Математика и её приложения: ЖИМО. 2009. Вып. 1 (6). С. 103 – 120.

УДК 517.958 : [535+537.812]

А. М. Солунин[1]

О ларморовой и циклотронной частотах

Ключевые слова: электродинамика, уравнения движения, переменная собственная масса, эффект векторного потенциала.

В классической электродинамике рассмотрены уравнения движения с переменной собственной массой частицы. Обсуждаются отличия этих уравнений от обычных уравнений движения. Для стационарных полей уравнения разрешены относительно переменной массы и дается интерпретация ее как массы взаимодействующей с полем частицы. Отмечены новые эффекты.

In classical electrodynamics, we consider the motion equations for particle with variable own mass. We discuss the difference of these equations from usual motion equations. For stationary fields we allow these equations about variable mass; also we give it's interpretation as a mass that interacts with the field of the particle. We find new effects.

Уравнения электромагнитного поля

$$\partial_a F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^{\beta}, \tag{0.1}$$

где

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{0.2}$$

могут быть получены из вариационного принципа с использованием лагранжиана поля вида

$$L = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu v} F_{\mu v}. \tag{0.3}$$

Из этого лагранжиана, иногда называемого поперечным, выводится тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha v} F^{v}_{\cdot\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu v} F_{\mu v}\right), \tag{0.4}$$

из которого получается выражение для плотности силы Лоренца:

$$f^{\alpha} = -\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} j_\beta = \frac{\rho_0}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta. \tag{0.5}$$

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле имеют вид (см., напр., [1], § 23)

$$m_0 \frac{dU^{\alpha}}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta. \tag{0.6}$$

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: `solunin@yandex.ru`.

Наряду с лагранжианом (0.3) в квантовой электродинамике используется лагранжиан вида

$$L = -\frac{1}{8\pi}\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta, \tag{0.7}$$

называемый продольным [2]. Если на потенциалы наложено условие Лоренца

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0, \tag{0.8}$$

то продольный и поперечный лагранжианы различаются несущественными при варьировании слагаемыми вида дивергенции и приводят к уравнению поля (0.1). Однако, если условие Лоренца не наложено, то из (0.7) получаются уравнения поля

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\beta, \tag{0.9}$$

переходящие при условии (0.8) в уравнения (0.1). Тензор энергии-импульса, полученный из лагранжиана (0.7), имеет вид [2]

$$8\pi T^{\alpha\beta} = 2\partial^\alpha A^v \partial^\beta A_v - g^{\alpha\beta}\partial^\mu A^v \partial_\mu A_v, \tag{0.10}$$

а плотность силы, действующей со стороны поля на заряженные частицы равна

$$f^a = \frac{1}{c}\partial^\alpha A^\mu j_\mu. \tag{0.11}$$

В этом случае уравнения движения частицы в поле будут иметь вид

$$\frac{d}{d\tau}(m_0(\tau)U^\alpha) = \frac{q}{c}\partial^\alpha A^\beta U_\beta \tag{0.12}$$

или с учетом (0.2)

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0(\tau)U^\alpha - \frac{q}{c}A^\alpha\right) = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta. \tag{0.13}$$

Уравнения движения (0.12) существенно отличаются от уравнений движения (0.6). Отметим наиболее важные их этих отличий.

1) В уравнении (0.6) независимыми являются только три первых уравнения

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right), \tag{0.14}$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{0.15}$$

а последнее уравнение является следствием первых трех и представляет собой закон сохранения энергии. Соотношение (0.15) трактуется как зависимость массы частицы от ее скорости. В нем m_0 является 4-скаляром, а m — трехмерный скаляр. В уравнении же (0.12) независимы все четыре уравнения и определению подлежат четыре неизвестные величины: $m_0(\tau)$ и три компоненты скорости $\vec{v}$. Из (0.13) с учетом того, что $U^\alpha U_\alpha = -1$, получим

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = -\frac{q}{c}\frac{dA_\alpha}{d\tau}U^\alpha; \tag{0.16}$$

это означает, что собственная масса частицы $m_0(\tau)$ (4-скаляр) зависит от поля, в котором она находится.

2) Уравнения движения (0.12) содержат не только тензор $F^{\alpha\beta}$, но и другие комбинации производных от потенциала. Поэтому в предлагаемом варианте уравнений движения основное значение имеет потенциал поля. Естественно, что появятся отличия в описании известных физических ситуаций.

Мы ограничимся поведением заряженных частиц в стационарных полях. В этом случае правая часть уравнения (0.12) при $\alpha = 4$ равна нулю, и мы сразу получаем[1]

$$\frac{m_0(\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}} = m, \tag{0.17}$$

где m — постоянная интегрирования (3-скаляр). Подставляя это выражение в первые три уравнения системы (0.12), получим

$$m\dot{\vec{v}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} \tag{0.18}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right). \tag{0.19}$$

Если считать, что массы в уравнениях (0.14) и (0.18) по крайней мере в приближении малых скоростей ($v/c << 1$) совпадают, то различие в этих уравнениях относится только к магнитному полю и связано с последним слагаемым в правой части уравнения (0.18).

