Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 59 – 68.

УДК 512.54

А. А. Толстопятов[1,2]

Построение системы порождающих полиномов при булевом сжатии файлов

Ключевые слова: булево сжатие, булевы полиномы.

Предложен критерий, оценивающий число независимых порождающих булевых полиномов для заданного разбиения файла на буферы. Показано, что в качестве множества порождающих булевых полиномов удобно взять сами булевы переменные $x_1, \ldots, x_n$ или n булевых полиномов, кодирующих поля принадлежности каких-либо n буферов. Поставлена задача о построении разбиения файла на буферы, когда возможен второй способ построения системы порождающих полиномов. Рассмотрена возможность разбиения файла на буферы, когда множество кодирующих булевых полиномов будет меньше n.

Keywords: boolean compress, boolean polynoms.

We consider the problem of splitting a file on buffers; we offer the criterion that estimates the number of independent generators of Boolean polynomials. As we show, it is convenient to make of choice variables $x_1, \ldots, x_n$ or n Boolean polynomials (that codes belonging fields of some n buffers) as a generating set of Boolean polynomials. Also we formulate the problem of constructing such splitting of the file on buffers, when other way of constructing the system of coding polynomials is possible. At last, we consider the possibility of splitting a file on buffers, when multiple of encoding Boolean polynomials is less than n.

В [1] было предложено кодирующее уравнение, существование нетривиальных решений которого является необходимым условием возможности булева сжатия. Кодирующее уравнение позволяет определять как коэффициенты кодирующего полинома, так и коэффициенты разложения полиномов из системы порождающих по полиномам Лагранжа, а также и номера подмножеств из этой системы, которые нужно подставлять вместо булевых переменных кодирующего полинома, чтобы получить булевы полиномы, кодирующие поле принадлежности. Однако, кодирующее уравнение задается для конкретного разбиения файла на буферы, при заданном числе порождающих булевых полиномов и числе булевых переменных кодирующего полинома. Эти параметры могут варьироваться для одного и того же файла. Но это значит, что изменив эти параметры, надо снова выписывать кодирующее уравнение и проверять, имеет ли оно решение. Таким образом, использование основного адаптирующего фактора — разбиения файла на буферы упирается в необходимость полного (или почти полного) перебора, который, будучи экспоненциально большим, невозможен.

В одном из разделов работы [2] была предпринята попытка отделить задачу о построении системы кодирующих булевых полиномов от задачи о построении кодирующего полинома. Однако, полного разделения этих

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: khash2@mail.ru.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-07-00350а).

двух задач там достигнуто не было. В настоящей работе исследуется вопрос о числе порождающих булевых полиномов P при данном разбиении файла на буферы, об эффективных способах построения этих полиномов без решения кодирующего уравнения и о возможных разбиениях файла на буферы, чтобы P было минимальным для данного файла. Как показано в [3, 4], если поле кратности кодировать одним числом, то коэффициент сжатия k будет равен

$$k = \frac{N}{2^I + 2^n \cdot P + LI \log_2 P + \log_2 \prod\limits_{l=1}^{L} \frac{C_{m_l-1}^{s_l-1} m_l!}{\prod\limits_{k=1}^{s_l} n_k^l!}}, \tag{1}$$

где N — длина файла, n — длина кортежей, на которые разбит файл, L — число буферов, в которые объединены кортежи, m_l — число кортежей в l-м буфере, s_l — число разных кортежей в l-м буфере, n_k^l — число повторов в l-м буфере, I — число булевых переменных e_i кодирующего полинома $F(e_i)$, P — число порождающих булевых полиномов $\varphi_p(x_i)$, $p = 1, \ldots, P$, $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что в (1) для данного файла, его разбиение задается числами кортежей в буферах m_l, $l = 1, \ldots, L$, а числа I и P, характеризующие кодирующее уравнение, могут быть разными для одного и того же разбиения файла на буферы. Именно это обстоятельство и позволяет сначала исследовать вопрос о возможных P для фиксированного разбиения, а потом и возможных разбиениях файла. Под возможными P понимается определение минимального P для данного разбиения файла , т. к. если вычислить производную k из (1) по P, то будем иметь

$$\frac{\partial k}{\partial P} = -\frac{N(2^n P + LI \log_2 e)}{P\left(2^I + 2^n \cdot P + LI \log_2 P + \log_2 \prod\limits_{l=1}^{L} \frac{C_{m_l-1}^{s_l-1} m_l!}{\prod\limits_{k=1}^{s_l} n_k^l!}\right)^2} < 0, \tag{2}$$

и, следовательно, коэффициент сжатия монотонно убывает при убывании P. А это значит, что при прочих равных условиях нужно строить систему порождающих булевых полиномов, состоящую из минимального числа полиномов для данного разбиения файла на буферы.

