Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 47 – 52.

УДК 533.9

А. М. Солунин[1], **М. А. Солунин**[1], **С. А. Солунин**[1]

Об эффективной массе частицы в осциллирующем поле

Ключевые слова: уравнение движения, переменное электрическое поле.

Исследуется влияние периодического возмущения на стационарное движение частицы в среде с линейной по скорости силой трения. Особенностью предлагаемого подхода является зависимость инертной массы частицы от вязкости среды (частоты столкновений). Приводится сравнение возможных подходов к исследуемой задаче. Приведены примеры.

Keywords: equation of motion, alternating electric field.

We research the influence of periodic disturbance on the stationary motion of a paticle in a medium with linear speed friction. The feature of this approach consist in dependence of the particle inert mass of the medium viscosity (collision frequency). We compare all possible approaches to this problem and give their examples.

Если заряженная частица движется в стационарном поле $\vec{E}(\vec{r})$ и внешнем (наложенном, возмущающем) переменном поле $\vec{\varepsilon}(\vec{r})\sin(\omega t+\varphi)$ в среде с линейной по скорости силой трения $\vec{F}_{\text{тр.}} = -m\nu\vec{v}$, то уравнение движения для нее имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{\varepsilon}(\vec{r})\sin(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

Можно показать[2], что при определенных условиях, о которых будет сказано ниже, возможно усреднение правой части (1), после которого получаются стационарные уравнения движения (правая часть не зависит от времени явно):

$$m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}) + \vec{F}_{\text{доп.}}(\vec{r}). \tag{2}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{доп.}}(\vec{r})$ — дополнительная стационарная сила,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{доп.}}(\vec{r}) = \frac{1-\beta}{\nu}q\dot{\vec{E}} - \frac{1-\beta}{m\nu^2}q^2(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{\pi q}{m\omega\nu}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \\ - \frac{(\omega^2-\nu^2)\beta q^2}{2m(\omega^2+\nu^2)^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} - \frac{q^2}{2m(\omega^2+\nu^2)}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon},\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\beta = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-\nu t)dt = \frac{\omega}{\nu}\frac{1}{2\pi}\left(1-\exp\left(-2\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right).$$

---

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: solunin@yandex.ru.

[2]*Солунин А. М., Солунин М. А., Солунин С. А.* О движении в быстроосциллирующем поле // Изв. ВУЗов. Физика. – 2003. – № 10. – С. 48–52.

Выражение для дополнительной силы имеет пределы как при $\nu/\omega \to 0$,

$$\vec{F}_{\text{доп.}} = \frac{\pi q}{\omega}\dot{\vec{E}} + \frac{2}{3}\frac{\pi^2 q^2}{m\omega^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q^2}{m\omega^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}, \tag{4}$$

так и при $\omega/\nu \to 0$,

$$\vec{F}_{\text{доп.}} = \frac{q}{\nu}\dot{\vec{E}} - \frac{q^2}{m\nu^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q^2}{2m\nu^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}. \tag{5}$$

Выражению (3) предшествует предварительный результат, зависящий от начальной фазы колебаний частицы:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{доп.}}(\varphi) = \frac{1-\beta}{\nu}q\dot{\vec{E}} - \frac{(1-\beta)q^2}{m\nu^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{\pi q}{m\omega\nu}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} +\\ + \frac{(1-\beta)q^2}{m(\omega^2+\nu^2)}\Big(\frac{\omega}{\nu}\cos\varphi - \sin\varphi\Big)(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{E} +\\ + \frac{q^2}{m(\omega^2+\nu^2)}\Big(\frac{\nu}{\omega}\cos\varphi + \sin\varphi\Big)(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q^2\cos\varphi}{m\omega\nu}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} -\\ - \frac{\beta q^2}{m(\omega^2+\nu^2)^2}(\omega^2\cos^2\varphi - \nu^2\sin^2\varphi)(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} - \frac{q^2}{2m(\omega^2+\nu^2)}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}.\end{aligned} \tag{6}$$

Если принять, что на частицу случайным образом действуют цуги колебаний одинаковой частоты и амплитуды, то после усреднения по фазе из (6) получается (3). Более естественной, однако, операция усреднения выглядит для ансамбля частиц. Считая для ансамбля распределение по фазе однородным, после усреднения из (6) получим выражение (3) для дополнительной силы, действующей на частицу ансамбля в результате наложения на стационарное внешнего осциллирующего поля.