Представленные здесь вопросы в разной степени рассмотрены в работах [7–12]. Ниже содержится попытка систематизации и развития этих результатов.

1. Из (0.16) видно, что собственная масса свободной частицы не зависит от собственного времени и совпадает с собственной массой уравнения (0.6):

$$m_0(\tau) = m_0. \tag{1.1}$$

Однако при наличии взаимодействия частицы с полем ситуация существенно меняется. Если в уравнении (0.15) масса движущегося тела m (в дальнейшем координатная масса или масса в данной системе отсчета)

[1] Если поле нестационарно, то соотношение (0.17) также будет иметь место, но только в кулоновской калибровке для потенциалов: $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

зависит от скорости тела, то в уравнении (0.17), напротив, координатная масса m постоянна, а от скорости (у нас от собственного времени) зависит собственная масса частицы $m_0(\tau)$. Поэтому, если в уравнении (0.6) собственная масса частицы m_0 согласно (0.15) совпадает с массой покоя, то смысл собственной массы $m_0(\tau)$ предстоит выяснить.

Пусть частица движется в электрическом поле, так что имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + q\varphi_1 = \frac{mv_2^2}{2} + q\varphi_2. \tag{1.2}$$

Вычислим изменение собственной массы

$$\Delta m_0(\tau) = m_{02}(\tau) - m_{01}(\tau) \tag{1.3}$$

в нерелятивистском приближении. Из (0.17) с учетом (1.2) получим

$$\Delta m_0(\tau)c^2 = mc^2\left(\sqrt{1-\beta_2^2} - \sqrt{1-\beta_1^2}\right) = \\ = -\frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = q(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{1.4}$$

Таким образом, изменение собственной массы частицы обусловлено ее взаимодействием с электрическим полем. Если, например, частица налетает на одноименно заряженный центр, то ее собственная масса возрастает на величину потенциальной энергии взаимодействия.

Из (1.4) определим изменение собственной массы электрона в атоме водорода

$$\Delta m_0(\tau)c^2 = mc^2(\sqrt{1-\beta^2} - 1) = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}\ , \tag{1.5}$$

т. е. изменение собственной массы электрона равно энергии связи в атоме водорода, которая в основном состоянии составляет $-13,6$ эВ.

2. Пусть магнитное поле соленоида нарастает от нуля до значения B. Появляющееся при этом вихревое электрическое поле

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.1}$$

ускоряет частицу и сообщает ей скорость

$$\vec{v} = \int\limits_0^t \frac{q\vec{E}}{m}dt = -\frac{q}{mc}\vec{A}.$$

Если поле $\vec{B}$ однородно, то

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}), \tag{2.2}$$

и поэтому скорость можно записать в виде $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ дается выражением

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{q\vec{B}}{mc} \tag{2.3}$$

и называется ларморовой частотой. При этом со стороны магнитного поля на частицу должна действовать сила, обеспечивающая движение по окружности. Подсчитаем ее по уравнениям движения (0.18). Поскольку векторный потенциал однородного магнитного поля имеет вид (2.2), то в (0.18)

$$\frac{q}{c}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} = -\frac{1}{2}\frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.4}$$

Таким образом, со стороны магнитного поля на заряженную частицу действует центростремительная сила, равная половинному значению силы Лоренца, и орбита частицы устойчива, если ее угловая скорость определяется выражением (2.3).

Пусть далее магнитное поле меняется от значения B_1 до B_2. При этом электрическое поле совершает работу

$$A = \frac{1}{c}\int I(\Phi)d\Phi = mr^2\int \omega d\omega = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{2.5}$$

Такое представление для работы возможно, если частота вращения определяется по (2.3).

Из уравнений движения (0.14) следует, что в однородном магнитном поле частица движется с циклотронной частотой, вдвое превышающей ларморовскую. По уравнениям движения (0.18) такой частоты, как циклотронная, просто не существует.

Еще раз об этом результате. Пусть заряженная частица влетает со скоростью v в однородное магнитное поле. Ее уравнения движения согласно (0.18) с учетом (2.4) имеют вид

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{1}{2}\ \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \tag{2.6}$$

а согласно уравнениям (0.14) в нерелятивистском приближении

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.7}$$

Таким образом, частота вращения частицы, определяемая по уравнениям (2.7) (циклотронная частота), в два раза превышает частоту вращения, определяемую по уравнениям (2.6) (ларморова частота). Но можно думать иначе. Определение B как силовой характеристики поля находится в зависимости от уравнений движения. Поэтому, если считать, что B, определяемое по (2.6), в два раза превосходит B, определяемое по (2.7), то мы будем иметь одну частоту вращения [9, 10].