1. Постановка задачи

Пусть файл разбит на кортежи длиной n битов. Кортежи объединены в L буферов, состоящих из m_l $(l = 1, \ldots, L)$ кортежей. Если в каждом буфере оставить по одному из разных кортежей, то их можно рассматривать как решения булева уравнения

$$f_l(x_i) = 0, \tag{3}$$

где $f_l(x_i)$ — L булевых полиномов от булевых переменных x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть $\varphi_p(x_i)$ $(p = 1, \ldots, P)$ — система порождающих булевых полиномов, такая, что

$$f_l(x_i) = \Phi_l(\varphi_p(x_i)). \tag{4}$$

Отвлечемся от того, что $f_l(x_i)$ должны получаться из кодирующего полинома [1]. Тогда задачи, которые будут решаться в этой работе, можно сформулировать следующим образом.

1. Для заданного множества $\{f_l(x_i)\}$ найти число порождающих полиномов P.

2. Построить систему порождающих полиномов $\{\varphi_p(x_i)\}$.

3. Найти такое разбиение файла на буферы, т. е. числа m_l, $l = 1, \ldots, L$, чтобы P было минимальным.

2. Критерий независимости булевых полиномов

Если рассматривать полиномы $f_l(x_i)$ как непрерывные и достаточно гладкие функции от x_i и построить матрицу A_i^l,

$$A_i^l = \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\,, \tag{5}$$

то число независимых полиномов среди L полиномов $f_l(x_i)$, согласно теореме о неявной функции, будет равно рангу матрицы A_i^l, т. е.

$$P = \operatorname{rank} A_i^l\,. \tag{6}$$

Условие (6) и дает критерий, позволяющий определить число порождающих булевых полиномов. Но, поскольку матрица $A_i^l = A_i^l(x_i)$, т. к. её элементы — булевы полиномы, то вычислять P, пользуясь (6), неудобно. Действительно матрица A_i^l — это матрица размерности $L \times n$, причем $L >> n$. Поэтому дальше, если рассматривать сначала только миноры порядка $n \times n$, то их будет C_L^n, или, с учетом $L >> n$, $C_L^n \approx \left(\frac{L}{n}\right)^n$, т. е. достаточно много. Если учесть, что булевы полиномы можно только складывать и умножать, но нельзя делить, то задача о приведении матрицы A_i^l к канонической форме с помощью сложения строк и столбцов оказывается довольно громоздкой. Ее можно существенно упростить, если разложить A_i^l в произведение двух матриц, причем одна, зависящая от разбиения файла, будет числовой, а вторая, зависящая от булевых переменных x_i $(i = 1, \ldots, n)$ будет универсальной, от разбиения файла не зависящей. Она не зависит и от файла и определяется только длиной кортежей n.

3. Разложение матрцы A_i^l в произведение

Пусть x_i — булева переменная. Тогда полиномами Лагранжа от x_i назовем следующие функции от x_i:

$$L_0(x_i) = x_i + 1, \quad L_1(x_i) = x_i. \tag{7}$$

Определение (7) можно перенести и на полиномы Лагранжа

$$L_j(x_i) \quad (j = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n - 1;\; i = 1,\, \ldots,\, n)$$

от n булевых переменных. Пусть j — натуральное число или 0. Записав двоичный код j в виде

$$j = \sum_{k=1}^{n} j_k \cdot 2^{k-1}\,, \tag{8}$$

определим $L_j(x_i)$ следующим образом:

$$L_j(x_i) = \prod_{k=1}^{n} L_{j_k}(x_k)\,. \tag{9}$$

Поскольку для $L_0(x_i)$ и $L_1(x_i)$ из (7) справедливо

$$L_0^2 = L_0, \quad L_1^2 = L_1, \quad L_0 \cdot L_1 = L_1 \cdot L_0 = 0, \tag{10}$$