При получении приведенных выше соотношений было предположено, что за период осцилляций поля $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{\varepsilon}(\vec{r})$ меняются незначительно, так что при разложении их в ряд можно ограничиться первым приближением:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{E}(0),\ \vec{\varepsilon}(\vec{r}) = \vec{\varepsilon}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}(0). \tag{7}$$

Новая возможность в этом подходе состоит в том, чтобы скорость частицы считать функцией координат, $\vec{v}(t) = \vec{v}(\vec{r}(t))$, так что

$$\dot{\vec{v}} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}. \tag{8}$$

Эта параметризация позволяет для скорости провести то же разложение, что и для полевых величин:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}(0), \tag{9}$$

смысл которого тот же, что и в (7): за период осцилляции скорость частицы меняется незначительно.

Перенося силу трения в уравнение (1) вправо и учитывая разложения (7) и (9), запишем вместо уравнения (1) линейное уравнение

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\nu\vec{v}_0 - m\nu(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}_0 + q\vec{E}_0 + q(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{E}_0 + \\ + q\vec{\varepsilon}_0\sin(\omega t+\varphi) + q(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}_0\sin(\omega t+\varphi), \quad (10)$$

которое будем решать методом последовательных приближений. Запишем нулевое приближение

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\nu\vec{v}_0 + q\vec{E}_0 + q\vec{\varepsilon}_0\sin(\omega t+\varphi). \quad (11)$$

Его решение с начальными условиями

$$\vec{r}(0) = 0,\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 \quad (12)$$

имеет вид

$$\vec{r}(t) = -\nu\vec{v}_0\frac{t^2}{2} + \frac{q\vec{E}_0}{m}\frac{t^2}{2} - \frac{q\vec{\varepsilon}_0}{m\omega^2}\sin(\omega t+\varphi) + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2, \quad (13)$$

где

$$\vec{C}_1 = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{\varepsilon}_0}{m\omega}\cos\varphi,\ \vec{C}_2 = \frac{q\vec{\varepsilon}_0}{m\omega^2}\sin\varphi. \quad (14)$$

Подставляя решение (13) в правую часть уравнения (10) и усредняя ее по периоду осцилляцией, получим уравнение типа (2) с дополнительной силой вида[3]

$$\vec{F}_{\text{доп.}} = \frac{2}{3}\pi^2 m\frac{\nu^2}{\omega^2}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \pi m\frac{\nu}{\omega}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{2}{3}\frac{\pi^2\nu}{\omega^2}q(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{v} - \\ - \frac{\nu}{\omega^2}(\pi\cos\varphi+\sin\varphi)q(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{2}{3}\frac{\pi^2\nu}{\omega^2}q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{\pi}{\omega}q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E} + \\ + \frac{2}{3}\pi^2\frac{q^2}{m\omega^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{q^2}{m\omega^2}(\pi\cos\varphi+\sin\varphi)(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q}{\omega}\cos\varphi(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} + \\ + \frac{\nu q}{\omega^2}(\pi\cos\varphi-\sin\varphi)(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} - \frac{q}{m\omega^2}(\pi\cos\varphi-\sin\varphi)(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} - \\ - \frac{q^2}{m\omega^2}\cos^2\varphi(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} - \frac{q^2}{2m\omega^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} \quad (15)$$

или после усреднения по фазе

$$\vec{F}_{\text{доп.}} = \frac{2}{3}\pi^2 m\frac{\nu^2}{\omega^2}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \pi m\frac{\nu}{\omega}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{2}{3}\frac{\pi^2\nu}{\omega^2}q(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{v} - \\ - \frac{2}{3}\frac{\pi^2\nu}{\omega^2}q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{\pi}{\omega}q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{2}{3}\pi^2\frac{q^2}{m\omega^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q^2}{2m\omega^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}. \quad (16)$$

[3]Значок 0 у обозначений векторов $\vec{v}_0$, $\vec{E}_0$, $\vec{\varepsilon}_0$ теперь снимается.

Считая здесь скорость явной функцией времени и учитывая (8), перепишем уравнение (2) с учетом (16) в виде

$$\left[1+\pi\frac{\nu}{\omega}\left(1-\frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right]m\dot{\vec{v}}+m\nu\vec{v}=$$
$$=q\vec{E}+\left(1-\frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\frac{\pi q}{\omega}\dot{\vec{E}}+\frac{2}{3}\pi^2\frac{q^2}{m\omega^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}-\frac{q^2}{m\omega^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}. \quad (17)$$

Итак, мы имеем два способа описания влияния периодического возмущения на движение частицы. Первый представлен уравнением (2) с дополнительной силой (3), а второй — уравнением (17). Они, естественно, совпадают при $\nu = 0$, но в общем случае принципиально различаются. Особенностью второго подхода является зависимость инертной массы частицы от частоты столкновений (точнее от ν/ω). Если ввести эффективную массу

$$m_{\text{эфф.}}=\left[1+\pi\frac{\nu}{\omega}\left(1-\frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right]m, \quad (18)$$

то ее поведение в зависимости от “эффективной частоты столкновений” ν/ω приведено на графике (Рис.1). Из графика видно, что при увеличении ν/ω эффективная масса сначала растет, а потом, проходя экстремальное значение, уменьшается по параболическому закону.