3. Рассмотрим области пространства, для которых $\vec{B} = 0$, $\vec{A} \neq 0$. Для них из (0.19) следует, что сохраняется импульс вида

$$m\vec{v} - \frac{q}{c}\vec{A} = m\vec{v}_0 - \frac{q}{c}\vec{A}_0 = \vec{P}_0. \tag{3.1}$$

Отсюда можно получить закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2m}\Big(2\frac{q}{c}\vec{P}_0 \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{c^2}A^2\Big) = \frac{1}{2m}P_0^2 \tag{3.2}$$

и, следовательно, выражение для силы, управляющей движением частицы

$$\vec{F} = -\nabla U = \frac{q}{mc}\Big(\Big(\vec{P}_0 + \frac{q}{c}\vec{A}\Big) \cdot \nabla\Big)\vec{A}. \tag{3.3}$$

Например, в области вне соленоида магнитное поле равно нулю, а потенциал имеет вид

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\ \frac{R^2}{r^2}(\vec{B} \times \vec{r}),\ \ (r > R). \tag{3.4}$$

Вид траектории заряженной частицы зависит от начальных условий, и исследование таких траекторий проведено в [7, 9]. Здесь отметим только движение частицы по окружности, когда в (3.1) $\vec{P}_0 = 0$. Угловая скорость движения частицы при этом имеет вид

$$\vec{\Omega} = -\frac{R^2}{r^2}\ \vec{\omega}. \tag{3.5}$$

Подставив (3.4) во второе слагаемое уравнения (0.18), получим выражение для силы, действующей на частицу вне соленоида

$$\vec{F} = \frac{q\varPhi}{2\pi c}\ \frac{1}{r^2}\Big[(\vec{k} \times \vec{v}) - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2}(\vec{k} \times \vec{r})\Big],\quad \text{где}\ \ \vec{k} = \frac{\vec{B}}{B}, \tag{3.6}$$

откуда для круговой траектории получим

$$\vec{F} = \frac{q\varPhi}{2\pi c}\ \frac{1}{r^2}\ \vec{k} \times \vec{v} = -\frac{q}{2c}\ \frac{R^2}{r^2}\ \vec{v} \times \vec{B}. \tag{3.7}$$

Это выражение родственно (2.4) и объясняет, почему угловые скорости вращения частиц вне и внутри соленоида противоположны.

Активное поведение заряженных частиц в пространстве вне соленоида известно, и объяснение их поведения принадлежит квантовой теории. Мы рассмотрим три таких эффекта. Особенностью первых двух является то, что результат в них не зависит от постоянной Планка, поэтому их иногда называют эффектами физического вакуума.

Решение уравнения Шредингера для круговых орбит электрона, концентрических длинному тонкому соленоиду с потоком $\varPhi$, приводит к собственным значениям энергии электрона

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\Big(n - \frac{q\varPhi}{2\pi\hbar c}\Big)^2, \tag{3.8}$$

где m — масса электрона, r — радиус орбиты, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ [17]. Отсюда получим с учетом (2.3) и (3.5) при $n = 0$

$$\varepsilon_0 = \frac{q^2\Phi^2}{8\pi^2 c^2 m r^2} = \frac{mr^2}{2}\Omega^2. \tag{3.9}$$

Это значение полной энергии частицы совпадает с ее кинетической энергией и противоречит закону сохранения (3.2), по которому полная энергия частицы при движении по окружности равна нулю. Нам, однако, сейчас важен сам факт существования выражения (3.9)[2].

В [14] приведен следующий опыт. Длинный соленоид, несущий поток Φ, охвачен круговым витком. Если виток понижением температуры переводится в сверхпроводящее состояние, то в нем возникает ток. Напротив, если температура повышается, и виток переводится в нормальное состояние, ток прекращается.

Будем считать, что виток в сверхпроводящем состоянии является идеальным проводником. Тогда из (3.1) получим при $\vec{P}_0 = 0$

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \frac{nq^2}{mc}\vec{A}. \tag{3.10}$$

Это выражение для тока сверхпроводимости отличается лишь знаком от известной формулы Лондонов.

Область вне соленоида проявляет себя в эффекте Аронова–Бома, который состоит в следующем. Если в двухщелевом эксперименте по дифракции электронов между щелями расположить соленоид с потоком Φ, то интерференционная картина сдвигается на фазу

$$\Delta\varphi = \frac{q\Phi}{\hbar c}. \tag{3.11}$$

Наше объяснение этого эффекта основывается на уравнении движения (0.18).

Пусть электроны, вылетая из точки O со скоростью v, прежде чем достичь точки P экрана, огибают соленоид сверху (1) или снизу (2). Тогда

[2]Уравнения движения (0.18) можно записать в виде

$$m\dot{\vec{v}} = \nabla\frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}).$$

Отсюда получим закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = \varepsilon.$$

Подставляя сюда значение $\vec{A}$ из (3.1) при $\vec{P}_0 = 0$, что соответствует движению частицы по окружности, получим

$$\varepsilon = -\frac{mv^2}{2},$$

т. е. значение, равное ε_0, но с другим знаком.