то для $L_j(x_i)$ из (9) будет справедливо

$$L_j L_k = \delta_{jk} L_j\,, \tag{11}$$

причем в правой части (11) нет суммирования по j. Из (11) следует, что полиномы Лагранжа образуют базис главных идеалов в кольце булевых полиномов. А это значит, что полиномы f_l удобно разложить по полиномам Лагранжа:

$$f_l(x_i) = \sum_{j=0}^{2^n-1} C_j^l L_j(x_i). \tag{12}$$

В (12) коэффициенты разложения образуют числовую матрицу C_j^l размерности $L \times 2^n$ с элементами из $GF(2)$.

Подставляя (12) в (5), получим:

$$A_i^l = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{2^n-1} C_j^l \frac{\partial L_j}{\partial x_i}\,. \tag{13}$$

Если ввести обозначение

$$B_i^j = \frac{\partial L_j}{\partial x_i} \tag{14}$$

и, воспользовавшись правилом Эйнштейна, опустить знак суммы в (13), то будем иметь:

$$A_i^l = C_j^l B_i^j \quad (l = 1,\, \ldots,\, L;\; i = 1,\, \ldots,\, n), \tag{15}$$

где по $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n - 1$ предполагается суммирование. В разложении (15) A_i^l — функциональная матрица размера $L \times n$, B_i^j — функциональная матрица размера $2^n \times n$. Однако, матрица B_i^j является универсальной, т. к. она зависит ровно от длины кортежей n, на которые разбит файл, но совершенно не зависит от объединения кортежей в буферы, т. е. от разбиения файла. Более того, она не зависит от файла. Поэтому из (15) следует, что

$$P = \operatorname{rank} A_i^l = \min\{\operatorname{rank} C_j^l\,,\ \operatorname{rank} B_i^j\}. \tag{16}$$

Таким образом, согласно (16), определение числа порождающих булевых полиномов φ_p, свелось к определению рангов матриц C_j^l и B_i^j.

4. Вычисление рангов матриц A_i^l, B_i^j, C_j^l и числа порождающих булевых полиномов

Так как матрица C_j^l числовая с размерностью $L \times 2^n$, то в предположении $L >> 2^n$ найти ее ранг можно просто путем приведения к блочно-треугольному виду сложением строк. Учитывая, что $1 + 1 = 0$, всегда можно добиться того, чтобы первый столбец состоял из $L - 1$ нулей и одной единицы, второй — из $L - 2$ нулей и двух единиц и т.д. Причем все единицы в блоке размером $2^n \times 2^n$ стоят над главной диагональю этого блока. Так как $\operatorname{rank} C_j^l \le 2^n \le L$, то, если после приведения матрицы C_j^l к блочно-диагональному виду, хотя бы один блок с размером $2^n \times 2^n$ будет существовать, то

$$\operatorname{rank} C_j^l = 2^n. \tag{17}$$

А такого блока не будет только в том случае, если в результате сложения строк получится один или несколько столбцов, состоящих из одних нулей. Если число таких столбцов обозначить через w, то вместо (17) будем иметь

$$\operatorname{rank} C_j^l = 2^n - w. \tag{18}$$

Далее, B_i^j — функциональные матрицы размером $2^n \times n$. Из (9) следует, что при дифференцировании полинома Лагранжа по булевой переменной x_j из произведения полиномов Лагранжа от одной переменной в (9) вычеркивается один множитель, зависящий от x_i; это значит, что столбцы матрицы B_i^j — это удвоенный[3] набор полиномов Лагранжа, но не от n булевых переменных x_i, а от $(n-1)$-й булевой переменной. При этом полиномы Лагранжа из 1-го столбца зависят от $x_2, x_3, \ldots, x_n$, из 2-го столбца — от $x_1, x_3, \ldots, x_n$ и т. д. до n-го столбца, в котором полиномы Лагранжа зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Важно, что элементы матрицы B_i^j из разных столбцов зависят от разных булевых переменных. Это означает, что путем сложения столбцов нельзя в одной строке обратить элемент матрицы B_i^j в ноль. Так как $n < 2^n$, то

$$\operatorname{rank} B_j^l \le n, \tag{19}$$

причем в (19) неравенство будет выполнено только тогда, когда путем сложения строк матрицы B_i^j можно один или несколько столбцов сделать состоящими из одних нулей. Однако, вследствие (11) полиномы Лагранжа являются линейно независимыми. А это значит, что в каждой строке B_i^j

[3] т. е. каждый полином в столбце встречается два раза.

