Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 29 – 32.

УДК 512.543

А. С. Гудовщикова[1], Е. В. Соколов[2]

Замечание об аппроксимируемости расщепляющихся расширений групп

Ключевые слова: расщепляющиеся расширения групп, аппроксимируемость конечными π-группами.

Указаны некоторые условия, необходимые и достаточные для аппроксимируемости расщепляющегося расширения произвольным классом групп, замкнутым относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Доказанная теорема дополняет результаты об аппроксимируемости расщепляющихся расширений классами всех конечных групп и всех конечных p-групп, полученные ранее другими авторами.

Keywords: splitting extensions of groups, residual π-finiteness.

Let $\mathcal{K}$ be an arbitrary class of groups closed under taking subgroups, gomomorphic images and extensions. We find certain necessary and sufficient conditions for a splitting extension of group to be residually $\mathcal{K}$. The theorem proved appends the results on the residual finiteness and the residual p-finiteness of splitting extensions of groups, which were obtained early by other authors.

1. Введение

Группу G будем называть расщепляющимся расширением группы A при помощи группы B, если она содержит подгруппы A' и B', изоморфные группам A и B соответственно, и такие, что A' нормальна в G, $G = B'A'$ и $B' \cap A' = 1$. Поскольку подгруппы A' и B' изоморфны группам A и B, будем отождествлять их, т. е. считать, что группы A и B сами являются подгруппами группы G.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп. Говорят, что подгруппа H группы G $\mathcal{K}$-отделима (в G), если для любого элемента $g \in G \backslash H$ найдется гомоморфизм φ группы G на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\varphi \notin H\varphi$. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа $\mathcal{K}$-отделима. Если $\mathcal{K}$ представляет собой класс всех конечных групп, то говорят о финитной аппроксимируемости и финитной отделимости соответственно.

А. И. Мальцев [4] показал, что расщепляющееся расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы при помощи финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат был распространен Д. Н. Азаровым [1] на случай, когда расширяемая группа имеет конечный общий ранг. В работах [3] и

[1]Ивановский государственный университет.

[2]Ивановский государственный университет; E-mail: ev-sokolov@yandex.ru.

[5] изучалась аппроксимируемость расщепляющихся расширений в классе конечных p-групп. Наконец, в [2] найдено одно необходимое условие аппроксимируемости расщепляющегося расширения произвольным классом групп, замкнутым относительно взятия подгрупп и расширений.

В настоящей работе получены некоторые условия, необходимые и достаточные для аппроксимируемости расщепляющихся расширений в классе всех конечных π-групп и в некоторых других классах групп. А именно, имеет место следующая

Теорема. *Пусть G — расщепляющееся расширение группы A при помощи группы B, и пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп. Следующие утверждения равносильны.*

1. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Подгруппы A и B группы G $\mathcal{K}$-отделимы в этой группе.

3. Подгруппа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема и $\mathcal{K}$-отделима в группе G.

Пусть π — произвольное непустое множество простых чисел. Натуральное число n называется π-числом, если все его простые делители принадлежат множеству π. Периодическая группа называется π-группой, если порядки всех ее элементов являются π-числами.

Класс всех конечных π-групп будем обозначать через $\mathcal{F}_\pi$. Легко увидеть, что он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп. Поэтому непосредственно из теоремы вытекает

Следствие. *Пусть G — расщепляющееся расширение группы A при помощи группы B, π — некоторое непустое множество простых чисел. Следующие утверждения равносильны.*

1. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Подгруппы A и B группы G $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в этой группе.

3. Подгруппа B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе G.

2. Доказательство теоремы

Для доказательства сформулированной выше теоремы нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Предложение 1. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, G — расщепляющееся расширение группы A при помощи группы B, и N — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/N \in \mathcal{K}$. Тогда подгруппа $L = (N \cap B)(N \cap A)$ нормальна в группе G и $G/L \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Обозначим для удобства $N \cap A$ через H и $N \cap B$ через K. Так как $G = BA$, $L = KH$, подгруппа H нормальна в G и подгруппа K нормальна в B, то $L^G = (KH)^{BA} = (K^B)^A H^{BA} \subseteq K^A H$.

Далее, поскольку $K \leqslant N$ и подгруппа N нормальна в G, $K^A \subseteq N$ и $[K, A] \leqslant N$. С другой стороны, $[K, A] \leqslant A$ ввиду нормальности подгруппы A. Поэтому $[K, A] \leqslant N \cap A = H$ и $K^A \subseteq KH$.

Таким образом, $L^G \subseteq K^A H \subseteq KH = L$, т. е. подгруппа L нормальна в группе G. Покажем теперь, что $G/L \in \mathcal{K}$.