для каждой из таких траекторий согласно (3.1) можно записать

$$m\vec{v}_1 - \frac{q}{c}\vec{A}_1 = m\vec{v}_2 - \frac{q}{c}\vec{A}_2. \qquad (3.12)$$

Проинтегрируем эти уравнения по траектории движения. Поскольку каждая из сторон в нем равна постоянному вектору $\vec{P}_0$, то результат зависит только от пределов интегрирования, и мы можем записать

$$mv\int \vec{v}_1\cdot d\vec{\tau}_1 - \frac{q}{c}\int \vec{A}_1\cdot d\vec{l}_1 = mv\int \vec{v}_2\cdot d\vec{\tau}_2 - \frac{q}{c}\int(\vec{A}_2\cdot d\vec{l}_2), \qquad (3.13)$$

где $d\vec{\tau} = d\vec{l}/v$. Величина

$$\int_0^P \vec{v}_1\cdot d\vec{\tau}_1 - \int_0^P \vec{v}_2\cdot d\vec{\tau}_2 \cong v\Delta\tau = \Delta l \qquad (3.14)$$

может быть названа геометрической разностью хода когерентных электронов, связанной с их отставанием при движении по различным траекториям на время $\Delta\tau$, а

$$\int_0^P \vec{A}_1\cdot d\vec{l}_1 - \int_0^P \vec{A}_2\cdot d\vec{l}_2 = \int_0^P \vec{A}_1\cdot d\vec{l}_1 + \int_P^0 \vec{A}_2\cdot d\vec{l}_2 = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \varPhi. \qquad (3.15)$$

Итак, выражение (3.13) можно переписать в виде

$$mv\Delta l = \frac{q}{c}\,\varPhi. \qquad (3.16)$$

Вводя сюда выражение для длины волны де Бройля $\lambda = h/(mv)$, получим соотношение (3.11). Более строгий вывод геометрической разности хода приведен в [9].

4. Согласно уравнениям движения (0.18) область вне соленоида оказывает влияние на движение заряженных частиц. Слагаемое, ответственное за это влияние, не может быть сведено к антисимметричному тензору, а содержит иные комбинации производных от потенциала. Поскольку для этих случаев имеет место закон сохранения (3.1), то явления, связанные с этим законом сохранения, мы называем эффектами векторного потенциала.

Приведем идею эксперимента, поставленного нами на физическом факультете Ивановского университета [12].

Векторный потенциал на оси тонкого тороидального соленоида имеет вид

$$A_z(z) = \frac{\varPhi}{2R}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)^{-3/2}, \qquad (4.1)$$

а скорость частицы, движущейся по оси такого тороида, согласно (3.1) меняется по закону

$$v(z) = v_0 + \alpha(1 + z^2/R^2)^{-3/2} \quad \Big(\alpha = \frac{q\Phi}{2cmR}\Big). \tag{4.2}$$

Если на электроннолучевую трубку в том месте, где расположены отклоняющие пластины, надеть тороид, то он будет менять на экране положение отклоненного платинами электронного луча. Предполагая, что смещение луча в пределах пластины невелико, получим

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1}{(1 - \alpha/v_0)^2}, \tag{4.3}$$

где Δ_0 — отклонение луча пластинами при $\Phi = 0$, Δ — отклонение луча при включенном тороиде ($\Phi \neq 0$). Отметим, что Δ может быть как больше, так и меньше Δ_0, т. е. зависит от направления потока в тороиде. Опыт показал удовлетворительное совпадение с формулой (4.3).

Задачи, подобные рассмотренным выше, требуют знания векторного потенциала потоковых конфигураций, таких, как, например, соленоид. Для статических полей эта проблема решается просто. Действительно, векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi, \tag{4.4}$$

аналогичному уравнению для магнитного поля

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I. \tag{4.5}$$

Поэтому по магнитному полю токовой (I) конфигурации можно найти векторный потенциал соответствующей потоковой (Φ) конфигурации. Так, векторный потенциал поля тороида (4.1) списывается с выражения для магнитного поля кругового тока.

