\alpha} \ge \frac{3\lambda}{\alpha^3}\left[0.1+\left(\frac{3\cdot 1.1}{4\pi\cdot 0.95}-0.95\pi\left(\frac{3}{1.1}-2\right)\right)\cdot(-0.77)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2\cdot 0.95}(1.5-1.05)+1\right)\cdot 0.64-2\cdot 0.95(\pi-2)\pi^2 0.05^2\right] \ge$$
$$\ge \frac{3\lambda}{\alpha^3}\left[0.1+(0.28-2.17)\cdot(-0.77)-0.8-0.054\right] \ge \frac{3\lambda}{\alpha^3}0.7 \ge \frac{2\lambda}{\alpha^3}.$$

Отрицательная определенность квадратичной формы d^2g в прямоугольнике D_0 следует теперь из того, что $g''_{\lambda\lambda} < 0$, и неравенства

$$\Delta = g''_{\lambda\lambda}g''_{\alpha\alpha} - \left(g''_{\lambda\alpha}\right)^2 > \frac{\lambda^2}{\alpha^6}\cdot(-55)\cdot(-17) - \frac{\lambda^2}{\alpha^6}\cdot 100 > 0.$$

Пункт 1) доказан.

Для доказательства пункта 2) запишем необходимые условия экстремума функции $g(\lambda,\alpha)$:

$$1-\lambda-\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+2(\lambda-2)\sin^2\pi\alpha = 0, \quad (12)$$

$$-1+\frac{2}{3}\lambda+\frac{\lambda}{4\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\left(\frac{\lambda}{3}-\frac{1}{2}\right)\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+$$
$$+2\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)\left(2\sin^2\pi\alpha-\pi\alpha\sin 2\pi\alpha\right) = 0. \quad (13)$$

Сложив эти уравнения, получим

$$-\frac{1}{3}\lambda+\frac{\lambda}{3}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{2}{3}\lambda\sin^2\pi\alpha+2\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\pi\alpha\sin 2\pi\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) = \frac{3}{\lambda}\left[2\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)\pi\alpha\sin 2\pi\alpha-\frac{2}{3}\lambda\sin^2\pi\alpha+\frac{1}{3}\lambda\right]. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в уравнение (12), найдем

$$\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) =$$
$$= \frac{4\pi\alpha}{\lambda}\left[1-\lambda+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+2(\lambda-2)\sin^2\pi\alpha\right] =$$
$$= \frac{4\pi\alpha}{\lambda}\left[\frac{3}{2}-\lambda+(2\lambda-5)\sin^2\pi\alpha+\left(\frac{3}{\lambda}-1\right)\pi\alpha\sin 2\pi\alpha\right]. \quad (15)$$

Пусть точка (λ, α) лежит в прямоугольнике

$$D_1 = \{(\lambda, \alpha) : \ 1 \le \lambda \le 3/2, \, 0.75 \le \alpha \le 0.95\}.$$

Предположим, что она удовлетворяет уравнениям (12) и (13), т. е. является стационарной точкой функции g. Тогда из (15) следует, что

$$\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \le \frac{4\pi\alpha}{\lambda}\left[\frac{3}{2}-1-\left(\frac{3}{1.5}-1\right)\pi\cdot 0.75\sin 2\pi(1-\alpha)\right] \le \\ \le \frac{4\pi\alpha}{\lambda}[0.5-0.72] \le -1.3 < -1,$$

чего быть не может. Следовательно, в прямоугольнике D_1 функция $g(\lambda, \alpha)$ не имеет точек локального максимума.

Пусть теперь точка (λ, α) лежит в прямоугольнике

$$D_2 = \{(\lambda, \alpha) : \ 1 \le \lambda \le 3/2, \, 1 \le \alpha \le 1.25\}.$$

Так же, как и в предыдущем случае, предположим, что это стационарная точка функции g. Если мы покажем справедливость неравенства

$$(3-\lambda)\pi\alpha\sin 2\pi\alpha - \lambda\sin^2\pi\alpha > 0, \tag{16}$$

то, в силу (14) $\cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) > 1$, и стало быть в прямоугольнике D_2 функция $g(\lambda, \alpha)$ не имеет точек локального максимума. Действительно, (16) будет доказано, если мы докажем следующее неравенство

$$(3-\lambda)\pi\alpha\frac{2}{\pi}2\pi(\alpha-1) - \frac{3}{2}\pi^2(\alpha-1)^2 > 0,$$

которое можно переписать в виде

$$4(3-\lambda)\alpha > \frac{3}{2}\pi(\alpha-1).$$

Но последнее неравенство верно, так как

$$4(3-\lambda)\alpha \ge 4\cdot 1.5 \ge \frac{3}{2}\cdot 4\cdot 0.25 > \frac{3}{2}\pi(\alpha-1).$$

Рассмотрим теперь случай, когда точка (λ, α) лежит в прямоугольнике

$$D_3 = \{(\lambda, \alpha) : 1 \le \lambda \le 1.05, \ 0.95 \le \alpha \le 1\}.$$

Докажем, что в этом прямоугольнике $g'_\lambda > 0$. Действительно,

$$0.814 \le 0.95\left(\frac{3}{1.05}-2\right) \le \alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right) \le \alpha \le 1.$$

Следовательно,

$$-0.93 \le \sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \le 0$$

и
$$0.39 \le \cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \le 1.$$
Тогда
$$g'_\lambda \ge \frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[1-1.05+\frac{1}{2}0.39+2(1-2)\pi^2 0.05^2\right] \ge$$
$$\ge \frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[-0.05+0.19-0.05\right] > 0,$$
и следовательно, в этом прямоугольнике функция g также не имеет локальных максимумов.

