Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 83 – 96.

УДК 517.946

Н. Г. Томин[1]

Восстановление несимметричного потенциала по смеси спектров в обратной задаче для степени оператора Лапласа на прямоугольнике

Ключевые слова: обратные задачи, потенциал, степень оператора Лапласа, прямоугольник, граничные задачи, спектр.

Доказывается теорема существования и единственности в обратной задаче спектрального анализа для степени $\alpha > 5/2$ оператора Лапласа на прямоугольнике Π в случае смешанных граничных задач (на некоторых сторонах прямоугольника заданы условия Дирихле, а на остальных – условия Неймана) и комплекснозначного квадратично суммируемого несимметричного потенциала. Рассматривается восстановление проекций потенциала на различные бесконечномерные подпространства пространства $L^2(\Pi)$ по смесям частей спектров различных смешанных задач. При этом весь потенциал восстанавливается по 4 спектрам или по смеси 16 спектров.

Keywords: inverse problems, potential, power of the Laplace operator, rectangle, boundary problems, spectrum.

We prove the existence and uniqueness theorem in the inverse problem of spectral analysis for a power $\alpha > 5/2$ of the Laplace operator on the rectangle Π with mixed boundary conditions (on every side of Π either the Dirichlet boundary condition or the Neumann boundary condition is given) and a quadratically summable, complex valued, nonsymmetric potential. We consider the reconstruction of the projections of the potential on different infinite-dimensional subspaces in $L^2(\Pi)$ by the mix of some parts of different spectra. In particular, the whole potential is reconstructed by 4 spectra or by the mix of 16 spectra.

1. Нашей целью является восстановление квадратично суммируемого потенциала по четырем спектрам или по смеси шестнадцати спектров в обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике. По тематике и методам настоящая статья примыкает к работам [2], [4] и [6].

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|_2$ — скалярное произведение и норма в $L^2(\Pi)$. Рассмотрим все возможные 16 спектральных смешанных граничных задач, в каждой из которых на некоторых сторонах прямоугольника Π задано условие Дирихле, а на остальных — условие Неймана. Эти задачи содержатся, например, в [8], но для их описания мы будем использовать более удобные обозначения [7].

[1]Ивановская государственная текстильная академия;
E-mail: nikolay.tomin@gmail.com.

Любое целое число $s \in X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ однозначно представляется в виде

$$s = 8i_1 + 4i_2 + 2i_3 + i_4, \tag{1}$$

где числа i_1, i_2, i_3, i_4 равны 0 или 1. Полагаем $r_1 = |i_1 - i_3|$, $r_2 = |i_2 - i_4|$, $r_3 = i_3$, $r_4 = i_4$. При $s \in X$ через M_s обозначаем самосопряженный неотрицательный оператор в $L^2(\Pi)$, порожденный спектральной граничной задачей

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } \Pi, \quad r_j u + (1 - r_j)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } l_j \ \ (j = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

где ν — внутренняя нормаль к границе $\partial\Pi = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ прямоугольника Π; $l_1 = \{(a,t) : \ 0 \le t \le b\}$, $l_2 = \{(t,b) : \ 0 \le t \le a\}$, $l_3 = \{(0,t) : \ 0 \le t \le b\}$, $l_4 = \{(t,0) : \ 0 \le t \le a\}$ — стороны прямоугольника Π. В частности, при $s = 0$ получаем задачу Неймана, а при $s = 3$ — задачу Дирихле.

Разобьем все 16 смешанных граничных задач (2) на 4 класса, каждый из которых содержит 4 задачи. А именно, будем говорить, что спектральная граничная задача (2) и соответствующий ей оператор M_s принадлежат классу X_k, если $s \in X_k$, где $X_k = \{4k + j : \ j = 0, 1, 2, 3\}$ при $k = 0, 1, 2, 3$. Заметим, что граничные задачи Дирихле и Неймана принадлежат одному и тому же классу X_0.

Пусть $s \in X$,

$$u_{mn}(s) = u_{mn}(x, y; s) = 2\sqrt{\gamma_{m+i_1}\gamma_{n+i_2}/(ab)} \times \\ \times \cos[\pi(m + i_1/2)x/a - \pi i_3/2] \cos[\pi(n + i_2/2)y/b - \pi i_4/2],$$

где $\gamma_0 = 1/2$, $\gamma_j = 1$ при $j \ne 0$, $(x, y) \in \Pi$, $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нетрудно проверить[2], что при $\alpha > 0$ $U_s = \{u_{mn}(s) : \ (m, n) \in J(s)\}$ есть ортонормированная полная система в $L^2(\Pi)$, состоящая из собственных функций $u_{mn}(s)$ оператора $T_s = M_s^\alpha$, соответствующих его собственным числам $\lambda_{mn}(s) = [\pi^2 M^2/(4a^2) + \pi^2 N^2/(4b^2)]^\alpha$. Здесь и далее $J(s) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m \ge i_3(1 - i_1) \text{ и } n \ge i_4(1 - i_2)\}$,

$$M = 2m + i_1, \ N = 2n + i_2. \tag{3}$$

Если a^2/b^2 — иррациональное число, то все собственные числа оператора T_s являются простыми. Пусть $\{\lambda_j(s)\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех собственных чисел оператора T_s, занумерованных в порядке возрастания; $u_j(s)$ — собственная функция из U_s, соответствующая собственному числу $\lambda_j(s)$; $\sigma(T_s) = \{\lambda_j(s) : \ j \in \mathbb{N}\}$ — спектр оператора T_s; $\Omega(s) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T_s)$ — резольвентное множество оператора T_s; при любом $j \in \mathbb{N}$ $\Delta\lambda_j(s) = \lambda_{j+1}(s) - \lambda_j(s)$; $d_j(s)$ есть расстояние от $\lambda_j(s)$ до остальной части спектра оператора T_s, т. е. $d_1(s) = \Delta\lambda_1(s)$ и $d_j(s) = \min\{\Delta\lambda_{j-1}(s), \Delta\lambda_j(s)\}$ при $j \ge 2$.