Для описания магнитного поля токовых систем вводятся векторный ($\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$) и скалярный ($\vec{B} = -\nabla(I\Omega/c)$) потенциалы. Аналогично, для векторного потенциала потоковых систем можно ввести векторный $\vec{G}$ и скалярный $\aleph$ суперпотенциалы (см.[9])

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{G}; \ \vec{A} = -\nabla\aleph, \ \Big(\aleph = \frac{\Phi\Omega}{4\pi}\Big), \tag{4.6}$$

где Ω — телесный угол, на который опирается потоковый (или токовый) контур. Приведем выражения для скалярного и векторного суперпотенциалов тонкого соленоида. Скалярный суперпотенциал

$$\aleph = \frac{\Phi}{2\pi}\varphi \tag{4.7}$$

является многозначной функцией, которая при обходе по контуру, заключающему соленоид, меняется на 2π. Векторный суперпотенциал соленоида имеет вид

$$\vec{G} = \left(0,\ 0,\ \frac{\Phi}{2\pi}\ln\frac{r}{R}\right). \tag{4.8}$$

Оба эти выражения обеспечивают выполнение теоремы Стокса (4.4) за счет особых свойств пространства, выражающихся в многозначности функции $\aleph$ или сингулярности функции $\vec{G}$.

5. Из выражения для силы Лоренца следует закон взаимодействия элементарного тока $I d\vec{l}$ с магнитным полем $\vec{B}$:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I d\vec{l} \times \vec{B}. \tag{5.1}$$

Если имеются два элементарных тока, то сила взаимодействия между ними равна

$$d^2\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1, \tag{5.2}$$

где $d\vec{B}_1$ определяется законом Био–Савара

$$d\vec{B}_1 = \frac{I_1}{c}\frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}. \tag{5.3}$$

Таким образом, закон взаимодействия элементарных токов, который следует из уравнений движения (0.14), имеет вид

$$d^2\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\left[\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \left(d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) d\vec{l}_2\right] \tag{5.4}$$

и называется законом Грассмана (1845 г.). Он отличается от оригинального закона Ампера (1823 г.) [18]

$$d^2\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\left[\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right) - \frac{3}{2}\frac{\left(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}\right)\left(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^2}\right]\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{5.5}$$

тем, что для него не соблюдается закон действия и противодействия (третий закон Ньютона), но принципиальным его преимуществом перед законом Ампера является его полевое происхождение.

Обратимся к уравнениям движения (0.18). Считая, что скорость частицы не зависит от координат, получим, что сила, действующая со стороны магнитного поля на частицу, имеет вид

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}). \tag{5.6}$$

Это означает, что на элементарный ток в магнитном поле действует сила

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\nabla(d\vec{l}\cdot\vec{A}). \tag{5.7}$$

Если поле создано элементарным током, то

$$d\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{Id\vec{l}}{r}, \tag{5.8}$$

и закон взаимодействия двух элементарных токов имеет вид

$$d^2\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\left(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2\right)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}. \tag{5.9}$$

Это выражение удовлетворяет третьему закону Ньютона, имеет полевую трактовку и известно как закон Неймана (1845 г.) [15, 16].

Все приведенные выше для закона взаимодействия элементарных токов выражения приводят к одному и тому же закону взаимодействия замкнутых токов:

$$\vec{F}_{12} = \oint_1\oint_2 d^2\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\oint_1\oint_2\left(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2\right)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \tag{5.10}$$

и поэтому нарушению третьего закона Ньютона для элементарных токов не придается физического смысла, поскольку элементарный ток — нефизический объект. “Требование от закона взаимодействия элементарных токов равенства действия и противодействия было общим заблуждением, свойственным физикам домаксвелловской эпохи” [13]. Другие авторы в этом нарушении видят “longstanding physical problem” [15, 18]. Мы считаем, что закон действия и противодействия для элементарных токов должен выполняться. Обоснование приведем ниже (в конце п. 6).

В законе взаимодействия (5.7) кроме силы Ампера (5.1) содержится сила, которую можно назвать дополнительной к силе Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left(d\vec{l}\cdot\nabla\right)\vec{A}. \tag{5.11}$$

Для нее

$$\oint d\vec{F} = \frac{I}{c}\oint\left(d\vec{l}\cdot\nabla\right)\vec{A} = 0. \tag{5.12}$$

Сила (5.11) имеет произвольное направление. Особенно интересен случай, когда она выступает как продольная сила. Со времен Ампера, которому принадлежит первый эксперимент по обнаружению продольной силы, накоплен огромный экспериментальный материал [15, 16, 18], объяснение которого нуждается в продольной силе[3].

[3] По нашему мнению, продольная сила действует на движущиеся проводники, когда ток в проводнике создается не только электронами проводимости, но и ионами кристаллической решетки, через которые и передается усилие.

Предположение о том, что сила в магнитостатике подобно силе в электростатике потенциальна, привлекательно и основательно, поскольку калибровочно инвариантно. Исходя из него, в [6] получены выражения для сил и моментов, действующих между токовыми системами. Следствием этого предположения является и выражение для силы (5.11). Поскольку для замкнутого контура эта сила равна нулю, то она может быть обнаружена на участках контура как сила деформации. “Экспериментальные исследования этих сил, проведенные в Новочеркасском политехническом институте, дают неоспоримые доказательства их существования” [5].