Рассмотрим случай, когда точка (λ,α) лежит в прямоугольнике
$$D_4 = \{(\lambda,\alpha):\ 1.1 \le \lambda \le 1.2,\ 0.95 \le \alpha \le 1\}.$$
Докажем, что в этом прямоугольнике $g'_\lambda < 0$. Действительно,
$$0.475 \le 0.5\cdot 0.95 \le \alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right) \le 0.728.$$
Стало быть
$$-1 \le \cos\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \le -0.13$$
и
$$-1 \le \sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \le 0.16.$$
Следовательно,
$$g'_\lambda \le \frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[1-1.1+\frac{1.2}{4\pi\cdot 0.95}-\frac{1}{2}0.13\right] < \frac{3\lambda}{\alpha^2}\left[-0.1+0.1006-0.065\right] < 0,$$
и поэтому в этом прямоугольнике функция g также не имеет локальных максимумов.

Наконец, пусть точка (λ,α) лежит в прямоугольнике
$$D_5 = \{(\lambda,\alpha):\ 1.2 \le \lambda \le 1.5,\ 0.95 \le \alpha \le 1\}.$$
Докажем, что
$$g(\lambda,\alpha) \le 0.48 < \max_{\lambda\in[1,\,1.5],\,\alpha\in[0.75,\,\infty)} g(\lambda,\alpha).$$
Действительно, так как в этом случае
$$0 \le 2\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right) \le 2\cdot 1\cdot\left(\frac{3}{1.2}-2\right) \le 1,$$
то
$$\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right) \ge 0,$$

и следовательно,

$$g(\lambda,\alpha) \le \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left[\frac{3}{2} - \lambda - 2(3-\lambda)\frac{2^2}{\pi^2}\pi^2(1-\alpha)^2\right] \le$$
$$\le \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left[\left(8(1-\alpha)^2 - 1\right)\lambda + \frac{3}{2} - 24(1-\alpha)^2\right] = h(\lambda).$$

Так как

$$h'(\lambda) = \frac{1}{\alpha^2}\left[3\left(8(1-\alpha)^2 - 1\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{3}{2} - 24(1-\alpha)^2\right)\lambda\right]$$

и

$$\lambda_1 = \frac{1-16(1-\alpha)^2}{1-8(1-\alpha)^2} \le 1,$$

то легко увидеть, что $h(\lambda)$ убывает на промежутке (λ_1,∞). Следовательно, так как $\lambda \ge 1.2$, то

$$g(\lambda,\alpha) \le h(\lambda) \le \frac{1.2^2}{\alpha^2}\left[8\left((1-\alpha)^2 - 1\right)\cdot 1.2 + 1.5 - 24\left((1-\alpha)^2 - 1\right)\right] \le$$
$$\le \frac{1.44}{0.95^2}\cdot 0.3 \le 0.48 \le K_0.$$

Из всего вышесказанного следует, что если мы докажем, что на границе прямоугольника D функция g меньше 0.59, то лемма 11 будет доказана.

Пусть сначала $\lambda = 1$ и $0.75 \le \alpha \le 1.25$. Тогда

$$g(1,\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\pi\alpha}\sin 2\pi\alpha\right) - 4\sin^2\pi\alpha\right].$$

Следовательно, если $1.25 \ge \alpha \ge 1$, то

$$g(1,\alpha) \le \frac{1}{2} < 0.59.$$

Если же $0.75 \le \alpha \le 1$, то так как

$$\sin^2\pi\alpha = \sin^2\pi(1-\alpha) \ge \left(\pi(1-\alpha) - \frac{\pi^3(1-\alpha)^3}{6}\right)^2 =$$
$$= \pi^2(1-\alpha)^2\left(1 - \frac{\pi^2(1-\alpha)^2}{6}\right)^2 \ge \pi^2(1-\alpha)^2 0.8 \ge 7.89(1-\alpha)^2,$$

то

$$g(1,\alpha) \le \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\pi\alpha}2\pi(1-\alpha)\right) - 4\cdot 7.89(1-\alpha)^2\right] \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2\alpha} - 31.5(1-\alpha)^2\right] \le \frac{1-63\alpha\left(1-2\alpha+\alpha^2\right)}{2\alpha^3} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-63\alpha^3 + 126\alpha^2 - 63\alpha + 1}{\alpha^3} = \frac{1}{2}\left(t^3 - 63t^2 + 126t - 63\right) = \varphi(t),$$

где $t = 1/\alpha$.