[2]см., например, [7].

Если иррациональное число a^2/b^2 является алгебраическим, то с помощью теоремы Туэ – Зигеля – Рота и теоремы Лагранжа аналогично [3], где рассмотрен случай задачи Дирихле $s = 3$, получаем, что при любом $s \in X$ и всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$d_j(s) \geq 2C_1 j^{\nu}, \tag{4}$$

при этом в качестве ν можно взять любое число, меньшее $\alpha - 2$; постоянная $C_1 > 0$ не зависит от j и s. Так как $\lambda_j(s) \sim (4\pi j/(ab))^{\alpha}$ при $j \to +\infty$, то из (4) следует

$$d_j(s) \geq C_2 \lambda_{j+1}^{q}, \tag{5}$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от j и s, $q = \nu/\alpha$. Отметим, что при $\alpha > 2$ и $0 < \nu < \alpha - 2$ выполняется неравенство $0 < q < 1$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L^2(\Pi)$, $\tilde{T}_s \equiv \tilde{T}_s(p) = T_s + P$, $R_\lambda(s) = (T_s - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T_s (E — единичный оператор в $L^2(\Pi)$), $\tilde{R}_\lambda(p, s) = (\tilde{T}_s - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $\tilde{T}_s$, $Q_\lambda(p, s) = P R_\lambda(s)$. Операторы T_s и $\tilde{T}_s$ относим к классу X_k, если $s \in X_k$. Через $\|\cdot\|$, $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ обозначаем соответственно обычную норму ограниченного линейного оператора в $L^2(\Pi)$, ядерную норму (для ядерного оператора в $L^2(\Pi)$) и абсолютную норму (для оператора Гильберта–Шмидта в $L^2(\Pi)$); свойства ядерных операторов и операторов Гильберта–Шмидта см. в [1].

2. Всюду в настоящем разделе число s из X является произвольным, но фиксированным, поэтому для краткости зависимость от параметра s в обозначениях опускаем. Таким образом, вместо $d_j(s)$, $\tilde{R}_\lambda(p, s)$, T_s, … пишем d_j, $\tilde{R}_\lambda(p)$, T, …

Лемма 1. *Для любых $\alpha > 2$, $\lambda \in \Omega$, $\nu \in (0, \alpha - 2)$, $p \in L^2(\Pi)$ имеем*

$$\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|}, \quad |R_\lambda|_2^2 \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|^2} + \frac{C_3}{k^{2\nu}}, \quad |Q_\lambda(p)|_2 \leq A_1 \|p\|_2 |R_\lambda|_2, \tag{6}$$

где λ_k — ближайшее к λ собственное число оператора T, $A_1 = 2/\sqrt{ab}$, постоянная $C_3 > 0$ не зависит от λ, s, l.

Доказательство. Первое равенство (6) очевидно. Перейдем к оценке квадрата абсолютной нормы резольвенты оператора T. Пусть

$$a_k = (\lambda_k + \lambda_{k+1})/2 \ \text{ при } \ k \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ a_0 = -\infty.$$

Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $a_{k-1} < \operatorname{Re} \lambda \leq a_k$. Отсюда следует неравенство

$$|R_\lambda|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|^2} \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|^2} + \left(\sum_{j \in \omega_k} + \sum_{j \in \omega_k'} \right) \frac{1}{(b_k(\lambda_j) - \lambda_j)^2}, \tag{7}$$

где $b_k(x) = a_{k-1}$ при $k \geq 2$ и $\lambda_1 \leq x < a_{k-1}$, $b_k(x) = a_k$ при $k \geq 1$ и $x > a_k$; $\omega_k = \mathbb{N} \setminus \{1,\, k-1,\, k,\, k+1\}$; $\omega_1' = \{2\}$, $\omega_k' = \{1,\, k-1,\, k+1\}$ при $k \geq 2$.

Функция $g_k(x) = x^{-q}(b_k(x) - x)^{-2}$ положительна и непрерывна на промежутке $(a_k,\, +\infty)$ при $k \geq 1$ и на промежутке $[\lambda_1,\, a_{k-1})$ при $k \geq 2$. При $k \geq 1$ функция $g_k(x)$ убывает на $(a_k,\, +\infty)$ от $+\infty$ до 0. При $k \geq 2$ функция $g_k(x)$ возрастает до $+\infty$ на промежутке $[x_k,\, a_{k-1})$, где $x_k = \max\{\lambda_1,\, a_{k-1}q/(q+2)\}$ и, кроме того, при $x_k > \lambda_1$ убывает на промежутке $[\lambda_1,\, x_k]$. Учитывая эти свойства функции $g_k(x)$, неравенство $0 < q < 1$, неравенство (5) а также неравенства $d_j \leq \Delta\lambda_{j-1}$ при $j \geq 2$ и $d_j \leq \Delta\lambda_j$ при $j \geq 1$, получаем

$$\sum_{j \in \omega_k} \frac{1}{(b_k(\lambda_j) - \lambda_j)^2} \leq \frac{1}{C_2} \sum_{j \in \omega_k} g_k(\lambda_j) d_j \leq \frac{1}{C_2} \int\limits_{F_k} g_k(x)\, dx, \tag{8}$$

где $F_k = (\lambda_1,\, \lambda_{k-1}] \cup [\lambda_{k+1},\, +\infty)$ при $k \geq 4$ и $F_k = [\lambda_{k+1},\, +\infty)$ при $k = 1,\, 2,\, 3$.