длиной 2^n можно в нуль обратить половину элементов, т. к. сама строка есть удвоенный набор полиномов Лагранжа от $n-1$ булевой переменной. Но тогда в (19) будет стоять знак равенства, и значит:

$$\operatorname{rank} B_j^l = n. \tag{20}$$

Из (16), (18) и (20) следует, что

$$P = \operatorname{rank} A_i^i = \min(2^n - w,\ n). \tag{21}$$

Тогда, если

$$w > 2^n - n, \tag{22}$$

то

$$P = 2^n - w; \tag{23}$$

а если

$$w < 2^n - n, \tag{24}$$

то

$$P = n. \tag{25}$$

Отметим, что неравенство (22), в отличие от (24), может выполняться только в исключительных и очень маловероятных случаях. Действительно, если взять, например, $n = 8$, то (22) будет выполнено, если из 256 столбцов матрицы C_j^l независимыми будут всего 7, 6, ..., 1, а остальные, соответственно 249, 250, ..., 255, могут быть обращены в нуль. Поэтому практически почти всегда будут выполнены неравенства (24), а значит число порождающих булевых полиномов будет определяться из (25).

5. Замена системы порождающих булевых полиномов при неизменном разбиении файла на буферы

Если L полиномов $f_l(x_i)$ могут быть выражены через P порождающих базисных полиномов $\varphi_p(x_i)$, то уменьшить P при фиксированных f_l нельзя. Однако, можно по-разному выбирать систему порождающих полиномов $\varphi_p(x_i)$.

Пусть $f_l(x_i)$ выражены через $\varphi_p(x_i)$:

$$f_l(x_i) = \Phi_l(\varphi_p(x_i)). \tag{26}$$

Введем полиномы Лагранжа от полиномов $\varphi_p(x_i)$:

$$L_l^p(\varphi_p(x_i)) = \prod_{s=1}^{P} L_{k_s}(\varphi_s), \tag{27}$$

где k_s — коэффициенты в двоичном коде k,

$$k = \sum_{s=1}^{P} k_s 2^{s-1}. \tag{28}$$

Многочлены φ_s можно разложить по полиномам Лагранжа $L_j(x_i)$:

$$\varphi_s(x_i) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \Phi_j^s L_j(x_i). \tag{29}$$

Тогда $L_k^p(\varphi_p)$ из (27) тоже можно разложить по $L_j(x_i)$. Для этого воспользуемся тем, что

$$L_{k_s}(\varphi_s) = \varphi_s + k_s + 1, \tag{30}$$

а также равенством

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} L_j(x_i) = 1. \tag{31}$$

Тогда из (27), (30), (31) будем иметь:

$$L_{k_s}(\varphi_p) = \prod_{s=1}^{p} \sum_{j=0}^{2^n-1} (\Phi_j^s + k_s + 1) L_j(x_i). \tag{32}$$

Но вследствие (11) в формуле (32) можно поменять местами произведение и сумму:

$$L_{k_s}(\varphi_p) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \left[\prod_{s=1}^{p} (\Phi_j^s + k_s + 1) \right] L_j(x_i). \tag{33}$$

Тогда, раскладывая (26) по $L_k^p(\varphi_p)$ и используя (12), будем иметь:

$$f_l(x_i) = \sum_{k=0}^{2^P-1} \beta_k^l L_k^p(\varphi_p) = \sum_{k=0}^{2^P-1} \left\{ \beta_k^l \sum_{j=0}^{2^n-1} \left[\prod_{s=1}^{P} (\Phi_j^s + k_s + 1) \right] \right\} L_j(x_i) = \\ = \sum_{k=0}^{2^n-1} C_j^l L_j(x_i). \tag{34}$$