Точка максимума t_1 функции $\varphi(t)$ легко находится с помощью производной

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 126t + 126\right) = \frac{3}{2}\left(t^2 - 42t + 42\right).$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{42 - \sqrt{42^2 - 4\cdot 42}}{2} = 1.025015\ldots.$$

Следовательно,

$$g(1,\alpha) \le \varphi(t_1) \le \frac{1}{2}\left[1.026^3 - 63\cdot 1.025^2 + 126\cdot 1.026 - 63\right] \le$$
$$\le 0.584 < 0.59.$$

Далее, при $0.75 \le \alpha \le 1.25$

$$g(1.5,\,\alpha) = \frac{3}{\alpha^2}(-2)(3 - 1.5)\sin^2 \pi\alpha \le 0.$$

При $1 \le \lambda \le 1.5$

$$g(\lambda, 0.75) \le \frac{\lambda^2}{0.75^2}\left[\frac{1}{2}\left[3 - 2 + \frac{1.5}{1.5\pi}\right] - 2(3 - 1.5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] \le$$
$$\le \frac{\lambda^2}{0.75^2}\left[\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\pi}\right] - 1.5\right] < 0.$$

Сходным образом получается оценка $g(\lambda, 1.25)$ при $1 \le \lambda \le 1.5$:

$$g(\lambda, 1.25) \le \frac{\lambda^2}{1.25^2}\left[\frac{1}{2}\left[3 - 2 + \frac{1.5}{2\pi\cdot 1.25}\right] - 2(3-\lambda)\frac{1}{2}\right] < 0.$$

■

Лемма 12. *При $\alpha \ge 0.75$ и $3 \le \lambda \le s$ верна оценка*

$$\sum_{k=3s^m+1}^{n-2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) \le \frac{1}{2}\lambda s^m\left[1 - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right] + 12\tilde{\theta}\alpha,$$

а при $3 \le \lambda \le \frac{3}{4}s$ верна оценка

$$\sum_{k=3s^m+1}^{n-2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) \le 0.48 s^{m+1}.$$

Доказательство. По лемме 8, п. 1

$$\sum_{k=3s^m+1}^{n-2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = \sum_{k=3s^m}^{n+1} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) -$$

$$
-\sum_{k=n-1}^{n+1} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) - \sin^2\left(\frac{(3s^m+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left[n+1-3s^m-\frac{n+1}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{2\pi\alpha(n+1)}{n+1}-\sin\frac{2\pi\alpha 3s^m}{n+1}\right)\right]+12\tilde{\theta}\alpha \le
$$

$$
\le \frac{1}{2}\left[n+1-3s^m-\frac{n+1}{2\pi\alpha}\sin 2\pi\alpha+3s^m\right]+12\tilde{\theta}\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{2}\lambda s^m\left[1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right]+12\tilde{\theta}\alpha.
$$

Если $3 \le \lambda \le \frac{3}{4}s$, то отсюда получим

$$
\sum_{k=3s^m+1}^{n-2} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{3s}{4}s^m\left[1+\frac{1}{2\pi\frac{3}{4}}\right] \le \frac{3s}{4}s^m\cdot 0.61 < 0.48s^{m+1}.
$$

■

Лемма 13. *Пусть* $\lambda \ge 1$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$
\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) = \frac{s^m}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}-\theta'_{14}\frac{200\alpha^2}{s^3}\right].
$$

Доказательство. По лемме 8, п. 1, используя неравенство

$$
\sin^2\left(\frac{(3s^{m-1}+1)\pi\alpha}{n+1}\right) < 2\alpha,
$$

имеем

$$
\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =
$$

$$
= \sum_{k=3s^{m-1}}^{3s^m} \sin^2\left(\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1}\right) - \sin^2\left(\frac{(3s^{m-1}+1)\pi\alpha}{n+1}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left[3s^m-3s^{m-1}-\frac{n}{2\pi\alpha}\left(\sin\frac{6\pi\alpha s^m}{\lambda s^m}-\sin\frac{6\pi\alpha s^{m-1}}{\lambda s^m}\right)\right]+12\tilde{\theta}\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left[3s^m-\frac{\lambda s^m}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}-\theta'_{13}\frac{1}{6}\lambda s^m\frac{2^2\pi^2\alpha^2 3^3}{\lambda^3 s^3}\right]+\frac{1}{2}s^m\frac{2\cdot 12\tilde{\theta}\alpha}{s^m} =
$$

$$
= \frac{s^m}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}-\theta'_{14}\frac{200\alpha^2}{s^3}\right],
$$

так как $\frac{22\alpha}{s^m} < \frac{20\alpha^2}{s^3}$ при $m \ge 4$. ■

Положим

$$
S(k_1,k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta^2 a_k^n \sin^2\Big((k+1)\frac{\pi\alpha}{n}\Big). \tag{17}
$$

Лемма 14. *Пусть* $m-1 > \frac{2}{3-\gamma}$. *Тогда справедливо равенство*

$$S(0, 3s^{m-1}) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}} K \frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right),$$