Полагая $y = (a_{k-1} - x)/a_{k-1}$ с учетом эквивалентности

$$\int\limits_v^1 \frac{dy}{(1-y)^q y^2} \sim \frac{1}{v} \qquad (v \to +0)$$

и предельного соотношения

$$v_k \equiv \Delta\lambda_k/(2a_k) = (1 - \lambda_k/\lambda_{k+1})/(1 + \lambda_k/\lambda_{k+1}) \to +0 \ \ (k \to \infty)$$

находим, что при всех $k \geq 4$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_{k-1}} \frac{dx}{(a_{k-1} - x)^2 x^q} \leq \frac{1}{a_{k-1}^{q+1}} \int\limits_{v_{k-1}}^{1} \frac{dy}{(1-y)^q y^2} \leq \frac{C_4}{k^{2\nu}}, \tag{9}$$

где положительная постоянная C_4 не зависит от k.

Далее, при любом $k \in \mathbb{N}$ с помощью замены переменной интегрирования $y = (x - a_k)/a_k$ получаем

$$\int\limits_{\lambda_{k+1}}^{+\infty} \frac{dx}{(x - a_k)^2 x^q} = \frac{1}{a_k^{q+1}} \int\limits_{v_k}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)^q y^2} \leq \frac{1}{a_k^{q+1} v_k} \leq \frac{C_5}{k^{2\nu}}, \tag{10}$$

где положительная постоянная C_5 не зависит от k.

Так как для любого $j \in \omega_k'$ имеем $|b_k(\lambda_j) - \lambda_j| \geq d_k/2$, то

$$\sum_{j \in \omega_k'} \frac{1}{(b_k(\lambda_j) - \lambda_j)^2} \leq \frac{3}{C_1^2 k^{2\nu}}. \tag{11}$$

Из (7)–(11) и первого равенства (6) вытекает вторая оценка (6).

Система $U = \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной в $L^2(\Pi)$, причем при всех $j \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \Pi$ имеем $|u_j(x, y)| \le A_1$, $\|Pu_j\|_2 \le A_1\|p\|_2$ и $Q_\lambda(p)u_j = Pu_j/(\lambda_j - \lambda)$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Q_\lambda(p)u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|Pu_j\|_2^2}{|\lambda_j - \lambda|^2} \le A_1^2\|p\|_2^2|R_\lambda|_2^2.$$

Следовательно, $Q_\lambda(p)$ есть оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(\Pi)$ и $|Q_\lambda(p)|_2 \le A_1\|p\|_2|R_\lambda|_2$. ■

Полагаем

$$\eta = \frac{C_1}{2A_1\sqrt{1 + C_1^2C_3}}\,, \quad \overline{\Omega}\,' = \overline{\Omega}\,'(s) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_j| \ge C_1 \ \forall\, j \in \mathbb{N}\},$$

$\Gamma_k = \Gamma_k(s) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| = r_k\}$, где $r_k = C_1k^\nu$. Так как ввиду (4) имеем $C_1 \le r_k \le d_k/2$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ $\Gamma_k \subset \overline{\Omega}\,'$, и при различных k замкнутые круги, ограниченные окружностями Γ_k, не имеют общих точек.

Лемма 2. 1) *Для любого $k \in \mathbb{N}$ всюду на окружности Γ_k справедливы соотношения*

$$\|R_\lambda\| = \frac{1}{r_k} = \frac{1}{C_1k^\nu}, \quad |R_\lambda|_2 \le \frac{C_6}{k^\nu}, \tag{12}$$

где постоянная $C_6 = \sqrt{1/C_1^2 + C_3} = 1/(2A_1\eta)$ не зависит от k и s.

2) *Если $\|p\|_2 < \eta$, $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$ и $l \in \{1,\, 2\}$, то*

$$|Q_\lambda(p)|_2 \le \frac{\|p\|_2}{2\eta} < \frac{1}{2}, \quad \|\tilde{R}_\lambda(p)\| \le 2\|R_\lambda\|, \quad |\tilde{R}_\lambda(p)|_l \le 2|R_\lambda|_l. \tag{13}$$

Доказательство. Утверждение 1) вытекает непосредственно из первых двух соотношений (6). Далее, согласно второй оценке (6) всюду на $\overline{\Omega}\,'$ имеем $|R_\lambda|_2 \le C_6$, поэтому ввиду третьей оценки (6) для всех $\lambda \in \overline{\Omega}\,'$ при $\|p\|_2 < \eta$ получаем $|Q_\lambda(p)|_2 \le C_6A_1\|p\|_2 = \|p\|_2/(2\eta) < 1/2$, и первое соотношение (13) доказано. Отсюда и из формулы разложения $\tilde{R}_\lambda(p)$ в ряд Неймана

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j Q_\lambda^j(p) \quad (\lambda \in \overline{\Omega}\,')$$

следуют второе и третье неравенства (13). Лемма доказана. ■

Так как $\tilde{R}_\lambda(p)$ при $\|p\|_2 < \eta$ является ядерным и, следовательно, компактным в $L^2(\Pi)$ оператором, то при таких p оператор $\tilde{T}$ дискретен; его спектр $\sigma(\tilde{T})$ представляет собой последовательность комплексных чисел $\{\mu_j(p)\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $\mu_j(p) \equiv \mu_j(p, s) \to \infty$ при $j \to \infty$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}$, для которого $|\mu_j(p) - \lambda_k| < C_1$.

