Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 53 – 58.

УДК 533.9

А. М. Солунин[1], М. А. Солунин[1], С. А. Солунин[1]

К задаче о перевернутом маятнике

Ключевые слова: уравнение движения, переменное электрическое поле.

Усредняются уравнения движения частицы в стационарном и одновременно в переменном полях. В результате получаются уравнения движения в стационарном поле с дополнительной стационарной силой. Последняя меняет физические свойства механических систем. Рассмотрен маятник с вертикально колеблющейся точкой подвеса и исследованы условия равновесия для него. Результаты сравниваются с известными.

Keywords: equation of motion, alternating electric field.

We average over time the motion equations of the particle in stationary and time-variable fields. As a result, we get motion equations for the particle in stationary field with additional stationary force; this force changes physical properties of mechanical systems. We consider the pendulum with vertically oscillating point of suspension, and research the equilibrium conditions for it. We compare results with the known ones.

Если частица движется одновременно в стационарном $F(x) = -dU/dx$ и осциллирующем $f(x)\sin(\omega t+\varphi)$ полях, то ее уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x)\sin(\omega t+\varphi), \tag{1}$$

где $x(t)$ — обобщенная координата частицы. Представляя $x(t) = X(t) + \xi(t)$, где $X(t)$ описывает "плавное" движение частицы, а $\xi(t)$ — осцилляцию, и усредняя (1) по осцилляциям [2], получим вместо (1)

$$m\ddot{X} = \frac{dU_{\text{eff}}}{dX}, \tag{2}$$

где U_{eff} — эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{4m\omega^2} f^2. \tag{3}$$

Это означает, что на частицу кроме силы F действует дополнительная стационарная сила

$$F_{\text{add}} = -\frac{1}{4m\omega^2}\frac{d}{dX} f^2. \tag{4}$$

Приведенные в [2] примеры показывают, что осциллирующее поле может качественно менять физические свойства механической системы. Так, если точка подвеса математического маятника (груз на легком стержне) совершает вертикальные колебания с частотой $\omega \gg \omega_0$, где ω_0 — собственная частота маятника, то при выполнении условия $a^2\omega^2 > 2\omega_0^2 l^2$ (a —

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: `solunin@yandex.ru`.

амплитуда колебаний точки подвеса, l — длина маятника) устойчивым является кроме положения “вертикально вниз” также положение “вертикально вверх” (перевернутый маятник). Поэтому вопрос об устойчивости как и нижнем пределе частоты осцилляции, при которой справедливо представление о дополнительной силе, крайне важны. Так, исследование на устойчивость перевернутого маятника, проведенное в [1], дает следующие результаты: при длине маятника $l = 20$ *см* и амплитуде колебаний $a = 1$ *см* верхнее положение устойчиво, если $\omega = 49\,\omega_0$.

Опираясь на метод, использованный нами в [3, 4], покажем, что возможно расширение результата (4).

1. Запишем уравнения движения частицы в стационарном поле $\vec{F}(\vec{r})$ и внешнем переменном поле $\vec{f}(\vec{r})\sin(\omega t+\varphi)$:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{f}(\vec{r})\sin(\omega t+\varphi). \tag{5}$$

Будем считать, что за период колебаний внешнего поля частица проходит расстояния, в пределах которых поля $\vec{F}(\vec{r})$ и $\vec{f}(\vec{r})$ меняются незначительно. Тогда, раскладывая их в ряд, можно ограничиться первым приближением:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{F}(0), \quad \vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(0) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{f}(0). \tag{6}$$

Подставляя это разложение в (5), получим уравнение движения в первом приближении:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{F}_0 + \vec{f}_0\sin(\omega t+\varphi) + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{f}_0\sin(\omega t+\varphi). \tag{7}$$

Это уравнение в отличие от (5) является линейным, и его можно решать методом последовательных приближений. Отбрасывая в нем справа малые слагаемые, получим уравнение движения в нулевом приближении:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 + \vec{f}_0\sin(\omega t+\varphi). \tag{8}$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t + \frac{\vec{F}_0}{2m}t^2 - \frac{\vec{f}_0}{m\omega^2}\sin(\omega t+\varphi); \tag{9}$$

постоянные интегрирования найдутся из начальных условий

$$\vec{r}(0) = 0, \ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0, \tag{10}$$

так что

$$\vec{C}_1 = \frac{\vec{f}_0}{m\omega^2}\sin\varphi, \ \vec{C}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\vec{f}_0}{m\omega}\cos\varphi. \tag{11}$$

Подставляя решение (9) уравнения (8) в правую часть (7) и усредняя его по периоду колебаний внешнего поля, получим уравнения движения вида[2]

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}_{\text{add}}(\vec{r}, \vec{v}), \tag{12}$$

[2]Значок 0, характеризующий начало разложений в ряд, у $\vec{F}_0$, $\vec{f}_0$ и $\vec{v}_0$ теперь должен быть отброшен.