Интересную возможность для проявления силы (5.11) дает область вне соленоида, где $\vec{B}=0$, но $\vec{A}\neq 0$. Момент силы, действующей в этой области на токовой контур, может быть отличен от нуля:

$$\vec{M}=\oint \vec{r}\times d\vec{F}=\frac{I}{c}\oint \vec{r}\times(d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{A}=\frac{I}{c}\oint(d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{r}\times\vec{A}+\frac{I}{c}\oint \vec{A}\times d\vec{l}.$$

Первый член справа по теореме Стокса исчезает, и мы имеем

$$\vec{M}=\frac{I}{c}\oint \vec{A}\times d\vec{l}=\frac{I}{c}\int(d\vec{s}\cdot\nabla)\vec{A}. \tag{5.13}$$

При повороте контура на угол $\delta\vec{\varphi}=\vec{\omega}\delta t$ совершается работа

$$\delta A=\frac{I}{c}\oint(\vec{A}\times d\vec{l})\cdot\delta\vec{\varphi}=-\frac{I}{c}\delta q(\vec{\omega}\cdot\nabla)\int \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

и наводится ЭДС [11]

$$\varepsilon=\frac{\delta A}{\delta q}=-\frac{1}{c}(\vec{\omega}\cdot\nabla)\int(\vec{A}\cdot d\vec{s}). \tag{5.14}$$

6. Следствием закона сохранения (0.17) является нерелятивистский характер уравнений движения (0.18), т. е. скорость движения частицы не ограничена скоростью света. Так, если частица движется в однородном электрическом поле, то из (0.18) следует, что ее скорость равна

$$v(t)=\frac{qE}{m}\,t; \tag{6.1}$$

в то же время по уравнениям движения (0.14) получим

$$\frac{v}{c}=\frac{\alpha_0 t}{\sqrt{1+(\alpha_0 t)^2}},\quad \alpha_0=\frac{qE}{m_0 c}. \tag{6.2}$$

Из (6.2) видно, что скорость частицы ограничена скоростью света. Причина этого в уравнении (0.15). Подобного соотношения нет для уравнения (0.18). Пусть, например, имеются две инерциальные системы отсчета, в которых скорости частицы имеют значения v_1 и v_2. Тогда на основании (0.17) можно записать

$$m_1\sqrt{1-\beta_1^2} = m_2\sqrt{1-\beta_2^2} = m_0(\tau). \tag{6.3}$$

Полагая здесь, например, $\beta_1 = 0$, получим

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ , \tag{6.4}$$

где u — скорость одной инерциальной системы относительно другой.

Способ получения корректного решения для уравнений (0.18) мы видим в использовании потенциалов вида

$$\vec{A} = \nabla f, \tag{6.5}$$

для которых электрические и магнитные поля равны нулю. Потенциалами такого вида характеризуется область вне соленоида, а также рассмотренное в [9] взаимодействие с полем, потенциал которого имеет вид

$$\vec{A} = \lambda\,\nabla\frac{q}{r} \quad (\lambda = \mathrm{const}). \tag{6.6}$$

Потенциал (6.5) в четырехмерной записи имеет вид

$$A^\alpha = \partial^\alpha f \tag{6.7}$$

и удовлетворяет согласно (0.9) уравнению

$$\partial^\alpha \Box f = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha. \tag{6.8}$$

Отсюда, вследствие того, что

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0, \tag{6.9}$$

для функции f получим уравнение

$$\Box^2 f = 0. \tag{6.10}$$

Наложив на потенциал (6.7) условие

$$\partial^\alpha A_\alpha = \Lambda, \tag{6.11}$$

получим уравнение на скалярное поле f:

$$\Box f = \Lambda. \tag{6.12}$$

Для частицы, движущейся в однородном электрическом поле, величина $\varLambda$ постоянна, а потенциал (6.5), получающийся из решения стационарного уравнения (6.12)

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \varLambda, \tag{6.13}$$

имеет вид

$$\vec{A} = \varLambda x\vec{i}. \tag{6.14}$$

Подставляя этот потенциал в уравнение (0.18), получим

$$m\dot{v} = qE + \frac{q\varLambda}{c}v. \tag{6.15}$$

Решение этого уравнения при

$$\varLambda = -E \tag{6.16}$$

имеет вид

$$\frac{v}{c} = 1 - \exp(-\alpha t), \quad \alpha = \frac{qE}{mc}. \tag{6.17}$$

Это выражение для скорости частицы своим пределом имеет скорость света, а при малых скоростях совпадает с (6.1).

Нерелятивистский характер движения частиц в статических полях говорит о том, что уравнения (0.18) принадлежат последовательной ньютоновской теории дальнодействия. Поле здесь выступает как посредник, но не физический объект. По этой причине для взаимодействующих тел должен выполняться закон действия и противодействия. Это равенство должно выполняться и для рассмотренного в п. 5 закона взаимодействия элементарных токов.

