Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 109 – 114.

УДК 512.54

С. И. Хашин[1,2]

Экспериментальное исследование несимметричных сетей Хопфилда

Ключевые слова: распознавание образов, нейронные сети, сети Хопфилда.

В работе строится обобщение нейронных сетей Хопфилда в случае несимметричной порождающей матрицы. Доказываются их основные свойства. Сформулированы гипотезы об их поведении для случая антисимметричной и симметричной матрицы.

Keywords: distinction of images, neural networks, Hopfield networks.

We develop a generalized Hopfield neural networks for cases, where the generative matrix is symmetrical or asymmetrical; we prove their basic properties. Also we formulate conjectures about their behavior for the cases above.

1. Введение

При булевом сжатии файлов [1] код отдельного буфера содержит три поля: поле принадлежности, поле кратности, поле порядка, и еще одно, общее для всех буферов поле. В работе [2] исследовалась возможность использования методов распознавания образов для задачи разбиения файла на буферы, как составной части общей задачи сжатия файла методами булевой алгебры. Там же были рассмотрены основные методы распознавания образов, которые могут быть применены в этом случае. Один из важных методов распознавания образов — построение сетей Хопфилда, можно попытаться использовать в нашей задаче.

В настоящей работе рассматриваются некоторые варианты этого метода и его обобщения, которые могут быть полезными для решения задачи сжатия файла методами булевой алгебры.

2. Нейроны

Определение. *Нейроном* $W = \{w_0, \ldots, w_n\}$ будем называть функцию n переменных $x_1, \ldots, x_n$ вида

$$W(x_1, \ldots, x_n) = F(w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n),$$

где w_i — внутренние параметры нейрона (весовые коэффициенты). Будем считать, что передаточная функция F определена так:

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ +1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: khash2@mail.ru.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-07-00441).

В дальнейшем будем предполагать, что переменные x_i так же принимают значения ± 1. Таким образом, нейрон можно рассматривать как некоторую булеву функцию от n переменных.

Замечание. Не каждая булева функция может быть получена с помощью нейрона. Например, функция двух переменных $g(x_1, x_2)$ — исключающее "или",

$$\begin{aligned} g(0, 0) &= 0, \\ g(1, 0) &= 1, \\ g(0, 1) &= 1, \\ g(1, 1) &= 0, \end{aligned}$$

не может быть представлена никаким нейроном. Булева функция b от переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть реализована с помощью нейрона тогда и только тогда, когда множества

$$B_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) : \; b(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

и

$$B_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) : \; b(x_1, \ldots, x_n) = 1\}$$

линейно разделимы в $\mathbb{R}^n$ (при этом считаем, что $0 \in \mathbb{Z}_2$ соответствует $0 \in \mathbb{R}$, а единица из $\mathbb{Z}_2$ — единице из $\mathbb{R}$).

Два нейрона будем называть *эквивалентными*, если соответствующие булевы функции совпадают. Очевидно, что при умножении всех коэффициентов нейрона на неотрицательное число получается эквивалентный нейрон.

Следовательно, для каждого нейрона можно найти такой эквивалентный, что сумма квадратов коэффициентов равна 1. Другими словами, каждой точке n-мерной сферы соответствует некоторая булева функция.

При умножении всех коэффициентов нейрона на отрицательное число соответствующая булева функция заменяется на свое отрицание.

Нейрон будем называть *однородным*, если $w_0 = 0$. Из произвольного нейрона можно получить однородный, если добавить еще одну переменную x_0:

$$W'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = F(w_0 x_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n).$$

3. Сети Хопфилда

Нейронная сеть Хопфилда [4] состоит из $n > 1$ нейронов:

$$\begin{array}{c} w_1(x_1, \ldots, x_n) = F(a_{10} + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n(x_1, \ldots, x_n) = F(a_{n0} + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n). \end{array} \tag{1}$$

Коэффициенты всех нейронов можно объединить в одну матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(n+1) \times n$, содержащую внутренние параметры всех нейронов и называемую *порождающей* матрицей сети. Квадратную часть этой матрицы, без столбца свободных коэффициентов будем называть *основной* матрицей и обозначать $\tilde{A}$.