где

$$\vec{F}_{\text{add}} = \frac{\pi}{\omega}\dot{\vec{F}} + \frac{\pi\cos\varphi + \sin\varphi}{m\omega^2}(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{F} + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{m\omega^2}(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{F} - \frac{\cos\varphi}{\omega}\dot{\vec{f}} -$$
$$- \frac{\cos^2\varphi}{m\omega^2}(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{f} - \frac{\pi\cos\varphi - \sin\varphi}{m\omega^2}(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{f} - \frac{1}{2m\omega^2}(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{f}. \quad (13)$$

Этот результат зависит от начальной фазы колебаний частицы, которую мы считаем ненаблюдаемой. Поэтому будем считать, что мы имеем дело с ансамблем независимых частиц, распределение по начальной фазе для которых однородно. Усредняя (13) по фазе, получим[3]

$$\vec{F}_{\text{add}} = \frac{\pi}{\omega}\dot{\vec{F}} + \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{m\omega^2}\nabla F^2 - \frac{1}{2m\omega^2}\nabla f^2. \quad (14)$$

Здесь предположено, что поля $\vec{F}(\vec{r})$ и $\vec{f}(\vec{r})$ потенциальны. С этим выражением для дополнительной силы уравнения (12) мы будем иметь дело в дальнейшем.

Таким образом, при достаточно больших частотах осциллирующего поля, когда справедливо разложение (6), зависящие явно от времени уравнения движения (5) можно преобразовать в стационарные уравнения движения (12) с дополнительной силой (14). Эти уравнения принципиально различны[4], и различие это обусловлено первым слагаемым в (14). Оно зависит от скорости частицы, поскольку $\dot{\vec{F}} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{F}$, и в зависимости от знака коэффициента перед ней частица либо теряет энергию, либо приобретает ее от внешнего источника.

Сравнение выражений (14) и (4) показывает, что кроме удвоенной силы (4) в (14) содержатся слагаемые, вызванные стационарным полем, в котором движется частица. Их роль поясним на следующем примере.

Пусть на гармонический осциллятор действует периодическое возмущение $f_0\sin(\omega t + \varphi)$, где $f_0 = \text{const}$. Уравнение движения осциллятора в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx + f_0\sin(\omega t + \varphi). \quad (15)$$

Поскольку $F = -kx$, то дополнительная сила (14) равна

$$F_{\text{add}} = -\frac{\pi}{\omega}k\dot{x} + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{m\omega^2}k^2 x, \quad (16)$$

и уравнение (12) примет вид

$$m\ddot{x} + \pi\frac{k}{\omega}\dot{x} = -k\left(1 - \frac{2}{3}\pi^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)x, \quad (17)$$

[3] Последнее слагаемое здесь совпадает при $\vec{f} = q\vec{E}$ с высокочастотным пределом (24) из [3] общего выражения силы, действующей на частицу в переменном поле.

[4] Различие действительно принципиально. Если уравнения (5) обратимы во времени, то в уравнениях (12) это свойство утрачено. Вызвано это наложением начальных условий (10) на решение (9).

где $\omega_0^2 = k/m$. Это значит, что собственная частота осциллятора станет немного меньше, поскольку должно быть $\omega \gg \omega_0$ [5], а колебания становятся затухающими.

2. Вернемся к задаче о маятнике, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания (см. [2], § 30, задача 1). На маятник действует вертикальная сила тяжести $F = mg$ и возмущение, обусловленное колебаниями точки подвеса. Если колебания имеют вид $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$, то возмущение маятника $f(t) = m\ddot{\xi}(t) = -m\omega^2\xi(t)$. Оно тоже вертикально. Проектируя эти силы на траекторию маятника, которую мы считаем дугой окружности, получим уравнение движения

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha - m\omega^2 a\,\sin\alpha\,\sin(\omega t + \varphi). \tag{18}$$

Уравнение (18) — это одномерный вариант уравнения (5) при $x = l\alpha$. Предполагая, что $\omega \gg \omega_0$, мы можем для уравнения (18) написать его стационарный аналог (12) с силой (14):

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2\left(\sin\alpha + \frac{\pi}{\omega}\cos\alpha\,\dot{\alpha} - \frac{1}{3}\pi^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin 2\alpha\right) \tag{19}$$

или, введя аргумент $\tau = \omega_0 t$,

$$\alpha'' + \pi\frac{\omega_0}{\omega}\cos\alpha\,\alpha' + \sin\alpha + \left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{3}\pi^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin 2\alpha = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) содержит два малых параметра: ω_0/ω и a/l. Наложив на них упрощающее условие

$$\frac{a}{l} \gg \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \tag{21}$$

получим окончательно

$$\alpha'' + \pi\frac{\omega_0}{\omega}\cos\alpha\,\alpha' + \sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin 2\alpha = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим малые колебания маятника относительно положений: 1) $\alpha = 0$ и 2) $\alpha = \pi$. В первом случае уравнения (22) примут вид

$$\alpha'' + \pi\frac{\omega_0}{\omega}\alpha' + \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin\alpha = 0, \tag{23}$$