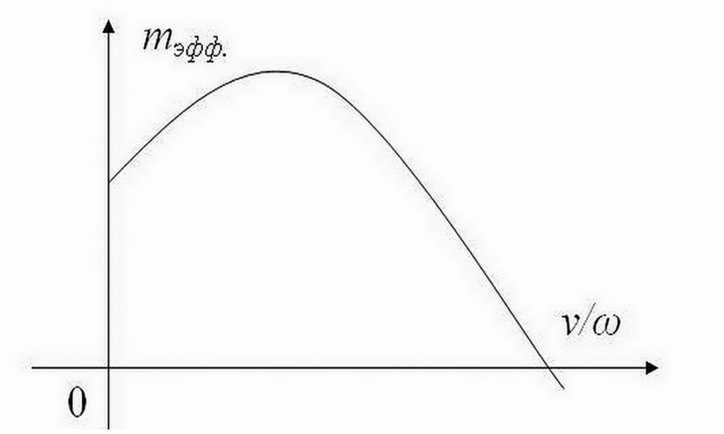

Рис. 1

Перепишем уравнение (17) в обозначениях $\vec{F}=q\vec{E},\ \vec{f}=q\vec{\varepsilon}$:

$$\left[1+\pi\frac{\nu}{\omega}\left(1-\frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right]m\dot{\vec{v}}+m\nu\vec{v}=$$
$$=\vec{F}+\left(1-\frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\frac{\pi}{\omega}\dot{\vec{F}}+\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{m\omega^2}(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{F}-\frac{1}{m\omega^2}(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{f} \quad (19)$$

и рассмотрим примеры.

1. Если на одномерный гармонический осциллятор действует внешнее возмущение вида $\vec{f_0}\sin(\omega t+\varphi)$, то при $\omega \gg \omega_0$, где ω_0 — собственная частота осциллятора, условия разложений (7) и (9) будут выполнены и уравнением движения такого осциллятора будет (19). Полагая в нем $F=-kx$,

$\omega_0^2 = k/m$ получим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{\nu + \pi\left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\frac{\omega_0^2}{\omega}}{1 + \pi\frac{\nu}{\omega}\left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)}\dot{x} + \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}{1 + \pi\frac{\nu}{\omega}\left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu}{\omega}\right)}\omega_0^2 x = 0. \tag{20}$$

Особенности этого уравнения движения при $\nu = 0$ мы описали в своей статье (см. сноску на стр. 47). Здесь заметим только, что параметры осциллятора сильно зависят от величины ν/ω.

2. На катодный слой тлеющего разряда действует возмущение вида $\vec{\varepsilon}_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Частоту возмущения можно подобрать так, что будут справедливы разложения (7) и (9). Тогда уравнения движения для электронов и положительных однозарядных ионов катодного слоя примут вид (17) (без последнего слагаемого). Принимая, что напряженность электрического поля в катодном слое меняется по закону

$$E(x) = -E_0\left(1 - \frac{x}{d}\right), \tag{21}$$

где d – ширина катодного слоя, запишем уравнения движения для электронов,

$$\left[1 + \pi\frac{\nu_e}{\omega_e}\left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu_e}{\omega_e}\right)\right] m_e\ddot{x} = eE_0\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_e\omega_e^2 d}\right) - \\ - \frac{eE_0}{d}\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_e\omega_e^2 d}\right)x - m_e\nu_e\left[1 + \left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu_e}{\omega_e}\right)\frac{\pi eE_0}{m_e\nu_e\omega_e d}\right]\dot{x}, \tag{22}$$

и положительных однозарядных ионов,

$$\left[1 + \pi\frac{\nu_i}{\omega_i}\left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu_i}{\omega_i}\right)\right] m_i\ddot{x} = -eE_0\left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_i\omega_i^2 d}\right) + \\ + \frac{eE_0}{d}\left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_i\omega_i^2 d}\right)x - m_i\nu_i\left[1 - \left(1 - \frac{2}{3}\pi\frac{\nu_i}{\omega_i}\right)\frac{\pi eE_0}{m_i\nu_i\omega_i d}\right]\dot{x}. \tag{23}$$