Из операторного тождества $\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - \tilde{R}_\lambda(p)Q_\lambda(p)$ $(\lambda \in \overline{\Omega}\,')$ с учетом леммы 2 получаем следующую оценку нормы разности проекторов Рисса:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} \tilde{R}_\lambda(p)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda\, d\lambda \right\| = \frac{1}{2\pi}\left\| \int\limits_{\Gamma_k} \tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda(p)\, d\lambda \right\| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k} \|\tilde{R}_\lambda(p)\| \|Q_\lambda(p)\|\, |d\lambda| \le r_k \cdot \frac{2}{r_k} \cdot \frac{\|p\|_2}{2\eta} = \frac{\|p\|_2}{\eta}.$$

Если $\|p\|_2 < \eta$, то норма разности проекторов Рисса меньше 1, поэтому соответствующие корневые подпространства оператора $\tilde{T}$, как и у оператора T, являются одномерными, а его спектр — однократным, и при соответствующей нумерации собственных чисел оператора $\tilde{T}$ имеем $|\mu_j(p) - \lambda_j| < C_1$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Применим оператор следа к операторному тождеству

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - R_\lambda Q_\lambda(p) + \tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda^2(p) \quad (\lambda \in \overline{\Omega}\,'),$$

после чего умножим обе части полученного равенства на $(\lambda_k - \lambda)/(2\pi i)$ и проинтегрируем в положительном направлении по окружности Γ_k при любом $k \in \mathbb{N}$. Получим числовое равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, \tilde{R}_\lambda(p)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, R_\lambda\, d\lambda -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, [R_\lambda Q_\lambda(p)]\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, \left[\tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda^2(p)\right] d\lambda$$

или, что то же самое (см., напр., [6]),

$$\mu_k(p) = \lambda_k + (Pu_k, u_k) + \beta_k(p), \tag{14}$$

где

$$\beta_k(p) \equiv \beta_k(p, s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, \left[\tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda^2(p)\right] d\lambda\,. \tag{15}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем при $\|p_j\|_2 < \eta$ $(j = 1,\, 2)$:

$$|\beta_k(p_1) - \beta_k(p_2)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\Gamma_k} (\lambda_k - \lambda)\, \mathrm{Sp}\, \left[\tilde{R}_\lambda(p_1) Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) Q_\lambda^2(p_2)\right] d\lambda \right| \le$$
$$\le r_k^2 \max_{\Gamma_k} \left| \tilde{R}_\lambda(p_1) Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) Q_\lambda^2(p_2) \right|_1 .$$

Дальнейшие оценки проводим аналогично доказательству леммы 5 в работе [6]. При этом используем известные свойства ядерных операторов и операторов Гильберта–Шмидта (см. [1]), в частности, неравенство $|AB|_1 \le |A|_2|B|_2$ для операторов Гильберта–Шмидта A и B. Всюду на Γ_k получаем

$$\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2) = [\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)]Q_\lambda^2(p_1) + \\ + \tilde{R}_\lambda(p_2)[Q_\lambda(p_1)Q_\lambda(p_1-p_2) + Q_\lambda(p_1-p_2)Q_\lambda(p_2)],$$

поэтому

$$\left|\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)\right|_1 \le \|\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)\| \cdot |Q_\lambda(p_1)|_2^2 + \\ + \|\tilde{R}_\lambda(p_2)\| \cdot |Q_\lambda(p_1-p_2)|_2 \cdot [|Q_\lambda(p_1)|_2 + |Q_\lambda(p_2)|_2].$$

Так как

$$\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) = \tilde{R}_\lambda(p_1)(P_2 - P_1)\tilde{R}_\lambda(p_2) = \\ = \tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda(p_2-p_1)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m Q_\lambda^m(p_2),$$

то на Γ_k имеем $\|\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)\| \le 2\|\tilde{R}_\lambda(p_1)\| \cdot \|Q_\lambda(p_2-p_1)\|$, и с учетом лемм 1 и 2 находим

$$|\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)|_1 \le \\ \le |Q_\lambda(p_1-p_2)|_2 \Big\{2\|\tilde{R}_\lambda(p_1)\| \cdot |Q_\lambda(p_1)|_2 \cdot (1/2) + \\ + \|\tilde{R}_\lambda(p_2)\| \cdot [|Q_\lambda(p_1)|_2 + |Q_\lambda(p_2)|_2]\Big\} \le \\ \le 4A_1^2\|R_\lambda\| \cdot |R_\lambda|_2^2 \cdot [\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2] \cdot \|p_1 - p_2\|_2.$$

Следовательно, при $\|p_j\|_2 < \eta$ и любом $k \in \mathbb{N}$ с помощью (12) получаем

$$|\beta_k(p_1) - \beta_k(p_2)| \le C_7\,[\|p_1\|_2 + \|p_2\|_2] \cdot \|p_1 - p_2\|_2 k^{-\nu}, \tag{16}$$

где положительная постоянная $C_7 = 4A_1^2C_1C_6^2 = C_1/\eta^2$ не зависит от p_1, p_2, k и s.