Выход каждого нейрона связан со входами всех нейронов. В начале мы имеем некоторый вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ состояния нейронной сети. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_i \in \{+1, -1\}$. Одна итерация сети заключается в вычислении значений $(x'_1, \ldots, x'_n)$ по формулам (1):

$$\begin{array}{l} x'_1 = F(a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = F(a_{n0} + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n). \end{array} \tag{2}$$

Из произвольного начального состояния мы будем повторять пересчет по формулам 2. Так как общее количество возможных состояний сети конечно, то через некоторое количество итераций состояния начнут повторяться через несколько шагов. Если следующее состояние окажется равно предыдущему, то мы получим неподвижную точку в пространстве состояний. Если же состояния будут повторяться через $k \geq 2$ шагов, то мы получим цикл длины k.

В работе [3] доказано, что если матрица $\tilde{A}$ симметрична и положительно определена, то сеть Хопфилда не содержат циклов длины больше 1, т. е. имеются только неподвижные точки. Обычно, при распознавании образов используют именно такие сети Хопфилда.

Однако, и сети более общего вида также могут использоваться для этих целей. Но для этого их надо изучить более подробно.

4. Симметричные и антисимметричные сети Хопфилда

Как известно [3], если матрица $\tilde{A}$ симметрична и положительно определена, то сеть Хопфилда не содержат циклов длины больше 1. Это доказывается введением величины E, которая служит аналогом энергии; точнее говоря, при каждой итерации она может только уменьшаться. Отсюда следует, что циклы длины более 1 невозможны.

В общем случае, ввиду конечности пространства состояний орбита каждой точки состоит из линейного участка, за которым следует цикл некоторой длины $k \geq 1$. Если $k = 1$, то получаем *стационарную точку*, если $k > 1$, то получаем *предельный цикл.* Стационарные точки и точки предельных циклов будем вместе называть *предельными* точками. Каждая непредельная точка в процессе итераций обязательно перейдет в одну из предельных. Множество непредельных точек, переходящих в данную предельную, естественным путем образует *дерево.*

Для каждой стационарной точки или предельного цикла можно рассмотреть множество всех исходных состояний, из которых мы приходим к этой точке или циклу. Это множество будем называть *полной орбитой.* Из сказанного выше можно понять ее устройство: к каждой предельной точке прикрепляется некоторое дерево, возможно пустое.

Типом орбиты будем называть пару чисел (a, b), где a — длина предельного цикла (равная 1 для стационарной точки) и b — общее количество непредельных точек. Таким образом, общий размер орбиты равен $a + b$. Например, пусть отображение задано следующим образом:

$$\begin{array}{llll} 0 \to 2, & 1 \to 4, & 2 \to 3, & 3 \to 1, \\ 4 \to 0, & 5 \to 4, & 6 \to 1, & 7 \to 1 \end{array}$$

(Здесь, и далее, двоичный вектор из $\mathbb{Z}_2^n$ будет записываться в виде десятичного числа.) Тогда мы получим одну-единственную орбиту типа $5 + 3$, т. е. цикл длины 5, к которому ведут пути из трех оставшихся точек.

4.1. Сети Хопфилда общего вида. Сеть Хопфилда с порождающей матрицей A не обязательно имеет только неподвижные точки. Уже при $n = 2$ матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

задает отображение $g : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$,

$$0 \to 1,\ 1 \to 2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 3,$$

т. е. имеет цикл длины два: $1 \to 2 \to 1$.

Матрица же

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

задает отображение $g : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$:

$$0 \to 1,\ 1 \to 3,\ 2 \to 0,\ 3 \to 2,$$

т. е. имеет цикл длины четыре: $0 \to 1 \to 3 \to 2 \to 0$.

При $n = 3$ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

задает отображение $g : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$, имеющее цикл длины 6. При этом циклов большей длины обнаружено не было.