Предельные случаи этих выражений при $v_e = 0,\ v_i = 0$ приведены в той же статье (сноска на стр. 47):

$$m_e\ddot{x} = eE_0\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_e\omega_e^2 d}\right) - \frac{eE_0}{d}\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_e w_e^2 d}\right)x - \frac{\pi eE_0}{\omega_e d}\dot{x}, \tag{24}$$

$$m_i\ddot{x} = -eE_0\left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_i\omega_i^2 d}\right) + \frac{eE_0}{d}\left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_i w_i^2 d}\right)x - \frac{\pi eE_0}{\omega_i d}\dot{x}. \tag{25}$$

Динамическую асимметрию этих выражений подчеркивает последнее слагаемое. Если для электрона, движущегося от катода, оно играет роль силы трения, тормозящей движение электрона, то для иона, движущегося к катоду, оно, напротив, будучи направленным к катоду, ускоряет его движение. Правые части уравнений (22) и (23) отличаются от их предельных выражений (24) и (25) последними слагаемыми. Запишем их:

$$F_e = -m_e\nu_e\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_e\omega_e^2 d}\right)\dot{x} - \frac{\pi eE_0}{\omega_e d}\dot{x}, \tag{26}$$

$$F_i = m_i\nu_i\left(1 + \frac{2}{3}\pi^2\frac{eE_0}{m_i\omega_i^2 d}\right)\dot{x} - \frac{\pi eE_0}{\omega_i d}\dot{x}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что сила трения замедляет движение как электронов, так и ионов катодного слоя.

Приведенные результаты существенно меняет эффективная масса частицы (18). Если отношение ν/ω достаточно велико, то проявляется принципиальное различие в способах описания влияния осциллирующего поля на движение частицы. Оно связано с поведением эффективной массы частицы. Из графика на рис.1 видно, что она с ростом ν/ω уменьшается до нуля, а при $\nu/\omega > 1,5$ принимает отрицательное значение. Найдем предел уравнения (17) при $\nu/\omega \gg 1$:

$$m\dot{\vec{v}} - m\frac{3}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{\nu}\vec{v} = -\frac{3}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{\nu^2}q\vec{E} + \frac{q}{\nu}\dot{\vec{E}} - \frac{q^2}{m\nu^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \frac{3}{2\pi^2}\frac{q^2}{m\nu^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon} \tag{28}$$

и сравним его с уравнением (2) при $\nu/\omega \gg 1$:

$$m\dot{\vec{v}} + m\nu\vec{v} = q\vec{E} + \frac{q}{\nu}\dot{\vec{E}} - \frac{q^2}{2m\nu^2}(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \frac{q^2}{2m\nu^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}. \tag{29}$$

На первый взгляд эти уравнения противоречивы. Так в уравнении (29) второе слагаемое слева, являющееся силой трения, своим аналогом в уравнении (28) имеет силу, действующую противоположно силе трения. То же происходит с первым и последним слагаемыми справа, однако следует иметь ввиду, что вторые слагаемые справа, пропорциональные скорости движения частицы, могут в зависимости от направления движения, как это видно на примере последних слагаемых уравнений (24) и (25), играть роль сил как тормозящих, так и ускоряющих движение частицы. Поскольку эти слагаемые в общем случае нелинейны, т. е. коэффициент при скорости в них зависит от точки, в которой находится частица, то дальнейший сравнительный анализ этих уравнений затруднителен. Тем не менее мы считаем, что заключение о противоречивости уравнений (28) и (29), а вместе с ними и подходов для описания влияния внешнего периодического возмущения на движение частиц в стационарном поле, представленных уравнениями (2) и (17), является преждевременным.

Если в уравнениях (28) и (29) положить $\vec{E} = 0$ и найти скорости $\vec{v}_0$ установившегося (сила инерции равна нулю) движения, то из уравнения (28) получим

$$\vec{v}_0 = -\frac{q^2}{m^2\omega^2\nu}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}, \tag{30}$$

а из уравнения (29)

$$\vec{v}_0 = -\frac{q^2}{2m^2\nu^3}(\vec{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\varepsilon}, \tag{31}$$

т. е. первая скорость значительно превышает вторую, если ν/ω велико. Это противоречие в результатах характеризует и качественное различие в подходах: если скорость частицы меняется существенно, то более предпочтительным является подход, основанный на уравнении (17).

Поступила в редакцию 04.12.2010.