3. Так как оценка (16) справедлива при всех $s \in X$, то из нее вытекает

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 5/2$, $1/2 < \nu < \alpha - 2$, $\|p_j\|_2 < \eta$ $(j = 1, 2)$, $s_k \in X$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k(p_1, s_k) - \beta_k(p_2, s_k)|^2} \le C_8\,[\|p_1\|_2 + \|p\|_2] \cdot \|p_1 - p_2\|_2, \tag{17}$$

где

$$C_8 = C_7 \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2\nu}} > 0.$$

Разложим функцию $p(x,y)$ в сходящийся в $L^2(\Pi)$ двойной ряд Фурье по полной ортогональной на Π системе функций

$$V = \left\{ \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b} : \ (M,\, N) \in \mathbb{N}_0^2 \right\}.$$

Имеем

$$p(x,y) = \sum_{M,N=0}^{\infty} \gamma_M \gamma_N p_{MN} \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b}, \tag{18}$$

где коэффициенты Фурье функции $p(x,y)$ по этой системе имеют вид

$$p_{MN} = \frac{4}{ab} \iint\limits_{\Pi} p(x,y) \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b} \, dxdy. \tag{19}$$

Для $F \subset \mathbb{N}_0^2$ через $H(F)$ обозначаем подпространство гильбертова пространства $L^2(\Pi)$, имеющее в качестве ортогонального базиса подсистему

$$\left\{ \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b} : \ (M,N) \in F \right\}$$

системы V. В частности, $H(\mathbb{N}_0^2) = L^2(\Pi)$.

Отнесем множество G, содержащееся в $\mathbb{N}^2$, к классу W (пишем $G \in W$), если для любого $(M_0,\, N_0) \in G$ множества $\{N \in \mathbb{N} : \ (M_0,\, N) \in G\}$ и $\{M \in \mathbb{N} : \ (M,\, N_0) \in G\}$ являются бесконечными. Классу W принадлежат все множества вида $J_1 \times J_2$, где J_1 и J_2 — бесконечные подмножества $\mathbb{N}$; в частности, ему принадлежит все множество $\mathbb{N}^2$. Если $G \in W$, то полагаем $G_0 = G \cup I_1 \cup I_2 \cup \{(0,\, 0)\}$ и $H_0 = H_0(G) \equiv H(G_0)$, где $I_1 = \{(M,\, 0) : \ \exists\ (M,\, N) \in G\}$ и $I_2 = \{(0,\, N) : \ \exists\ (M,\, N) \in G\}$.

Пусть $G \in W$. Отнесем двойную числовую последовательность

$$S = \{s_{MN}\}_{(M,N) \in G}$$

к классу $Y(G)$, если для любого $(M,N) \in G$ имеем $s_{MN} \in X_k$, где $k = 2i_1 + i_2$, а числа i_1, i_2 из множества $\{0,\, 1\}$ (также, как целые неотрицательные числа m и n) находятся по M и N согласно формуле (3). Иначе говоря, s_{MN} находится по формуле (1), где числа i_1, i_2 определены выше, а числа $i_3 = i_3(M,N)$ и $i_4 = i_4(M,N)$ для каждой упорядоченной пары $(M,N) \in G$ выбираются произвольным образом из множества $\{0,\, 1\}$.

Пусть $G \in W$ и $S = \{s_{MN}\}_{(M,N) \in G}$ принадлежит классу $Y(G)$. Будем говорить, что двойная последовательность комплексных чисел

$$\xi = \{\xi_{MN}\}_{(M,N) \in G}$$

принадлежит классу $Z(G,S)$, если

$$\xi_{MN} = \lambda_{mn}(s_{MN}) + A + B_M + D_N + E_{MN} \quad ((M,N) \in G), \tag{20}$$

где целые неотрицательные числа m и n находятся по M и N согласно (3), а A, B_M, D_N, E_{MN} — какие-либо комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{\Lambda(\xi)}{\sqrt{ab}} \equiv \sqrt{|A|^2 + 2\sum_{(M,0)\in I_1}|B_M|^2 + 2\sum_{(N,0)\in I_2}|D_N|^2 + 4\sum_{(M,N)\in G}|E_{MN}|^2} < +\infty, \tag{21}$$

которое равносильно условию сходимости трех рядов под знаком квадратного корня в (21).

Представление любой двойной числовой последовательности ξ класса $Z(G,S)$ в виде (20) при условии (21) является единственным, так как из (20) и из сходимости рядов в (21) следует существование выписанных ниже пределов и справедливость формул при $\tilde{\xi}_{MN} = \xi_{MN} - \lambda_{mn}(s_{MN})$:

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{\substack{(M,N)\in G\\ M,N\to\infty}} \tilde{\xi}_{MN}, \\ B_M = \lim\limits_{\substack{(M,N)\in G\\ N\to\infty}} (\tilde{\xi}_{MN} - A) \quad ((M,0)\in I_1), \\ D_N = \lim\limits_{\substack{(M,N)\in G\\ M\to\infty}} (\tilde{\xi}_{MN} - A) \quad ((N,0)\in I_2), \\ E_{MN} = \tilde{\xi}_{MN} - A - B_M - D_N \quad (M,N)\in G. \end{cases} \tag{22}$$