где

$$K = \frac{1}{s^{3-\gamma}-1}. \tag{18}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$S(0,\, 3s^{m-1}) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=3s^{i-1}+1}^{3s^i} \Delta^3 a_{3s^i}\left(1+\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}\right)\sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right).$$

По лемме 9, определению последовательности $\left\{\Delta^3 a_k\right\}_{k=0}^\infty$ и теореме о среднем найдутся такие константы $|\tilde\theta_i| \le 1$, что

$$\begin{aligned} S(0,\, 3s^{m-1}) &= \sum_{i=1}^{m-1}\Delta^3 a_{3s^i}\left(1+\frac{\tilde\theta_i}{s^\gamma-1}\right)9\pi^2\alpha^2\frac{s^{3i}}{\lambda^2 s^{2m}}\left(1+\frac{22\theta'''_i\alpha^2}{s}\right) = \\ &= \left(1+\frac{\tilde\theta}{s^\gamma-1}\right)\left(1+\frac{22\theta'''\alpha^2}{s}\right)\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2 3^\gamma s^{2m}}\sum_{i=1}^{m-1}s^{(3-\gamma)i} = \\ &= \left(1+\frac{25\theta'_{15}\alpha^2}{s}\right)\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2 3^\gamma s^{2m}}s^{3-\gamma}\frac{s^{(3-\gamma)(m-1)}-1}{s^{3-\gamma}-1} = \\ &= \left(1+\frac{25\theta'_{15}\alpha^2}{s}\right)\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2 3^\gamma s^{2m}}s^{3-\gamma}\frac{s^{(3-\gamma)(m-1)}}{s^{3-\gamma}-1}\left[1-\frac{1}{s^{(3-\gamma)(m-1)}}\right]. \end{aligned}$$

При $m > \frac{1}{3-\gamma}+1$ будет $s^{(3-\gamma)(m-1)} > s$. Следовательно,

$$\frac{1}{s^{(3-\gamma)(m-1)}} < \frac{2\alpha^2}{s}$$

и

$$S(0,\, 3s^{m-1}) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}} K \frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right),$$

где $K = \frac{1}{s^{3-\gamma}-1}$. ∎

Напомним, что

$$K_0 = \max_{\lambda\in\left[1,\,\frac{3}{2}\right],\, \tilde\alpha\in[0.75,\infty]} g(\lambda,\tilde\alpha),$$

где $g(\lambda,\alpha)$ — функция из леммы 11. Пусть

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(K_0 - \max_{\lambda\in\left[1,\frac{3}{2}\right]} g(\lambda,\alpha)\right).$$

Подберем $0 < \delta < 1$, такое, что $K_0 - \delta\epsilon > 0.59$. Так как по лемме 11 $0.59 < K_0 < 0.6$, то $0 < \delta\epsilon < 0.01$. Пусть s_0 — константа, такая, что

$$s_0 > \frac{10^7\alpha^4\lambda_0^2}{\alpha_0^2\delta\epsilon} > 10^9\alpha^4 > 10^8. \tag{19}$$

Теперь подберем $s \geq s_0$ и $\gamma \in (2,3)$ так, чтобы

$$K = \frac{1}{s^{3-\gamma}-1} = \frac{K_0 - \delta\epsilon}{9\pi^2}.$$

Это возможно потому, что γ можно взять сколь угодно близким к 3. Таким образом,

$$0.59 < 9\pi^2 K = K_0 - \delta\epsilon < 0.6. \tag{20}$$

Лемма 15. *Пусть* $\lambda \geq 3$. *Тогда*

$$S(0,\, 3s^m) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+\right.$$
$$\left.+\,\frac{1}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right]+\theta'_{19}\frac{106\alpha^2}{s^\gamma}\right].$$

<u>Доказательство</u>. Применяя лемму 1, получим

$$S(0,3s^m) = S(0,3s^{m-1}) + S(3s^{m-1}+1,3s^m) =$$
$$= S(0,\,3s^{m-1}) + \Delta^3 a_{3s^m}\left(1+\frac{\theta'_{17}}{s^\gamma-1}\right)\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m}\sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right).$$

Отсюда по леммам 13 и 14

$$S(0,3s^m) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+$$
$$+\,\frac{s^m}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}-\theta'_{14}\frac{200\alpha^2}{s^3}\right]\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1+\frac{\theta'_{17}}{s^\gamma-1}\right).$$

Вынося за скобки множитель $\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}$ и выделяя в скобках главную часть, по лемме 6 будем иметь

$$S(0,3s^m) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right]-\frac{1}{2}\theta'_{14}\frac{200\alpha^2}{s^3}+\frac{1}{2}\frac{(5+1)\theta'_{18}}{s^\gamma-1}\right]=$$
$$=\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+\frac{1}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right]+\theta'_{19}\frac{106\alpha^2}{s^\gamma}\right].$$

■

Лемма 16. *Пусть* $\lambda \in \left[1, \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)\right]$. *Тогда*

$$S(3s^{m-1}+1, n-2) = \\ = -\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\frac{1}{2}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{900\theta'_{23}\alpha^2}{s}\right].$$

