Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 41 – 46.

УДК 514.83

**Н. А. Кочева**[1], **М. А. Паринов**[2]

# Факторы Бессель-Хагена для некоторых подгрупп группы Пуанкаре

**Ключевые слова:** группа Пуанкаре, пространство Максвелла, фактор Бессель-Хагена.

Введено понятие фактора Бессель-Хагена для подгрупп группы Пуанкаре. Найдены факторы Бессель-Хагена для подгрупп размерностей 6, 5 и некоторых 4-мерных подгрупп.

**Keywords:** Poincaré group, Maxwell space, Bessel-Hagen's factor.

We introduce the concept "Bessel-hagen's factor" for subgroups of the Poincaré group. We find Bessel-hagen's factors for 6-, 5-dimensional subgroups, and for some 4-dimensional subgroups.

## 1. Введение

Представленные в работах [4, 5, 6] и [7] групповые классификации пространств Максвелла и потенциалов на пространстве Минковского позволяют ввести понятие нётерова пространства Максвелла [2]. Для таких пространств Максвелла первые интегралы уравнений Лоренца получаются непосредственным применением теоремы Нётер. Если же в классе $C_{k,l}$, соответствующем подгруппе $G_{k,l}$ группы Пуанкаре, существуют пространства Максвелла, не являющимися нётеровыми, то для получения интегралов приходится применять теорему Бессель-Хагена [8]. Для таких подгрупп естественно вводится понятие фактора Бессель-Хагена — фактор-пространства пространства внешних дифференциальных 2-форм $F$, задающих пространства Максвелла класса $C_{k,l}$, по подпространству 2-форм $dA$, внешних дифференциалов 1-форм $A$, задающих потенциалы класса $P_{k,l}$. При этом, если все пространства Максвелла класса $C_{k,l}$ нётеровы, то фактор Бессель-Хагена равен нулю. Отличие от нуля фактора Бессель-Хагена для данной подгруппы $G_{k,l}$ означает наличие в классе $C_{k,l}$ пространств Максвелла, не являющихся нётеровыми, и чем выше размерность фактора, тем таких простанств больше.

В настоящей работе найдены факторы Бессель-Хагена для подгрупп размерностей 6, 5 и некоторых 4-мерных подгрупп.

---

[1] Ивановский государственный университет; E-mail: `naduxa1312@mail.ru`.

[2] Ивановская государственная текстильная академия;
E-mail: `mihailparinov@mail.ru`.

## 2. Исходные определения

Каждой потенциальной структуре $A = A_i\,dx^i$ $(A_i = A_i(x))$ на пространстве Минковского $(M,\,g)$ (потенциалу $(M,\,g,\,A)$) можно сопоставить пространство Максвелла $(M,\,g,\,F)$, положив

$$F = dA \quad (F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{1}$$

Обратно, каждому пространству Максвелла соответствует потенциал $(M,\,g,\,A)$, для которого справедливо (1); он определен с точностью до дифференциала от скалярной функции. Говорят, что потенциальная структура $A$ *подчинена* симплектической структуре $F$, если выполнено условие (1) [3].

Пусть $G_S = G_g \cap G_F$ — группа симметрий пространства Максвелла ($G_g$ и $G_F$ — группы диффеоморфизмов многообразия $M$, не меняющих $g$ и $F$ соответственно), а $G_P = G_g \cap G_A$ — группа симметрий потенциала ($G_A$ — группа диффеоморфизмов многообразия $M$, сохраняющих $A$). Если для $(M,\,g,\,F)$ и $(M,\,g,\,A)$ выполнено (1), то $G_A \subset G_F$ и, следовательно, $G_P \subset G_S$ (см. [4]).

**Определение 1.** Пространство Максвелла $(M,\,g,\,F)$ называется *нётеровым*, если оно допускает нетривиальную группу $G_S$ и существует такой потенциал $(M,\,g,\,A)$, что $A$ подчинена $F$ и группа $G_P$ совпадает с $G_S$ [2].