а их решение с учетом условия (21):

$$\alpha(t) = A\exp\left(-\frac{1}{2}\pi\frac{\omega_0^2}{\omega}t\right)\cos\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\;\omega_0 t + B\right). \tag{24}$$

Во втором случае из (22) получим уравнение

$$\alpha'' - \pi\frac{\omega_0}{\omega}\alpha' - \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\alpha = 0; \tag{25}$$

[5] При $\omega \gg \omega_0$ правомерно разложение (6) и, следовательно, справедливо представление о дополнительной силе.

его решение с учетом (21) имеет вид

$$\alpha(t) = C\exp\left(\frac{1}{2}\pi\frac{\omega_0^2}{\omega}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}\,\omega_0 t + D\right). \qquad (26)$$

Таким образом, для маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с частотой $\omega \gg \omega_0$, возможны два положения равновесия: “вертикально вниз” ($\alpha = 0$) и “вертикально вверх” ($\alpha = \pi$). Если первое положение реализуется всегда, то второе только при следующем условии на параметры маятника:

$$\frac{a}{l} > \frac{\omega_0}{\omega}. \qquad (27)$$

Интересной особенностью этих колебаний является то, что амплитуда колебаний “вертикально вниз” затухает с течением времени, тогда как амплитуда колебаний “вертикально вверх” растет. Поскольку эти последние колебания являются условно устойчивыми, то они имеют ограниченное время существования. Такое поведение маятника является следствием незамкнутости данной механической системы (точка подвеса совершает вынужденные колебания). Сравнение этих результатов с результатами из [2] едва ли возможно, поскольку наши результаты имеют усредненный по фазе (статистический) характер и относятся к маятнику из ансамбля маятников.

3. Утверждение о ненаблюдаемости начальной фазы колебаний, справедливое для ансамбля частиц, теряет силу для отдельной частицы. В этом случае в качестве дополнительной силы выступает ее неусредненное выражение (13). Именно для этого случая мы продолжим исследование нашего маятника. Вместо уравнения (19) теперь получим

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2(\sin\alpha - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0^2}\dot{\alpha} + \frac{\pi}{\omega}\cos\alpha\,\dot{\alpha} - 2\sin\varphi\,\frac{a}{l}\sin\alpha\,\cos\alpha -$$
$$- \frac{2}{3}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin\alpha\,\cos\alpha + \left(\frac{1}{2}+\cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin\alpha\,\cos\alpha) = 0 \qquad (28)$$

или, вводя переменную $\tau = \omega_0 t$ и учитывая условие (21),

$$\alpha'' + \left(\pi\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\cos\alpha\,\alpha' + \sin\alpha +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin 2\alpha = 0. \qquad (29)$$

Запишем это уравнение для случая 1) $\alpha = 0$:

$$\alpha'' + \left(\pi\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\alpha' + \left(1 + \left(\frac{1}{2}+\cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\alpha = 0. \qquad (30)$$

Его решение с учетом (21) имеет вид

$$\alpha(t) = A\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\pi\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\omega_0 t\right)\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\;\omega_0 t + B\right). \quad (31)$$

Теперь запишем уравнение (29) для случая 2) $\alpha = \pi$:

$$\alpha'' - \left(\pi\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\alpha' - \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\alpha = 0. \quad (32)$$

Его решение с учетом (21) имеет вид

$$\alpha(t) = C\,\exp\left(\frac{1}{2}\left(\pi\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\varphi\,\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\omega_0 t\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\cos^2\varphi\right)\frac{a^2}{l^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}\;\omega_0 t + D\right). \quad (33)$$

Мы видим, таким образом, что учет начальной фазы возмущающего маятник колебания меняет не только частоту его колебаний, но и тип колебаний. Так при значениях $\cos\varphi > \pi l\omega_0^2/a\omega^2$ рост амплитуды в положении “вертикально вверх” сменится ее убыванием, а убывание амплитуды в положении “вертикально вниз” сменится ее ростом.

В заключение заметим, что выражение (14) для дополнительной силы может быть справедливо и для отдельной частицы, если на нее беспорядочно действуют цуги колебаний разной продолжительности, но одинаковой частоты. В таких условиях находятся частицы плазмы, приобретающие при ионизации и теряющие при рекомбинации один и тот же заряд.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
3. *Солунин А. М., Солунин М. А., Солунин С. А.* О силах, действующих на заряженную частицу, в переменном электрическом поле // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35. – № 14. – С. 48–53.
4. *Солунин А. М., Солунин М. А., Солунин С. А.* О движении в быстроосциллирующем поле // Изв. ВУЗов. Физика. – 2003. – №10. – С. 48–52.

Поступила в редакцию 04.12.2010.