Доказательство.

$$S(3s^{m-1}+1,n-2) = S(3s^{m-1}+1,3s^m-2(n+1))+S(3s^m-2(n+1)+1,n-2).$$

По лемме 2, теореме о среднем и лемме 10

$$S(3s^{m-1}+1,3s^m-2(n+1)) = \\ = -\Delta^3 a_{3s^m}\left(1+\frac{\theta'_{21}}{s^\gamma-1}\right)\sum_{k=3s^{m-1}+1}^{3s^m-2(n+1)}\sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right)+ \\ +\left[\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1+\frac{\theta'_{21}}{s^\gamma-1}\right)-\frac{\theta^*}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left(1+\frac{\theta_k}{s^\gamma-1}\right)\right]\times \\ \times\sum_{k=3s^m-2(n+1)-2}^{3s^m-2(n+1)}\sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right) = -\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta'_{21}}{s^{\gamma-1}}\right)\times \\ \times\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\theta'_{12}\frac{400\alpha^2}{s^3}\right]+\frac{4\theta^*_1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\cdot 3\cdot\frac{s^m}{s^m}.$$

Опять же по лемме 2 учитывая, что

$$\sum_{k=3s^m-2(n+1)}^{n-2}\sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right)\le n+1,$$

получим

$$S(3s^m-2(n+1),n-2) = \frac{1}{3^\gamma s^{\gamma m}}\frac{\theta'_{22}}{s^\gamma-1}(n+1) = \frac{\lambda s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\frac{\theta'_{22}}{s^\gamma-1}.$$

Следовательно, так как

$$\left|3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)\right|\le 3+\frac{\frac{3}{2}}{2\pi\cdot\frac{3}{4}}<4,$$

то вынося за скобку множитель $-\frac{1}{2}\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}$ и выделяя в скобке главную часть, получим

$$S(3s^{m-1}+1,n-2) = -\frac{1}{2}\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\right. \\ \left.+\frac{4\theta'_{21}}{s^{\gamma-1}}+2\theta'_{12}\frac{400\alpha^2}{s^3}-\frac{2\lambda\theta'_{22}}{s^\gamma-1}+\frac{24\theta^*_1}{s^m}\right] = \\ = -\frac{1}{2}\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[3-2\lambda-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)\right)+\frac{900\theta'_{23}\alpha^2}{s}\right].$$

■

Доказательство теоремы 2. Из определения последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует, что она трижды монотонна, т. е.

$$\Delta a_k \geq 0, \quad \Delta^2 a_k \geq 0, \quad \Delta^3 a_k > 0, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,$$

и $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, по теореме Маркова (см. [5]) функция $r_n(x) = f(x) - T_n(f; x)$ меняет знак в точках $\frac{(2l+1)\pi}{2(n+1)}$, $l = 0, \ldots, n$, и только в них на отрезке $[0, \pi]$, т. е. $T_n(f; x)$ — интерполяционный полином. Но, при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2(n+1)}\right]$, очевидно $T_n(f; x) > 0$, так как в этом случае $\cos kx > 0$, а $a_k^n > 0$. В то же время

$$T_n(f; x) < f(x) \tag{21}$$

на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2(n+1)}\right]$. Действительно, так как $a_k^n < a_k,\ k = 0, \ldots, n$, то

$$T_n(f; 0) = \sum_{k=0}^{n} a_k^n < \sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(0),$$

если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, и неравенство (21) выполняется. Если же этот ряд расходится, то $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ и неравенство (21), также выполнено. Поэтому на отрезках $\left[\frac{\pi(4l+1)}{2(n+1)}, \frac{\pi(4l+3)}{2(n+1)}\right]$, $l = 0,\, 1, \ldots$ и, в частности, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2(n+1)}, \frac{3\pi}{2(n+1)}\right]$ $T_n(f; x) > f(x)$, и, значит, $T_n(f; x) > 0$, т. к. $f(x) > 0$ для всех x.

Так как существуют функции, у которых полиномы наилучшего приближения в среднем не яляются равномерно ограниченными снизу (см. [7]), то теорема, таким образом, верна для любого $\alpha \in [0,\, 0.75]$.

Применив дважды преобразование Абеля к сумме

$$T_n(f; x) = \frac{1}{2} a_0^n + \sum_{k=1}^{n} a_k^n \cos kx,$$

получим

$$T_n\,(f;\, x) = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k^n \frac{\sin^2\left(\frac{k+1}{2}\, x\right)}{2\, \sin^2\left(\frac{1}{2} x\right)} + \Delta a_{n-1}^n\, \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\, x\right)}{2\, \sin^2\left(\frac{1}{2} x\right)} + a_n^n\, \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\, \sin\left(\frac{1}{2} x\right)}.$$

Ограниченность последнего слагаемого в этой формуле следует из (9). Следовательно, оно не влияет на поведение полиномов $T_n(f; x)$. В связи с этим вместо полиномов $T_n(f; x)$ будем рассматривать величины

$$T_n^*(f; x) = T_n(f; x) - a_n^n\, \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\, \sin\left(\frac{1}{2} x\right)}.$$