Каждой группе $G_{k,l}$ — подгруппе группы Пуанкаре из списка в [1], соответствует класс $C_{k,l}$ пространств Максвелла и класс потенциалов $P_{k,l}$, допускающих эту группу. Обозначим через $\tilde{C}_{k,l}$ линейное пространство, состоящее из дифференциальных форм $F$, образующих пространства Максвелла класса $C_{k,l}$, а через $\tilde{P}_{k,l}$ — линейное пространство дифференциальных 1-форм $A$, задающих потенциалы класса $P_{k,l}$. Внешний дифференциал действует как линейный оператор из $\tilde{P}_{k,l}$ в $\tilde{C}_{k,l}$:

$$d:\ \tilde{P}_{k,l} \to \tilde{C}_{k,l} \ \ (A \mapsto F = dA). \tag{2}$$

Образ $d(\tilde{P}_{k,l})$ отображения (2) состоит из пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$. Они будут нётеровыми при условии $G_S = G_{k,l}$. Других нётеровых пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$, не существует, т. к. для потенциальной структуры $A$, подчиненной симплектической структуре $F$, всегда выполнено включение $G_A \subset G_F$, а следовательно, и $G_P \subset G_S$.

**Определение 2.** *Фактором Бессель-Хагена*, соответствующим группе $G_{k,l}$, назовем фактор-пространство $B_{k,l} = \tilde{C}_{k,l}/d(\tilde{P}_{k,l})$.

**Замечание.** Если все пространства Максвелла класса $C_{k,l}$ нётеровы, то фактор Бессель-Хагена равен нулю: $B_{k,l} = 0$; а если $d(\tilde{P}_{k,l}) = 0$, то $B_{k,l} = \tilde{C}_{k,l}$[1].

---

[1] В дальнейшем пространнства $\tilde{C}_{k,l}$ и $\tilde{P}_{k,l}$ будем обозначать как соответствующие классы, т. е. $C_{k,l}$ и $P_{k,l}$.

## 3. Основные результаты

**Предложение 1 ([2]).** *Не существует нётеровых пространств Максвелла, допускающих шестимерные подгруппы группы Пуанкаре.*

**Следствие 1.** *Факторы Бессель-Хагена для всех 6-мерных групп* $G_{6,l}$ *совпадают с классами* $C_{6,l}$: $B_{6,l} = C_{6,l}$.

**Предложение 2 ([2]).** *Пространства Максвелла классов* $C_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ *и* $C_{5,9}$ *являются нётеровыми. Не существует других нётеровых пространств Максвелла, допускающих пятимерные подгруппы группы Пуанкаре*[1].

**Следствие 2.** *Факторы Бессель-Хагена для групп* $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ *и* $G_{5,9}$ *равны нулю. Для групп* $G_{5,l}$ $(l \neq 6, 9)$ *и* $G_{5,6}$ $(\lambda = 0)$ *факторы Бессель-Хагена совпадают с классами* $C_{5,l}$: $B_{5,l} = C_{5,l}$.

Доказательство. Для групп $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $G_{5,9}$ результат следует из нётеровости пространств Максвелла классов $C_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $C_{5,9}$. Для групп $G_{5,l}$ $(l \neq 6, 9)$ и $G_{5,6}$ $(\lambda = 0)$ $d(P_{5,l}) = 0$. ∎

Для некоторых классов пространств Максвелла, допускающих 4-мерные группы $G_{4,l}$, получены следующие результаты [2].

**Предложение 3 ([2]).** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пространства Максвелла классов* $C_{4,1}$, $C_{4,4a}$ *и* $C_{4,5}$ *не являются нётеровыми.*

2. *Пространства Максвелла класса* $C_{4,4b}$ *являются нётеровыми, если* $F_{13} = 0$, *и не являются нётеровыми, если* $F_{13} \neq 0$.