Введение скалярного поля для уравнений (0.18) выполняет те же функции, что и зависимость массы частицы от скорости (0.15) для уравнений (0.14), т. е. обеспечивает согласие с постулатами теории относительности. Скалярное поле выполняет роль среды, в которой движется частица. В [10] величина $\varLambda$ называется электромагнитной вязкостью.

Для однородного магнитного поля функция f удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \varLambda. \tag{6.18}$$

Его решение при $\varLambda = \mathrm{const}$ для области внутри соленоида ($r < R$) имеет вид

$$f(r) = \varLambda\frac{r^2}{4}, \tag{6.19}$$

а потенциал находится по (6.5) :

$$\vec{A}(r) = \frac{\varLambda}{2}\vec{r}. \tag{6.20}$$

Подставляя потенциал (6.20) в уравнение движения (0.18), получим с учетом (2.3)

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\frac{\Lambda}{2}\vec{r} \tag{6.21}$$

или окончательно

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{1}{2}\frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) + \frac{q}{c}\frac{\Lambda}{2}\vec{v}. \tag{6.22}$$

Отсюда следует, что кинетическая энергия частицы меняется по закону

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\exp\Big(2\frac{\lambda}{B}\omega t\Big), \tag{6.23}$$

где ω дается выражением (2.3). Подробное решение уравнения (6.22) дано в [8].

Для области вне соленоида ($r > R$)

$$f(r) = \frac{\Lambda}{2}R^2\ln\frac{r}{R}, \tag{6.24}$$

а потенциал

$$\vec{A}(r) = \frac{\Lambda}{2}\frac{R^2}{r^2}\vec{r}. \tag{6.25}$$

Подставляя потенциалы (3.4) и (6.25) в закон сохранения (3.1), получим выражение для скорости движения

$$\vec{v} = \Omega\Big(\vec{K}\times\vec{r} + \frac{\Lambda}{B}\vec{r}\Big), \tag{6.26}$$

где Ω определяется по (3.5).

7. Преобразования, при которых

$$A^\alpha \longrightarrow A'^{\,\alpha} = A^\alpha + \partial^\alpha f, \tag{7.1}$$

называются калибровочными. Лагранжиан (0.3), равно как и уравнения движения (0.6), инварианты относительно калибровочных преобразований. Иначе обстоит дело с лагранжианом (0.7). При преобразованиях (7.1)

$$\begin{aligned} L \longrightarrow L' &= \\ &= L + \frac{1}{8\pi}\Big[2\partial_\alpha(A_\beta\partial^\alpha\partial^\beta f) - 2A^\beta\partial_\beta\Box f + \partial^\alpha(\partial_\alpha\Box f) - \partial^\beta f\partial_\beta\Box f\Big]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Если на калибровочную функцию наложить условие

$$\Box f = 0, \tag{7.3}$$

то инвариантом преобразований (7.1) будет действие

$$s = \int Ld^4x, \tag{7.4}$$

поскольку слагаемые вида дивергенций при интегрировании исчезают.

Пусть потенциал в уравнениях движения (0.12) имеет вид (6.7). Тогда из (0.13) получим

$$m_0(\tau)U^\alpha - \frac{q}{c}\partial^\alpha f = P_0^\alpha, \tag{7.5}$$

где P_0^α — постоянный вектор. Дивергенция (7.5) с учетом того, что $U^\alpha\partial_\alpha = d/d\tau$, а также учет уравнения неразрывности для линий тока[4] (см. [3])

$$\partial_\beta U^\beta = 0, \tag{7.6}$$

приводит к соотношению

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = \frac{q}{c}\Box f. \tag{7.7}$$

Оно разделяет калибровочные функции на два типа. Если функция f удовлетворяет уравнению (6.12), то

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = \frac{q}{c}\varLambda, \tag{7.8}$$

и частица взаимодействует с этим полем. Если же в (6.12) $\varLambda = 0$, то взаимодействия нет. Таким образом действие (7.4) с лагранжианом (0.7) и уравнения движения (0.12) инвариантны относительно специализированных калибровочных преобразований (7.3).

Уравнения движения (0.12) относятся к уравнениям вида

$$\frac{d}{d\tau}\Big(m_0(\tau)U^\alpha\Big) = F^\alpha, \tag{7.9}$$

рассматриваемым в [3, 4]. Переменность собственной массы частицы

$$\frac{dm_0(\tau)}{d\tau} = -F^\alpha U_\alpha \tag{7.10}$$

трактуется обычно как теплота, выделяемая частицей при ее движении, и частица уподобляется “небольшой ракете, теряющей массу” [3]. Основываясь на выражении (0.16), мы можем более подробно охарактеризовать эти потери. После интегрирования (0.16) примет вид

$$m_0(\tau) = -\frac{q}{c}A^\alpha U_\alpha + \frac{q}{c}\int A^\alpha dU_\alpha + m_0, \tag{7.11}$$

где m_0 — постоянная интегрирования, которую можно принять как массу свободной частицы. Первое слагаемое является энергией взаимодействия