Подставим в полученное выражение $x = \frac{2\pi\alpha}{n+1}$ и умножим на $2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}$:

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2 a_k^n \sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right) + \Delta a_{n-1}^n\,\sin^2\frac{\pi\alpha n}{n+1}. \quad (22)$$

Далее, так как $(\sin^2 x)' = \sin(2x)$, то найдется такое $c \in \left[\frac{\pi\alpha n}{n+1}, \pi\alpha\right]$, что

$$\sin^2\frac{\pi\alpha n}{n+1} = \sin^2\left(\pi\alpha - \frac{\pi\alpha}{n+1}\right) = \sin^2\pi\alpha + \sin(2c)\frac{\pi\alpha}{n+1} = \sin^2\pi\alpha + \frac{\theta_{24}'\pi\alpha}{n+1}.$$

Поэтому (22) можно переписать в следующем виде

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2 a_k^n \sin^2\left((k+1)\frac{\pi\alpha}{n+1}\right) + \\ + \left(\sin^2\pi\alpha + \frac{\pi\alpha\theta_{24}'}{n+1}\right)\Delta a_{n-1}^n. \quad (23)$$

Докажем, что при выбранных параметрах γ и s_0 для всех натуральных n, начиная с некоторого (т. е. при всех $\lambda : 1 \le \lambda \le s$),

$$T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) \ge 0, \quad (24)$$

но последовательность

$$\left\{T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha_0}{n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \quad (25)$$

неограничена снизу при $\lambda = \lambda_0$. Этим теорема 2 будет доказана.

Для этого рассмотрим сначала номера n, такие, что $1 \le \lambda \le \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)$. Тогда

$$S(0,\,n-2) = S(0,\,3s^{m-1}) + S(3s^{m-1},\,n-2);$$

из (23) по лемме 14, лемме 16 и лемме 5, п. 1, следует, что

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) = \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} - \right. \\ - \frac{1}{2}\left[3 - 2\lambda - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda} - 2\right)\right)\right] + 2(3-\lambda)\sin^2(\pi\alpha) + \\ + K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\frac{28\theta_{16}'\alpha^2}{s} - \frac{1}{2}\frac{900\theta_{23}'\alpha^3}{s} + 2(3-\lambda)\frac{2\pi\alpha\theta_{24}'}{\lambda s^m} + \\ \left. + 2\frac{8\theta'}{s^{\gamma-1}}\left(\sin^2\pi\alpha + \frac{\pi\alpha\theta_{24}'}{n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}} \left[K \frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \left[3 - 2\lambda - \frac{\lambda}{2\pi\alpha} \sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{3}{\lambda} - 2\right)\right)\right] + \right.$$
$$\left. + 2(3-\lambda)\sin^2(\pi(1-\alpha)) + \theta'_{25}\frac{10^6\alpha^4}{s}\right]. \quad (26)$$

Сначала докажем (25). Подставляя (20) в (26) получаем

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2{\alpha_0}^2}{{\lambda_0}^2 s^{2m}} T_n^*\left(f;\ \frac{2\pi\alpha_0}{\lambda_0 s^m}\right) \le$$
$$\le \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}} \left[\frac{{\alpha_0}^2}{{\lambda_0}^2}\left(g(\lambda_0,\alpha_0) - \delta\epsilon\right) - \frac{{\alpha_0}^2}{{\lambda_0}^2} g(\lambda_0,\alpha_0) + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}\right].$$

Отсюда

$$T^*_{\lambda_0 s^m}\left(f;\ \frac{2\pi\alpha_0}{\lambda_0 s^m}\right) \le \frac{{\lambda_0}^2}{{\alpha_0}^2}\frac{1}{3^\gamma} s^{(3-\gamma)m}\left[-\frac{{\alpha_0}^2}{{\lambda_0}^2}\delta\epsilon + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}\right].$$

Так как $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, то выражение $-\frac{{\alpha_0}^2}{{\lambda_0}^2}\delta\epsilon + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}$ при выбранном $s_0 > \frac{10^7\alpha^4\lambda_0^2}{\alpha_0^2\delta\epsilon}$ отрицательно и отграничено от 0. Поэтому, так как $s^{(3-\gamma)m} \to +\infty$ при $m \to \infty$, то

$$T^*_{\lambda_0 s^m}\left(f;\ \frac{2\pi\alpha_0}{\lambda_0 s^m}\right) \to -\infty \quad \text{при } m \to \infty. \quad (27)$$

Для доказательства (24) рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала $1 \le \lambda \le \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)$. Подставляя (20) в (26) и применяя лемму 11, получим