Если $s \in X$, $(m,\, n) \in J(s)$ и $\lambda_{mn}(s) = \lambda_k(s)$, где $k \in \mathbb{N}$, то полагаем $\mu_{mn}(p,\, s) = \mu_k(p,\, s)$. Таким образом, для всех $(m,\, n) \in J(s)$ имеем $|\mu_{mn}(p,\, s) - \lambda_{mn}(s)| < C_1$. Пусть $G \in W$, $S \in Y(G)$, $p \in H_0$. Если $\|p\|_2 < \eta$, то согласно (14), (15) при любых $(M,\, N) \in G$ имеем

$$\mu_{mn}(p,\, s_{MN}) = \lambda_{mn}(s_{MN}) + (Pu_{mn}(s_{MN}),\, u_{mn}(s_{MN})) + \beta_{mn}(p,\, s_{MN}), \tag{23}$$

где

$$\beta_{mn}(p,\, s_{MN}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{mn}(s_{MN})} (\lambda_{mn}(s_{MN}) - \lambda)\ \mathrm{Sp}\left[\tilde{R}_\lambda(p, s_{MN}) Q_\lambda^2(p, s_{MN})\right] d\lambda, \tag{24}$$

целые неотрицательные числа m и n (также, как i_1, i_2 из $\{0,\, 1\}$) находятся по M и N согласно (3), $\Gamma_{mn}(s_{MN}) = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda - \lambda_{mn}(s_{MN})| = C_1 k^\nu\}$ при $\lambda_{mn}(s_{MN}) = \lambda_k(s_{MN})$ и $0 < \nu < \alpha - 2$.

Так как при любых $(M,\, N) \in G$

$$u_{mn}^2(s_{MN}) = \frac{\gamma_M \gamma_N}{ab}\left[1 + (-1)^{i_3}\cos\frac{\pi M x}{a}\right]\left[1 + (-1)^{i_4}\cos\frac{\pi N y}{b}\right],$$

то для таких $(M,\, N)$ с учетом (19) и очевидных равенств $\gamma_M = \gamma_N = 1$ получаем

$$(Pu_{mn}(s_{MN}),\, u_{mn}(s_{MN})) = \frac{1}{4}[p_{00} + (-1)^{i_3}p_{M0} + (-1)^{i_4}p_{0N} + (-1)^{i_3+i_4}p_{MN}], \tag{25}$$

где числа i_3, i_4 из $\{0,\, 1\}$ в (25) находятся по s_{MN} согласно (1).

Из (23)–(25) следует, что при всех $(M, N) \in G$ справедлива формула

$$\mu_{mn}(p,\, s_{MN}) = \lambda_{mn}(s_{MN}) + A + B_M + D_N + E_{MN}, \tag{26}$$

где

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4}p_{00}, \\ B_M = (-1)^{i_3}\frac{1}{4}p_{M0} \quad ((M,0) \in I_1), \\ D_N = (-1)^{i_4}\frac{1}{4}p_{0N} \quad ((0,N) \in I_2), \\ E_{MN} = (-1)^{i_3+i_4}\frac{1}{4}p_{MN} + \beta_{mn}(p, s_{MN}) \quad ((M,N) \in G). \end{cases} \tag{27}$$

Так как $p \in H_0$ и $\|p\|_2 < \eta$, то из (27) и леммы 3 следует $\Lambda(\mu) < +\infty$, где $\mu \equiv \mu(p,G,S) = \{\mu_{mn}(p, s_{MN}\}_{(M,N)\in G}$. Таким образом, если $\alpha > 5/2$, $G \in W$, $S \in Y(G)$, $p \in H_0$, $\|p\|_2 < \eta$, то двойная числовая последовательность $\mu(p,G,S)$ принадлежит классу $Z(G,S)$.

4. Полагаем $C_9 = 4C_8\sqrt{ab}$, $\varepsilon_0 = \min\{\eta,\, 1/(2C_9)\}$ и $\delta(\varepsilon) = \varepsilon(1 - C_9\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$. Следующее утверждение является основным результатом статьи.

Теорема 1. *Пусть a^2/b^2 — иррациональное алгебраическое число, $\alpha > 5/2$, $G \in W$, $S = \{s_{MN}\}_{(M,\,N)\in G}$ — двойная последовательность комплексных чисел класса $Y(G)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Пусть двойная последовательность комплексных чисел $\xi = \{\xi_{MN}\}_{(M,\,N)\in G}$ удовлетворяет любому из следующих двух условий:*

(i) $\xi \in Z(G,S)$ и $\Lambda(\xi) \le \delta(\varepsilon)$;

(v) $\Lambda \equiv \sqrt{4ab \sum\limits_{(M,N)\in G} |\xi_{MN} - \lambda_{mn}(s_{MN})|^2} \le \delta(\varepsilon)$,

где m и n являются целыми частями чисел $M/2$ и $N/2$ соответственно.

Тогда в замкнутом шаре $\|p\|_2 \le \varepsilon$ подпространства H_0 гильбертова пространства $L^2(\Pi)$ существует одна и только одна функция p такая, что

$$\mu_{mn}(p, s_{MN}) = \xi_{MN} \text{ при всех } (M,N) \in G. \tag{28}$$

Эта функция p обладает следующим свойством:

$$\|p\|_2 \le C_0\Lambda(\xi) \tag{29}$$

(с заменой $\Lambda(\xi)$ на Λ при выполнении условия (v)), где

$$C_0 = \frac{1}{1 - C_9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} > 0.$$

Кроме того, при выполнении условия (v) для нее справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Pi} p(x,\, y)\, dx\, dy = 0, \\ \iint\limits_{\Pi} p(x,\, y) \cos\frac{\pi M x}{a}\, dx\, dy = 0, \quad ((M,\, 0) \in I_1), \\ \iint\limits_{\Pi} p(x,\, y) \cos\frac{\pi N y}{b}\, dx\, dy = 0, \quad ((0,\, N) \in I_2). \end{cases} \tag{30}$$