3. *Пространства Максвелла класса* $C_{4,6a}$ *являются нётеровыми, если* $a_3 = a_4 = 0$, *и не являются нётеровыми, если* $a_3 \neq 0$ *или* $a_4 \neq 0$. *Пространства Максвелла класса* $C_{4,6b}$ *являются нётеровыми, если* $F_{24} = 0$, *и не являются нётеровыми, если* $F_{24} \neq 0$.

Рассмотрим группы $G_{k,l}$, для которых пространства Максвелла класса $C_{k,l}$, согласно предложению 3, не являются нётеровыми (или не все нётеровы). Для них справедливо следующее утверждение.

**Предложение 4.** *Факторы Бессель-Хагена для групп* $G_{4,1}$, $G_{4,4a}$, $G_{4,4b}$, $G_{4,5}$, $G_{4,6a}$ *и* $G_{4,6b}$ *равны соответственно:*

$$
\begin{aligned}
B_{4,1} &= C_{4,1} = \mathbb{R}^6, && \text{(3a)}\\
B_{4,4a} &= \mathbb{R}^2, && \text{(3b)}\\
B_{4,4b} &= \mathbb{R}^1, && \text{(3c)}\\
B_{4,5} &= \mathbb{R}^3, && \text{(3d)}\\
B_{4,6a} &= \mathbb{R}^2, && \text{(3e)}\\
B_{4,6b} &= \mathbb{R}^1. && \text{(3f)}
\end{aligned}
$$

---

[1] кроме пространств Максвелла, допускающих группы $G_S$, сопряженные группам $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $G_{5,9}$.

Доказательство. Класс $C_{4,1}$ состоит из однородных пространств, задаваемых тензорами $F_{ij} = \mathrm{const}$, пространство $C_{4,1} \equiv \tilde{C}_{4,1}$ 6-мерно и $d(P_{4,1}) = 0$. Отсюда следует (3a).

Докажем (3b). Пространства Максвелла класса $C_{4,4a}$ задаются тензорами $F_{ij}$ вида (см. [4, 5])

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_i = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{4}$$

и допускают группу $G_{4,4a}$, соответстующую алгебре

$$\mathcal{L}_{4,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2,\ e_1,\, e_3,\, e_2 + e_4\} \tag{5}$$

при $\lambda \neq 0$. Для потенциалов класса $P_{4,4}$ $(\lambda \neq 0)$ (см. [7])

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + C_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad A_2 = C_3, \\ &A_3 = C_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - C_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad A_4 = C_4 \quad (C_i = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{6}$$

тензор $F_{ij}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = \frac{C_1}{\lambda} \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda} \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{23} = F_{34} = \frac{C_1}{\lambda} \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda} \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ &F_{13} = F_{24} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Тензоры вида (7) образуют 2-мерное пространство $d(P_{4,4a})$, а тензоры вида (4) — 4-мерное пространство $C_{4,4a}$. Поэтому для класса Бессель-Хагена $B_{4,4a}$ справедливо равенство (3b): $B_{4,4a} = C_{4,4a}/d(P_{4,4a}) = \mathbb{R}^2$.

Теперь докажем (3c). Пространство Максвелла класса $C_{4,4b}$ соответствует алгебре (5) при $\lambda = 0$ и задается тензором $F_{ij}$ вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,\ F_{13} = \mathrm{const},\ F_{24} = \Psi(x^2 - x^4), \tag{8}$$

где $\Psi(u)$ — произвольная гладкая функция одной переменной. Для потенциалов класса $P_{4,4}$ $(\lambda = 0)$ (см. [7])

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_2(x^2 - x^4), \quad A_4 = A_4(x^2 - x^4) \tag{9}$$

имеем

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{24} = \partial_2 A_4 + \partial_4 A_2. \tag{10}$$