При $n = 4$ можно найти такую матрицу, что соответствующая сеть Хопфилда имеет цикл длины 12:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом циклов большей длины обнаружено не было.

4.2. Симметричные и антисимметричные сети Хопфилда. Будем называть сеть Хопфилда *симметричной (антисимметричной)*, если основная матрица сети симметрична (антисимметрична). На основе изучения большого количества симметричных сетей Хопфилда, можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Для сети Хопфилда с симметричной основной матрицей $\tilde{A}$ длина каждого цикла не может быть больше* 2.

Следствие. *Если рассмотреть двойную цепь Хопфилда, в которой одной итерацией считать два обычных шага цепи, то такая сеть будет обладать лишь стационарными точками (без циклов) при любой симметричной основной матрице.*

Количество орбит в сети Хопфилда может изменяться в очень широких пределах. Наибольшее количество орбит удается построить именно для симметричных сетей. Так для $n = 2$ количество орбит может равняться 4, т. е. максимально возможному значению; например, матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

задает неподвижное (тождественное) отображение $g : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$, т. е. имеет 4 неподвижных точки.

При $n = 3$ максимально возможное количество орбит (8) также может быть достигнуто; например, матрица

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

задает неподвижное (тождественное) отображение $g : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$, т. е. имеет 8 неподвижных точек.

Можно ожидать, что и при больших значениях n удастся построить сети Хопфилда, задающие тождественное отображение. Однако, при $n = 4$ удается построить сеть Хопфилда, имеющую лишь не более 14 орбит. Например, сеть Хопфилда, задаваемая матрицей

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 0 & -12 \\ 2 & 18 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 17 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 13 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет 14 обрит, их типы:

$$\begin{gathered} 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0, \\ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0. \end{gathered}$$

При $n = 5$ можно построить сеть Хопфилда, имеющую 18 орбит:

$$\begin{pmatrix} 15 & 17 & -5 & -6 & -11 & 9 \\ 17 & 9 & -19 & -8 & 11 & 0 \\ -5 & -19 & 17 & -17 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & -17 & 11 & -3 & 1 \\ -11 & 11 & -6 & -3 & 18 & 8 \end{pmatrix};$$

их типы:

$$2+1,\ \ 2+0,\ \ 2+0,\ \ 1+3,\ \ 1+2,\ \ 1+2,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+1,$$
$$1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0.$$

Но можно найти сеть Хопфилда, имеющую 18 орбит, причем без циклов; например, сеть с матрицей

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & -2 & 11 & 12 \\ 0 & 19 & -5 & 1 & -14 & 0 \\ 3 & -5 & 16 & 2 & -14 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 19 & -1 & 13 \\ 11 & -14 & -14 & -1 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$

имеет следующие типы орбит

$$1+4,\ \ 1+4,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+1,\ \ 1+0,$$
$$1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,\ \ 1+0,$$

т. е. лишь стационарные точки, без предельных циклов.

Не менее интересные результаты получаются при рассмотрении сетей Хопфилда с антисимметричной основной матрицей. На основе изучения большого количества таких сетей можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *Для сети Хопфилда с антисимметричной основной матрицей $\tilde{A}$ без нулевых строк, длина каждого цикла будет равна* 4.

Список литературы

1. *Толстопятов А. А.* О возможности использования булевых уравнений для сжатия файлов // Вестник ИвГУ. – 2003. – Вып. 3. – С. 82–84.
2. *Толстопятов А. А.* Возможные подходы к разбиению файла на буферы при булевом сжатии // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 129–138.
3. *Cohen M. A., Grossberg S. G.* Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by compatitive neural networks // IEEE Transactions on Systems: Man and Cybernetics. – 1983. – V. 13. – P. 815–826.
4. *Hopfield J. J.* Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities // Proc. Nat. Academy of Sciencies USA. – 1982. – V. 79. – P. 2554–2558.

Поступила в редакцию 13.12.2010.