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1} T_n^*\left(f;\ \frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(K_0 - \delta\epsilon\right) - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}g(\lambda,\alpha) + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}\right] =$$
$$= \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(K_0 - g(\lambda,\alpha) - \frac{1}{2}\delta\left(K_0 - \max_{\lambda\in\left[1,\frac{3}{2}\right]} g(\lambda,\alpha)\right)\right) + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}\right] \ge$$
$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(g(\lambda_0,\alpha_0) - g(\lambda,\alpha) - \frac{1}{2}\left(g(\lambda_0,\alpha_0) - g(\lambda,\alpha)\right)\right) + \frac{\theta'_{25}10^6\alpha^4}{s}\right] \ge$$
$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\frac{0.75^2}{1.5^2}\epsilon - \frac{10^6\alpha^4}{s}\right] \ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\frac{1}{4}\epsilon - 10^6\alpha^4\frac{\alpha_0^2\delta\epsilon}{10^7\alpha^4\lambda_0^2}\right] >$$
$$> \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\epsilon\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right] > 0.$$

Пусть теперь $\lambda \in \left[\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right), 3\right]$. Из лемм 3 и 4 следует, что

$$S(3s^{m-1}+1, n-2) \ge$$
$$\ge -\frac{1}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}}\left(1 + \frac{1}{s^\gamma - 1}\right)\sum_{k=m+1}^{n}\sin^2\frac{(k+1)\pi\alpha}{n+1} \ge -\frac{2}{3^\gamma s^{\gamma(m+1)}}(n+1).$$

Используя лемму 14 и лемму 5, п. 2, получаем из (23)

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right)=S(0,3s^{m-1})+S(3s^{m-1}+1,n-2)+$$
$$+\left(\sin^2\pi\alpha+\frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right)\Delta a_{n-1}^n\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}-K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\frac{28\alpha^2}{s}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\lambda}{s^\gamma}+\frac{2}{s^\gamma}\left(2\lambda-\frac{8s}{s^{\gamma-1}}\right)\left(\sin^2(\pi\alpha)+\frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right)\right]\geq$$
$$\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}-0.6\cdot 0.75^2\cdot\frac{28\alpha^2}{s}-\frac{2\cdot 3}{s}-\frac{2}{s}\cdot 7\cdot 2\right]\geq$$
$$\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[0.59\frac{\alpha^2}{3^2}-\frac{28\alpha^2+34}{s}\right]\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\alpha^2\left[\frac{0.59}{9}-\frac{100}{10^8}\right]>0.$$

Пусть теперь $\lambda\in\left[3;\,\frac{3}{4}s\right]$. По леммам 15, 12, 5 и 11

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right)=$$
$$=S(0,3s^m)+S(3s^m+1,n-2)+\left(\sin^2\pi\alpha+\frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right)\Delta a_{n-1}^n\geq$$
$$\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+\frac{1}{2}\left[3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right]+\theta'_{19}\frac{106\alpha^2}{s^\gamma}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{s^\gamma}\left(1+\frac{1}{s^\gamma-1}\right)0.48s+\frac{2}{s^\gamma}\left(2\lambda-\frac{8s}{s^{\gamma-1}}\right)\left(\sin^2\pi\alpha+\frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right)\right].\qquad(28)$$

Если $\lambda<\sqrt{s}$, то так как $\left(3-\frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right)>0$, то (28) положительно. Пусть $\lambda\geq\sqrt{s}$. Тогда из (28), используя лемму 6 и лемму 11, получаем

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\,\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right)\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{20}\frac{6^2\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\right)-\frac{0.5}{s^{\gamma-1}}-\frac{4\pi}{s^{\gamma-1}}-\frac{106\alpha^2}{s^\gamma}\right]\geq$$
$$\geq\frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[\left(K+1+\frac{K\cdot 28\theta'_{16}\alpha^2}{s}-\frac{1}{20}\frac{6^2\pi^2\alpha^2}{s}\right)\frac{9\pi^2\alpha^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2s^2}-\frac{0.51}{s^{\gamma-1}}\right].\qquad(29)$$

Вследствие (18) $K+1=s^{3-\gamma}K$. Применяя (19), получим

$$\frac{1}{s}\left(K\cdot 28\alpha^2+\frac{6^2\pi^2\alpha^2}{20}\right)\leq\alpha^2\frac{100+18}{s}\leq\alpha^2\frac{118}{10^9\alpha^4}\leq\frac{300}{10^9}\leq 10^{-6}.$$

Положительность (29) будет следовать из следующих выкладок:

$$(K+1-10^{-6})\frac{9\pi^2\alpha^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2s^2}-\frac{0.51}{s^{\gamma-1}}=K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2s^{\gamma-1}}-\frac{0.51}{s^{\gamma-1}}\geq$$
$$\geq\frac{1}{s^{\gamma-1}}\left(0.59\cdot 0.75^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2-0.51\right)>0.$$

Пусть теперь $\frac{3s}{4} \le \lambda \le s$. Обозначим

$$E = \frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\frac{3^2\pi^2\alpha^2}{5\lambda^2} + \frac{0.6\alpha^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 s^2}\frac{28\alpha^2}{s} + \frac{106\alpha^2}{s^\gamma} + \frac{1}{s^{2\gamma}}s + \frac{4s}{s^\gamma}\frac{\pi\alpha}{\lambda s^m} + \frac{1}{s^\gamma}\frac{16}{s^{\gamma-2}}\cdot 2.$$