Доказательство . Пусть выполняется условие (i). Для любого p из шара $\|p\|_2 \le \varepsilon$ подпространства $H_0 = H(G_0)$ гильбертова пространства $L^2(\Pi)$ полагаем

$$\mathcal{A}(p) = p_2 + \mathcal{B}(p), \tag{31}$$

где

$$p_2 = A + 2 \sum_{(M,0)\in I_1} (-1)^{i_3} B_M \cos\frac{\pi M x}{a} + 2 \sum_{(0,N)\in I_2} (-1)^{i_4} D_N \cos\frac{\pi N y}{b} + \\ + 4 \sum_{(M,N)\in G} (-1)^{i_3+i_4} E_{MN} \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b}, \tag{32}$$

$$\mathcal{B}(p) = 4 \sum_{(M,N)\in G} (-1)^{i_3+i_4+1} \beta_{mn}(p,\, s_{MN}) \cos\frac{\pi M x}{a} \cos\frac{\pi N y}{b}. \tag{33}$$

Напомним, что числа i_1, i_2 из $\{0,\, 1\}$ определяются по M и N согласно (3), а числа i_3, i_4 из $\{0,\, 1\}$ находятся по формуле $s_{MN} = 8i_1 + 4i_2 + 2i_3 + i_4$. Числа $\beta_{mn}(p,\, s_{MN})$ определяются согласно (24) при ν, удовлетворяющем условию $1/2 < \nu < \alpha - 2$. Числа A, B_M, D_N, E_{MN} в (32) однозначно определяются по $\xi \in Z(G,\, S)$ из разложения (20) по формулам (22). Отметим, что p_2, $\mathcal{B}(p)$ и $\mathcal{A}(p)$ принадлежат подпространству H_0 и что согласно равенству Парсеваля $\|p_2\|_2 = \Lambda(\xi)$. Так как для любых m, $n \ge 0$ существует не более 4 различных пар (M, N) из G, для которых справедлива формула (3), то при $\|p\|_2 \le \varepsilon$ и $\|p'\|_2 \le \varepsilon$ из равенства (33) и леммы 3 получаем

$$\|\mathcal{B}(p) - \mathcal{B}(p')\|_2 = \sqrt{4ab \sum_{(M,N)\in G} |\beta_{mn}(p,\, s_{MN}) - \beta_{mn}(p',\, s_{MN})|^2} \le \\ \le C_9[\|p\|_2 + \|p'\|_2]\|p - p'\|_2. \tag{34}$$

Из (31) и (34) для таких p и p' следует

$$\|\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(p')\|_2 = \|\mathcal{B}(p) - \mathcal{B}(p')\|_2 \le 2C_9\varepsilon\|p - p'\|_2. \tag{35}$$

Из (34) при $p' = 0$ и из (31) находим

$$\|\mathcal{A}(p)\|_2 \le \|p_2\|_2 + \|\mathcal{B}(p)\|_2 \le \Lambda(\xi) + C_9\,\varepsilon\|p\|_2. \tag{36}$$

Для любого $p \in H_0$, удовлетворяюшего неравенству $\|p\|_2 \le \varepsilon$, из (36) и (i) получаем $\|\mathcal{A}(p)\|_2 \le \delta(\varepsilon) + C_9\,\varepsilon^2 = \varepsilon$. Отсюда с учетом неравенств (35) и $2C_9\,\varepsilon < 1$ следует, что $\mathcal{A}(p)$ есть оператор сжатия, переводящий замкнутый шар $\|p\|_2 \le \varepsilon$ гильбертова пространства H_0 в себя. Согласно принципу Банаха уравнение $p = \mathcal{A}(p)$ имеет в этом замкнутом шаре единственное решение.

Пусть $p \in H_0$ и $\|p\|_2 \le \varepsilon$. Так как обе двойные числовые последовательности $\mu = \mu(p, G, S)$ и ξ принадлежат одному и тому же классу $Z(G, S)$ (для μ это следует из рассмотрений пункта 3, а для ξ — из условия (i) теоремы), то μ представляется единственным образом в виде (26) при $\Lambda(\mu) < +\infty$, а ξ представляется единственным образом в виде (20) при $\Lambda(\xi) < +\infty$. При этом условие (28), т. е. $\xi = \mu$, выполняется в том и только том случае, когда числа A, B_M, D_N, E_{MN} из (22) совпадают с соответствующими числами из (27) или, что то же самое (ввиду единственности разложения функции p в ряд Фурье (18)–(19)), когда p является решением операторного уравнения $p = \mathcal{A}(p)$ в замкнутом шаре $\|p\|_2 \le \varepsilon$ гильбертова пространства H_0. Так как такое решение вследствие доказанного выше существует и единственно, то для завершения доказательства теоремы в случае условия (i) остается проверить, что для этого решения p выполняется неравенство (29). Из равенства $p = \mathcal{A}(p)$ и (36) получаем $\|p\|_2 \le \Lambda(\xi) + C_9\,\varepsilon\|p\|_2$, откуда следует неравенство (29) при $C_0 = 1/(1 - C_9\varepsilon)$.