Так как $B \cap A = 1$, то

$$N/L = N/LH = N/L(N \cap A) \cong NA/LA = NA/KA \leqslant G/KA =$$
$$= BA/KA \cong B/K(B \cap A) = B/K = B/B \cap N \cong BN/N \leqslant G/N.$$

Поскольку $G/N \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ является наследственным, то отсюда следует, что $N/L \in \mathcal{K}$. Но $(G/L)/(N/L) \cong G/N$, а класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно расширений. Стало быть, $G/L \in \mathcal{K}$, что и требовалось. ∎

Предложение 2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, H — нормальная подгруппа группы G. Тогда для $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе G необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H была $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в G, gH — произвольный отличный от единицы элемент фактор-группы G/H. Тогда $g \notin H$, и потому существует гомоморфизм φ группы G на $\mathcal{K}$-группу такой, что $g\varphi \notin H\varphi$. Положим $N = \ker\,\varphi$.

Так как $G/HN \cong (G/N)/(HN/N)$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $G/HN \in \mathcal{K}$. Определим отображение

$$\xi : G/H \to G/HN$$

правилом $(xH)\xi = xHN$, $x \in G$. Легко увидеть, что ξ является сюрьективным гомоморфизмом. Заметим также, что в силу выбора гомоморфизма φ $g\varphi \notin H\varphi$, поэтому $g \notin HN$ и, следовательно, $(gH)\xi = gHN \neq 1$.

Таким образом, для произвольного отличного от единицы элемента фактор-группы G/H мы указали гомоморфизм на $\mathcal{K}$-группу, при котором он переходит в элемент, по-прежнему отличный от единицы. Стало быть, группа G/H $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Достаточность. Теперь пусть фактор-группа G/H $\mathcal{K}$-аппроксимируема, и пусть $g \in G \backslash H$ — произвольный элемент. Тогда $gH \neq 1$ в фактор-группе G/H и существует гомоморфизм φ группы G/H на $\mathcal{K}$-группу такой, что $(gH)\varphi \neq 1$.

Обозначая через ε естественный гомоморфизм группы G на G/H, имеем $g(\varepsilon\varphi) = (gH)\varphi \neq 1 = H(\varepsilon\varphi)$. Ввиду произвольности выбора элемента g это и означает, что подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима. ∎

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Прежде всего заметим, что $G/A = BA/A \cong B/(B \cap A) \cong B$, так как $B \cap A = 1$. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость подгруппы B равносильна ввиду предложения 2 $\mathcal{K}$-отделимости в группе G подгруппы A. Тем самым установлена эквивалентность утверждений 2 и 3.

Теперь докажем, что из 1 следует 3.

Легко увидеть, что из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G и наследственности класса $\mathcal{K}$ вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость подгруппы B. Покажем, что эта подгруппа $\mathcal{K}$-отделима в G. Произвольный элемент $g \in G\backslash B$ представим в виде $g = ba$, где $a \in A\backslash\{1\}$, $b \in B$. Пользуясь $\mathcal{K}$-аппроксимируемостью группы G, мы можем указать такой ее гомоморфизм φ на $\mathcal{K}$-группу, что $a\varphi \neq 1$. Положим $N = \ker\,\varphi$, $H = N \cap A$, $K = N \cap B$ и $L = KH$.

По предложению 1 L — нормальная подгруппа группы G и $G/L \in \mathcal{K}$. Допустим, что $gL \in BL$. Тогда $g \in BL = BKH = BH$ и $g = b'h$ для подходящих элементов $b' \in B$, $h \in H$. Имеем $ba = b'h$ и $b^{-1}b' = ah^{-1} \in A \cap B$. Но $A \cap B = 1$, следовательно, $a = h \in H \leqslant N$, что противоречит выбору гомоморфизма φ. Таким образом, $gL \notin BL$, и подгруппа B $\mathcal{K}$-отделима в G.

Для завершения доказательства осталось показать, что из 3 следует 1.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Если $g \notin B$, воспользуемся $\mathcal{K}$-отделимостью подгруппы B и найдем такой гомоморфизм φ группы G на $\mathcal{K}$-группу, что $g\varphi \notin B\varphi$ и, в частности, $g\varphi \neq 1$.

Пусть $g \in B$. Тогда вследствие равенства $A \cap B = 1$ имеем $g \notin A$ и $gA \neq 1$ в фактор-группе G/A. Выше уже было отмечено, что $G/A \cong B$, а подгруппа B по условию $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Значит, найдется такой гомоморфизм φ фактор-группы G/A на $\mathcal{K}$-группу, что $(gA)\varphi \neq 1$. Тогда композиция естественного гомоморфизма ε группы G на G/A и φ будет отображать группу G на $\mathcal{K}$-группу так, что $g(\varepsilon\varphi) \neq 1$.

Таким образом, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н.* О группах конечного общего ранга // Вестник ИвГУ. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. – 2004. – Вып. 3. – С. 100–103.

2. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. ИвГУ. Математика. – 2008. – Вып. 6. – С. 29–42.

3. *Азаров Д. Н., Чижова И. В.* Об аппроксимируемости конечными p-группами расщепляемых расширений групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. – 2008. – Вып. 6. – С. 43–50.

4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. – 1958. – Т. 18. – С. 49–60.

5. *Якушев А. В.* Аппроксимируемость конечными p-группами расщепляющихся расширений групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. – 2000. – Вып. 3. – С. 119–124.

Поступила в редакцию 05.01.2010.