Тогда, используя (19), получим

$$|E| \le \frac{9^2\pi^4\alpha^4}{5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 s^4} + \frac{30\alpha^4}{s^3} + \frac{106\alpha^2}{s^\gamma} + \frac{1}{s^{2\gamma-1}} + \frac{20\alpha}{s^{m+\gamma-1}} + \frac{32}{s^{2\gamma-2}} \le$$

$$\le \frac{\lambda}{s^\gamma}\cdot\frac{3}{4}\left[\frac{1800\alpha^4}{s^{5-\gamma}} + \frac{30\alpha^4}{s^{4-\gamma}} + \frac{106\alpha^2}{s} + \frac{1}{s} + \frac{20\alpha}{s^m}\right] \le$$

$$\le \frac{\lambda}{s^\gamma}\frac{5000\alpha^4}{10^9\alpha^4} \le \frac{\lambda}{s^\gamma}\cdot 10^{-5}.$$

По аналогии с предыдущим случаем, применяя леммы 15, 4, 12, 5 и 6, получаем

$$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{n+1}T_n^*\left(f;\frac{2\pi\alpha}{n+1}\right) =$$

$$= S(0,3s^m) + S(3s^m+1,n-2) + \left(\sin^2\pi\alpha + \frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right)\Delta a_{n-1}^n \ge$$

$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[K\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{28\theta'_{16}\alpha^2}{s}\right) + \frac{1}{2}\left[3 - \frac{\lambda}{2\pi\alpha}\sin\frac{6\pi\alpha}{\lambda}\right] + \theta'_{19}\frac{106\alpha^2}{s^\gamma} -\right.$$

$$-\frac{1}{s^\gamma}\left(1+\frac{1}{s^\gamma-1}\right)\frac{1}{2}\lambda\left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) +$$

$$\left.+\frac{2}{s^\gamma}\left(2\lambda - \frac{8}{s^{\gamma-1}}\right)\left(\sin^2\pi\alpha + \frac{\pi\alpha\theta'_{24}}{n+1}\right) + 12\tilde{\theta}\alpha\left(1+\frac{1}{s^\gamma-1}\right)\frac{1}{s^m}\right] \ge$$

$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[(K+1)\frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{9\pi^2\alpha^2}{\lambda^2}\frac{9\pi^2\alpha^2}{5\lambda^2} +\right.$$

$$+\frac{\lambda}{s^\gamma}\left(4\sin^2\pi\alpha - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right)\right) -$$

$$\left.-\frac{0.6\alpha^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 s^2}\frac{28\alpha^2}{s} - \frac{106\alpha^2}{s^\gamma} - \frac{1}{s^{2\gamma}}s - \frac{4s}{s^\gamma}\frac{\pi\alpha}{\lambda s^m} - \frac{1}{s^\gamma}\frac{16}{s^{\gamma-2}}\cdot 2\right] \ge$$

$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[0.59\frac{\alpha^2}{\lambda^2}s^{3-\gamma} + \frac{\lambda}{s^\gamma}\left(4\sin^2\pi\alpha - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right)\right) - E\right] \ge$$

$$\ge \frac{s^m}{3^\gamma s^{\gamma m}}\left[0.59\frac{\alpha^2}{\lambda^2}s^{3-\gamma} + \frac{\lambda}{s^\gamma}\left(4\sin^2\pi\alpha - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) - 10^{-5}\right)\right].$$

Поэтому на основании леммы 11 для доказательства положительности последнего выражения достаточно доказать, что

$$0.59\alpha^2 s^{3-\gamma} > \frac{\lambda^3}{s^\gamma}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) - 4\sin^2\pi\alpha + 10^{-5}\right).$$

В свою очередь, так как $\lambda < s$, то это неравенство будет следовать из следующего

$$0.59\alpha^2 > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) - 4\sin^2 \pi\alpha + 10^{-5},$$

которое следует из леммы 7.

Из всего вышесказанного вытекает, что последовательность $\{T_n(f; \frac{2\pi\alpha}{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, но последовательность $\{T_n(f; \frac{2\pi\alpha_0}{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена снизу. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Белов А. С.* О коэффициентах тригонометрических косинус-рядов с неотрицательными частными суммами // Тр. МИАН СССР. – 1989. – Т. 190. – С. 3–21.
2. *Белов А. С.* О частных суммах тригонометрического ряда с выпуклыми коэффициентами // Математические заметки. – 1991. – Т. 50. – № 4. – С. 21–27.
3. *Белов А. С.* О тригонометрических рядах с неограниченными снизу частными суммами // Вестник ИвГУ. – 2002. – № 3. – С. 110–117.
4. *Колесников В. С.* Об ограниченности снизу тригонометрических полиномов наилучшего приближения // Математические заметки. – 2006. – Т. 79. – № 6. – С. 870–878.
5. *Крейн А. Е., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
6. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
7. *Nagy B.* Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // 1. Periodischer Fall, Berichte der math. Acad. der Wiss. zu Leipzig. Bd. – 1938. – T. 90. – C. 103–134.

Поступила в редакцию 02.09.2009.