[4] Для точечной частицы мы имеем $j_\alpha = \rho_0 c U_\alpha$, где собственная плотность заряда $\rho_0 = q\delta(x - x(\tau))$, $\int \delta(x - x(\tau))dx = 1$. Тогда из (6.9) получим: $0 = \int \partial_\alpha j^\alpha dx =$ $= \int \partial_\alpha(\rho_0 c U^\alpha)dx = qc\int \partial_\alpha(\delta(x - x(\tau))U^\alpha dx + qc\int \delta(x - x(\tau))\partial_\alpha U^\alpha(x)) =$ $= qc\frac{d}{d\tau}\int \delta(x - x(\tau))dx + qc\partial_\alpha U^\alpha(x(\tau)) = qc\partial_\alpha U^\alpha$.

частицы с полем. Изменение массы частицы, обусловленное этим слагаемым, обсуждалось в п. 1 на примерах взаимодействия с электрическим полем. Второе слагаемое, не являясь полным дифференциалом, зависит от траектории частицы. Оно характеризует диссипацию энергии. Зависимость этого слагаемого от ускорения частицы позволяет надеяться, что с его помощью можно вычислить потери энергии на излучение.

По нашему мнению, уравнения движения (0.12) представляют интерес для исследования. Они открывают новые аспекты во взаимодействии частиц с электромагнитным полем. Эта их особенность основывается на том, что в электродинамике с продольным лагранжианом (0.7) основная роль принадлежит векторному потенциалу, а не только антисимметричному тензору. К вопросам, решение которых более определенно обозначило бы контуры такой электродинамики, относятся, на наш взгляд, следующие.

1) Решение уравнений движения частицы в нестационарном электромагнитном поле. Каким будет в этом случае закон сохранения (0.17)?

2) Определение величины Λ в уравнении (6.12). Можно предположить, что Λ является функцией инвариантов электромагнитного поля. Некоторые соображения по этому вопросу приведены в [10].

3) Формулировка закона сохранения энергии вещества и поля, если последнее характеризуется тензором энергии-импульса (0.10).

Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
3. *Мёллер К.* Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1972. – 400 с.
4. *Паули В.* Теория относительности. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
5. *Синельников Д. Е.* Замечания по поводу статьи В. Г. Алешинского “К вопросу о формуле электродинамического взаимодействия токовых элементов” // Электромеханика. – 1978. – № 3. – С. 434–435.
6. *Синельников Е. М., Синельников Д. Е.* Пондеромоторное взаимодействие двух элементарных тел в квазистационарном магнитном поле // Электромеханика. – 1976. – № 1. – С. 13–18.
7. *Солунин А. М.* R-электродинамика // Исследования в области теоретических основ электротехники и инженерной электрофизики: Межвуз. сб. науч. тр. – Иваново: ИвГУ, 1982. – С. 3–31. – Деп. в ВИНИТИ, № 3908-82.
8. *Солунин А. М.* О роли калибровочных преобразований в R-электродинамике. – Иваново: ИвГУ, 1982. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 393–82.
9. *Солунин А. М.* R-электродинамика и эффект векторного потенциала. – Иваново: ИвГУ, 1985. – 63 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 5416–85.

10. *Солунин А. М.* Об уравнениях движения в электродинамике. Уравнения движения с переменной собственной массой частицы // Физическая Мысль России. – 1996. – Т. 3/4. – С. 124–134.

11. *Солунин А. М.* О законе взаимодействия токов // Высоковольтная техника и электротехнология: Межвуз. сб. науч. тр. – Иваново: ИГЭУ, 1997. – Вып. 1. – С. 57–61.

12. *Солунин А. М., Костин А. В.* Об эффекте векторного потенциала для тороидального соленоида. – Иваново: ИвГУ, 1984. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 7900–84.

13. *Шапиро И. С.* О роли векторного потенциала в классической электродинамике // УФН. – 1972. – Т. 108. – Вып. 2. – С. 319–325.

14. *Deaver Jr. B. S., Donaldson G. B.* An experimental demonstration of winding number dependence of the Aharonov-Bohm effect // Phys. Lett. – 1982. – Vol. 89A. – № 4. – P. 178–180.

15. *Graneau P.* Compatibility of the Ampere Force Laws and Lorentz Force Laws with the virtual Work Concept // Nuovo Cim. – 1983. – Vol. 78B. – № 2. – P. 213–233.

16. *Graneau P.* The Ampere-Neuman Electrodinamics of Metallic Conductors // Fortschr. Phys. – 1986. – Vol. 34. – P. 457–501.

17. *Merzbacher E.* On magnetic rotator // Am. J. Phys. – 1962. – Vol. 30. – P. 237–239.

18. *Pappas P. T.* The original Ampere Force and Biot-Savart and Lorentz Forces // Nuovo Cim. – 1983. – Vol. 76B. – № 2. – P. 189–197.

Поступила в редакцию 13.10.2009.