Совпадение компонент $F_{24}$ в (8) и (10) возможно, если положить

$$A_2 = 0, \quad A_4 = \int\limits_0^{x^2-x^4} \Psi(u)\,du. \tag{11}$$

Таким образом, пространства $C_{4,4b}$ и $d(P_{4,4b})$, задаваемые формулами (8) и (10), бесконечномерны, и справедливо равенство (3c):

$$B_{4,4b} = C_{4,4b}/d(P_{4,4b}) = \mathbb{R}^1.$$

Докажем (3d). Для потенциалов класса $P_{4,5}$

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1, \quad A_2 = C_2 \cdot (x^2 - x^4) + \frac{C_4}{x^2 - x^4}, \quad A_3 = C_3, \\ &A_4 = C_2 \cdot (x^2 - x^4) - \frac{C_4}{x^2 - x^4} \quad (C_k = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{12}$$

тензор $F_{ij}$ имеет вид

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{24} = 2C_2, \tag{13}$$

т. е. пространство $d(P_{4,5})$ 1-мерно. Пространство $C_{4,5}$ тензоров вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \quad F_{13} = b_3, \\ &F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4}, \quad F_{24} = b_4 \quad (b_k = \mathrm{const}) \end{aligned} \tag{14}$$

4-мерно. Поэтому справедливо (3d).

Докажем (3e) и (3f). Алгебре $\mathcal{L}_{4,6} = L\{e_{24}+\lambda e_3,\, e_1,\, e_2,\, e_4\}$ соответствуют класс пространств Максвелла $C_{4,6a}$ (при $\lambda \neq 0$), задаваемый тензором $F_{ij}$ вида

$$\begin{aligned} &F_{23} = a_1 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{34} = a_1 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda}, \\ &F_{12} = F_{14} = 0, \quad F_{24} = a_3, \quad F_{13} = a_4 \quad (a_i = \mathrm{const}), \end{aligned} \tag{15}$$

и класс $C_{4,6b}$ (при $\lambda = 0$), задаваемый тензором

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = F_{13}(x^3), \quad F_{24} = \mathrm{const}\,. \tag{16}$$

Для потенциалов класса $P_{4,6a}$ $(\lambda \neq 0)$

$$\begin{aligned} &A_1 = C_1, \quad A_2 = C_2 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + C_4 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \\ &A_3 = C_3, \quad A_4 = -C_2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} - C_4 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} \end{aligned} \tag{17}$$

($C_k = \mathrm{const}$) тензор $F_{ij}$ имеет вид

$$\begin{gathered}F_{23} = -\frac{C_4}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{34} = -\frac{C_4}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda} - \frac{C_2}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}, \\ F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Пространство $C_{4,6a}$ тензоров (15) 4-мерно, а пространство $d(P_{4,6a})$ тензоров (18) 2-мерно. Отсюда следует (3e). Для потенциалов класса $P_{4,6b}$ ($\lambda = 0$)

$$A_1 = A_1(x^3), \quad A_2 = 0, \quad A_3 = A_3(x^3), \quad A_4 = 0 \tag{19}$$

получим, что пространство $d(P_{4,6b})$ состоит из тензоров

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = -A_1'(x^3). \tag{20}$$

Отсюда следует справедливость (3f). ∎

## Список литературы

1. *Бельько И. В.* Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
2. *Колесова В. А., Паринов М. А.* О нётеровых пространствах Максвелла // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2007. – Вып. 1 (4). – С. 7–12.
3. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. – Иваново: ИвГУ, 1994. – 60 с.
4. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. – Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с.
5. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – Т. 10. – № 1. – С. 183–237. Англ. перев.: *Parinov M. A.* Classes of Maxwell Spaces That Admit Subgroups of the Poincare Group // Journal of Math. Sciences. – 2006. – Vol. 136. – № 4. – P. 4419–4458.
6. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 1. – С. 170–171.
7. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 177–225. Англ. перев.: *Parinov M. A.* Classification of potential structures on the Minkowski space with respect to subgroups of the Poincare Group // Journal of Math. Sciences. – 2008. – Vol. 151. – № 4. – P. 3192–3226.
8. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaltungssätze der Electrodynamic // Math. Ann. – 1921. – Bd. 84. – S. 258–276.

*Поступила в редакцию 25.11.2010.*