Нетрудно убедиться, что условие (v) равносильно условию (i) при

$$A = B_M = D_N = 0 \text{ для всех } (M,\, 0) \in I_1,\ (0,\, N) \in I_2 \tag{37}$$

и $\Lambda(\xi) = \Lambda$. Поэтому при выполнении условия (v) остаются верными все утверждения теоремы, доказанные выше при выполнении условия (i), включая неравенство (29) с заменой $\Lambda(\xi)$ на Λ. Остается проверить выполнение условия (30). Для единственного имеющегося в замкнутом шаре $\|p\|_2 \le \varepsilon$ подпространства H_0 решения p уравнения $p = \mathcal{A}(p)$ в силу (37) и (27) получаем $p_{00} = p_{M0} = p_{0N}$ для всех $(M,\, 0) \in I_1$ и $(0,\, N) \in I_2$, следовательно, этот потенциал p удовлетворяет условию (30). ∎

5. Пусть $I_{(0)} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $I_{(1)} = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Тогда для любого

$k = 2i_1 + i_2$, где $(i_1,\, i_2) \in \{0,\, 1\}^2$, имеем $G_{(k)} \equiv I_{(i_1)} \times I_{(i_2)} \in W$ и

$$H_0(G_{(k)}) = \Bigg\{ p \in L^2(\Pi)\ :$$
$$p = \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_{m+i_1}\gamma_{n+i_2} p_{2m+i_1,2n+i_2} \cos\frac{\pi(2m+i_1)x}{a} \cos\frac{\pi(2n+i_2)y}{b} \Bigg\} =$$
$$= \{p \in L^2(\Pi):\ p(x,\, y) = (-1)^{i_1} p(a-x,\, y) =$$
$$= (-1)^{i_2} p(x,\, b-y) \text{ для почти всех } (x,\, y) \in \Pi\}.$$

Применяя теорему 1 в случае условия (i) при $G = G_{(k)}$ и любом $k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ с учетом (26), (27), (3) получаем, что (для $\alpha > 5/2$) знание спектра оператора $\tilde{T}_s$ при каком-либо одном $s \in X_k$ позволяет полностью восстановить не любые малые по норме потенциалы из $L^2(\Pi)$, а лишь те из них, которые принадлежат подпространству $H_0(G_{(k)})$; этого же можно добиться по смеси спектров каких-либо двух, трех или четырех операторов $\tilde{T}_s$ класса X_k. В частности, спектр оператора $\tilde{T}_3$, соответствующего задаче Дирихле (также, как и спектр оператора $\tilde{T}_0$, соответствующего задаче Неймана) позволяет восстанавливать все малые потенциалы только из подпространства $H_0\left(G_{(0)}\right)$, а не из всего пространства $L^2(\Pi)$. В работе [2] все достаточно малые по норме потенциалы из $H_0(G_{(0)})$, удовлетворяющие дополнительному условию (30) при $I_1 = I_2 = I_{(0)}$, восстанавливаются при выполнении условия (v) (точнее, при всех достаточно малых Λ) для $G = G_{(0)}$ по смеси спектров операторов $\tilde{T}_s$ ($s = 0,\, 1,\, 2,\, 3$), соответствующих всем четырем смешанным граничным задачам класса X_0, включая задачи Дирихле и Неймана.

Гильбертово пространство $L^2(\Pi)$ есть ортогональная сумма четырех подпространств $H_0\left(G_{(k)}\right)$, т. е. всякая функция $p \in L^2(\Pi)$ однозначно представляется в виде $p = p_{(0)} + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)}$, где $p_{(k)} \in H_0\left(G_{(k)}\right)$ ($k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$) — взаимно ортогональные функции. Применяя теорему 1 в случае условия (i) при $G = \mathbb{N}^2$ получаем, что для восстановления произвольного, малого по норме потенциала $p \in L^2(\Pi)$ достаточно знать спектры каких-либо четырех операторов $\tilde{T}_s$, по одному из каждого класса X_0, X_1, X_2, X_3. Восстановление такого потенциала может быть также произведено по смеси спектров 5, 6, ..., 15 или всех 16 операторов $\tilde{T}_s$, соответствующих различным смешанным граничным задачам (2). При этом для каждого $k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ спектры операторов $\tilde{T}_s$ при $s \in X_k$ позволяют восстанавливать лишь соответствующую компоненту $p_{(k)}$ потенциала $p \in L^2(\Pi)$.

Отметим, что, за исключением оценки (29) и явных выражений для ε_0 и $\delta(\varepsilon)$, теорема 1 в случае условия (v) при $G = \mathbb{N}^2$ анонсирована ранее в работе [5] .

Список литературы

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М: Наука. – 1965. – 448 с.
2. *Дубровский В. В.* Восстановление потенциала по собственным значениям разных задач // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51. – Вып. 4. – С. 155–156.
3. *Дубровский В. В., Нагорный А. В.* К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 9. – С. 1563–1567.
4. *Дубровский В. В., Нагорный А. В.* Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L^2 // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 9. – С. 1552–1561.
5. *Дубровский В. В., Томин Н. Г.* К обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике // Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. И. Г. Петровского: Тезисы докладов. – М.: Наука. – 2001. – С. 411–412.
6. *Томин Н. Г.* О восстановлении потенциала в обратной задаче для степени оператора Штурма–Лиувилля // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Т. 8. – Ч.2. – С. 126–135.
7. *Томина И. В.* О регуляризованных следах степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольниках в случае смешанных граничных задач // Вестник Иван. гос. энергетического ун-та. – 2001. – Вып. 1. – С. 85–89.
8. *Шестопал А. Ф.* Геометрия оператора Лапласа. – К.: Выща шк. – 1991. – 159 с.

Поступила в редакцию 08.05.2010.