Из (34) следует, что

$$\sum_{k=0}^{2^P-1} \left[\beta_k^l \prod_{s=1}^{P} (\Phi_j^s + k_s + 1) \right] = C_j^l\,. \tag{35}$$

Если вместо порождающих $\varphi_p(x_i)$ взять другую систему булевых полиномов $\tilde{\varphi}_p(x_i)$, то в (29), (30), (32) и (34) нужно сделать замену $\varphi_s \to \tilde{\varphi}_s$, $\Phi_j^s \to \tilde{\Phi}_j^s$, $\beta_k^l \to \tilde{\beta}_k^l$; вместо (35) будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{2^P-1} \left[\tilde{\beta}_k^l \prod_{s=1}^{P} (\tilde{\Phi}_j^s + k_s + 1) \right] = C_j^l\,. \tag{36}$$

Из (35) и (36) получаем связь между матрицами β_k^l, $\tilde{\beta}_k^l$, $\Phi_j^s, \tilde{\Phi}_j^s$:

$$\sum_{k=0}^{2^P-1} \left\{ \beta_k^l \prod_{s=1}^{P} (\Phi_j^s + k_s + 1) + \tilde{\beta}_k^l \prod_{s=1}^{P} (\tilde{\Phi}_j^s + k_s + 1) \right\} = C_j^l\,. \tag{37}$$

При заданных системах порождающих $\{\varphi_p\}$ и $\{\tilde{\varphi}_p\}$ матрицы $\{\Phi_j^s\}$ и $\{\tilde{\Phi}_j^s\}$ известны. А матрицы β_k^l и $\tilde{\beta}_k^l$, задающие зависимости (26) и

$$f_k(x_i) = \tilde{\Phi}_l(\tilde{\varphi}_p(x_i)), \tag{38}$$

связаны друг с другом соотношениями (37), которые и задают переход от одной системы порождающих булевых полиномов к другой.

6. Изменения разбиения файла

Разбиение файла на буферы задается числами кортежей в буферах m_l, $l = 1, \ldots, L$. Но, с другой стороны, при заданном файле это число однозначно определяет матрицу C_j^l. Если использовать возможность по-разному разбить файл для уменьшения P, то согласно (23) и (25), P не может быть больше n. А для того, чтобы его сделать меньше, файл должен быть разбит таким образом, чтобы из 2^n столбцов матрицы C_j^l больше чем $2^n - n$ столбцов были зависимыми от остальных. Согласно [2] строки матрицы C_j^l формируются следующим образом. Кортежи длиной n можно рассматривать как натуральные числа или 0 в двоичном коде от 0 до $2^n - 1$. Если кортеж входит в буфер (причем не важно, сколько раз), то в столбце с номером этого кортежа ставится 0, а если он не входит, то 1.

Разложение матрицы A_i^l в произведение (15) позволяет поставить задачу о построении разбиения заданного файла на такие буферы, чтобы P было минимальным. А именно, данную строку из N/n чисел от 0 до $2^n - 1$ надо разделить на L частей (буферов) по следующим правилам:

(1) в каждой части все одинаковые числа вычеркиваются; остается только по одному числу, отличающемуся от других оставленных;

(2) из каждой части формируется вектор с элементами из поля $GF(2)$ с 2^n компонентами; при этом на j-е место ставитсяя 0, если число j есть в этой части, и 1, если его там нет;

(3) число таких частей L может быть произвольным;

(4) система из L векторов должна содержать минимальное число линейно независимых векторов.

Очевидно, что поскольку файл можно разбить на буферы хотя и экспоненциально большим, но конечным числом способов, а каждый из них имеет свое P, то среди этих разбиений есть разбиение с минимальным P. Задача заключается в том, как найти это разбиение, не делая полного перебора.

7. Замечания о построении системы порождающих булевых полиномов

Для построения кода при булевом сжатии файлов необходимо задать следующие величины:

(1) разбиение файла на буферы, т. е. числа кортежей m_l в l-м буфере; это разбиение однозначно определяет систему булевых полиномов $f_l(x_l),\ l = 1, \ldots, L$;

(2) систему порождающих булевых полиномов $\varphi_p(x_i),\ p = 1, \ldots, P$;

(3) коэффициенты кодирующего полинома $F(e_i)$, зависящего от I булевых переменных $e_i,\ i = 1, \ldots, I$;

(4) L строк из номеров булевых полиномов из системы порождающих $(\varphi^l_{i_1}, \varphi^l_{i_2}, \ldots, \varphi^l_{i_I})$ по одной строке для каждого буфера, задающего замену
$$(e_1, e_2, \ldots, e_I) \to (\varphi^l_{i_1}, \varphi^l_{i_2}, \ldots, \varphi^l_{i_I}), \tag{39}$$
такую, чтобы выполнялось условие
$$F(\varphi^l_{i_k}) = f^l(x_i), \tag{40}$$
где $l = 1, \ldots, L,\quad k = 1, \ldots, I$ (условие (40) и есть кодирующее уравнение).

Если порождающие полиномы $\varphi_p(x_i),\ p = 1, \ldots, P$, определять не из кодирующего уравнения (40), а до построения кодирующего полинома $F(e_i)$, требуя, чтобы P было минимальным, то из (40) мы будем получать зависимости (26). Так как выше было показано, что наиболее вероятным является (25), т. е. что $P = n$, то открываются следующие две возможности:

(1) в качестве φ_p взять x_i, которых как раз n;

(2) в качестве φ_p взять какие-либо n из L булевых полиномов $f_l(x_i)$.

Вторая возможность открывает путь к построению такого разбиения файла на буферы, чтобы такой выбор порождающих полиномов можно было осуществить. Действительно, пусть для определенности в качестве $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ взяты $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Тогда кодирующее уравнение дает зависимости:
$$f_l = f_l(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{41}$$
где $l = n+1, n+2, \ldots, L$. Поскольку полиномы $f_l,\ l = 1, 2, \ldots, n$ задаются матрицей C^l_j из (12), где $l = 1, 2, \ldots, L$, то (41) означает, что можно из L уравнений (12), исключив 2^n полиномов Лагранжа, выразить $L-n$ булевых полиномов из $\{f_l\}$ через какие-либо n полиномов $\{f_l\}$. Сделать это можно следующим образом. Так как сами булевы переменные $x_i,\ i = 1, \ldots, n$, — это тоже булевы полиномы, то их можно записать в виде:
$$x_i = \sum_{j=0}^{2^n-1} C_{ij} L_j(x_i). \tag{42}$$

При фиксированном i матрица C_{ij} становится кортежем из 0 и 1. В этом кортеже 0 стоит на местах с такими номерами j, для которых j_k из (9) равно 0, а на местах с номерам j, для которых j_k равно 1, стоят 1. Таким образом, если C^l_j из (12) устроены так, что n уравнений из (12) могут быть решены относительно описанных выше линейных комбинаций полиномов Лагранжа $L_j(x_i)$, то тем самым из (12) и (42) получаем

$$x_i = x_i(f_l), \tag{43}$$

где для определенности можно считать, что не только $i = 1, 2, \ldots, n$, но и $l = 1, 2, \ldots, n$. Теперь, если (43) подставить в (9), а результат — в оставшиеся $L - n$ уравнений (12), то мы и получим (41).

Эта вторая возможность выбора системы порождающих булевых полиномов привлекательна тем, что она не только упрощает запись и решение кодирующего уравнения (40), но и дает критерий разбиения файла на буферы.

Список литературы

1. *Толстопятов А. А.* О возможности использования булевых уравнений для сжатия файлов // Вестник ИвГУ. – 2003. – Вып. 3. – С. 82–84.
2. *Толстопятов А. А.* Алгоритм кодирования и декодирования поля принадлежности при булевом сжатии файлов // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2008. – Вып. 1 (5). – С. 53–76.
3. *Толстопятов А. А.* Возможные подходы к разбиению файла на буферы при булевом сжатии // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. – 2009. – Вып. 1 (6). – С. 129–138.
4. *Толстопятов А. А., Гришко М. Е.* Быстрый алгоритм кодирования и декодирования поля кратности одним числом при булевом сжатии файлов // Вестник ИвГУ. – 2009. – Вып. 2. – С. 45–52.

Поступила в редакцию 15.12.2010