Математика и её приложения: ЖИМО. 2010. Вып. 1 (7). С. 97 – 108.

УДК 517.95

И. В. Томина[1]

Конкретизация формул регуляризованного следа для степени оператора Лапласа с потенциалом на равнобедренном прямоугольном треугольнике

Ключевые слова: степень оператора Лапласа, равнобедренный прямоугольный треугольник, граничные условия, регуляризованный след.

Представлены формулы первого регуляризованного следа для степени $\alpha > 1$ оператора Лапласа на прямоугольном равнобедренном треугольнике со смешанными граничными условиями и измеримым существенно ограниченным потенциалом. При этом на каждой стороне треугольника задано либо граничное условие Дирихле, либо граничное условие Неймана; задачи Дирихле и Неймана являются частными случаями смешанных граничных задач. Формулы следов конкретизируются для достаточно широких классов потенциалов и в случае $\alpha > 96/73$ улучшаются.

Keywords: power of the Laplace operator, right-angled isosceles triangle, boundary conditions, regularized trace.

We represent several formulae for the first regularized trace of any power $\alpha > 1$ of the Laplace operator on a right-angled isosceles triangle with mixed boundary conditions and a measurable essentially bounded potential. On every side of the triangle either the Dirichlet boundary condition or the Neumann boundary condition is given; the Dirichlet boundary problem and the Neumann boundary problem are particular cases of mixed boundary problems. The trace formulas are rended concrete for sufficiently large classes of potentials and are improved for powers $\alpha > 96/73$.

По каждому $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ однозначно определяются три числа i_1, i_2, i_3 из $\{0, 1\}$ такие, что $s = 4i_1 + 2i_2 + i_3$. Полагаем $r_1 = |i_1 - i_2|$, $r_2 = i_2$, $r_3 = i_3$. Рассматривается следующая спектральная граничная задача:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } F, \\ r_j u + (1 - r_j)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } l_j \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь используются обозначения:

- $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа;
- $F = \{(x, y) : \ 0 \le y \le x \le \pi\}$ — равнобедренный прямоугольный треугольник;
- $\partial F = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — граница треугольника F, $l_1 = \{(\pi, t) : \ 0 \le t \le \pi\}$, $l_2 = \{(t, 0) : \ 0 \le t \le \pi\}$, $l_3 = \{(t, t) : \ 0 \le t \le \pi\}$ — его стороны;
- ν — внутренняя нормаль к ∂F.

[1]Ивановский государственный энергетический университет;
E-mail: ivtomina@gmail.com.

Случай $s = 0$ соответствует задаче Неймана, $s = 3$ — задаче Дирихле.

Полагаем $\gamma_0 = 1/2$, $\gamma_n = 1$ при $n \neq 0$, $\nu_{mn}(i_1) = \gamma_{m-n}\gamma_{m+i_1}\gamma_{n+i_1}$, $m' = m + i_1/2$, $n' = n + i_1/2$, $q = \pi i_2/2$, $\lambda_{mn}(s) = (m')^2 + (n')^2$,

$$u_{mn}(s) = u_{mn}(x,\, y;\, s) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\nu_{mn}(i_1)}\left[\cos(m'x - q)\cos(n'y - q) + (-1)^{i_3}\cos(m'y - q)\cos(n'x - q)\right],$$

$U_s = \{u_{mn}(s) :\ (m,\, n) \in J(s)\}$ при

$$J(s) = \{(m,\, n) \in \mathbb{Z}^2 :\ i_2(1 - i_1) \le n \le m - i_3\}.$$

Нетрудно проверить, что каждая $u_{mn}(s)$ из U_s есть собственная функция спектральной задачи (1), соответствующая собственному числу $\lambda_{mn}(s)$.

Лемма 1. *Если $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $E_0 = \{e_n(x) :\ n \ge n_0\}$ — ортонормированная полная система (ОНПС) в $L^2(0,\, \pi)$, то при любом $i \in \{0,\, 1\}$ $E_0^{(i)} \equiv \{\sqrt{\gamma_{m-n}}\left[e_m(x)e_n(y) + (-1)^i e_m(y)e_n(x)\right] :\ n_0 \le n \le m - i\}$ есть ОНПС в $L^2(F)$.*

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Для любого $s \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$ U_s есть ОНПС в $L^2(F)$.*

Доказательства лемм 1 и 2 можно найти в [11].

Всюду далее $n_0 \equiv n_0(s) = i_2(1-i_1)$. Пусть T_s — самосопряженный неотрицательный оператор, порожденный спектральной задачей (1) и действующий в $L^2(F)$; при $\alpha > 0$ и $n_0 \le n \le m - i_3$ $u_{mn}(s)$ и $\lambda^\alpha_{mn}(s)$ — собственные функции и соответствующие собственные числа оператора T_s^α. Пусть P — оператор умножения в $L^2(F)$ на функцию $p \in L^\infty(F)$, при $n_0 \le n \le m - i_3$ $\mu^{(\alpha)}_{mn}(p,\, s)$ — собственные числа оператора $\tilde{T}_s(p,\, \alpha) \equiv T_s^\alpha + P$, занумерованные в порядке возрастания их вещественных частей с учетом алгебраических кратностей так, что $|\mu^{(\alpha)}_{mn}(p;\, s) - \lambda^\alpha_{mn}(s)| \le C$.

Пусть $\{\lambda_j(s)\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех собственных чисел оператора T_s, занумерованных в порядке возрастания с учетом их кратностей, $u_j(s)$ — собственные функции из U_s, соответствующие собственным числам $\lambda_j(s)$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ через $\mu^{(\alpha)}_j(p,\, s)$ обозначаем такое собственное число $\mu^{(\alpha)}_{mn}(p,\, s)$ оператора $\tilde{T}_s(p,\, \alpha)$, для которого $\lambda_{mn}(s) = \lambda_j(s)$. Далее, $(\cdot,\cdot)$ есть скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(F)$.

Лемма 3. *Пусть $s \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$, $p \in L^\infty(F)$. Тогда справедливы следующие формулы следов:*

1) *если $\alpha > 1$, то существует неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_j(s) \le \omega_k} \{\mu^{(\alpha)}_j(p,\, s) - \lambda^\alpha_j(s) - (Pu_j(s),\, u_j(s))\} = 0; \tag{2}$$

2) *если* $\alpha > 96/73$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_j(s)\le\lambda} \{\mu_j^{(\alpha)}(p,\, s) - \lambda_j^\alpha(s) - (Pu_j(s),\, u_j(s))\} = 0 \tag{3}$$

или, что то же самое, предельное соотношение (2) *выполняется для любой неограниченной возрастающей последовательности положительных чисел* $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$.

Доказательство. Как известно, $\lambda_j(s) \sim C_1 j^\alpha$ при $j \to +\infty$, где $C_1 = (8/\pi)^\alpha > 0$. Поэтому при $\alpha > 1$ резольвента $(T_s^\alpha - \lambda E)^{-1}$ оператора T_s^α является ядерным оператором в $L^2(F)$. Кроме того, линейный оператор P ограничен в $L^2(F)$. Отсюда согласно основному результату (теореме 1) статьи [5] вытекает утверждение 1) леммы 3.

Для всех $s \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$ и $\alpha > 0$ из [14] известна асимптотика

$$\lambda_j^\alpha(s) = C_1 j^\alpha + C_2 j^{\alpha-1/2} + R_j, \tag{4}$$

где C_2 — ненулевая вещественная постоянная, зависящая только от α и s, а $R_j = O\left(j^{\alpha-15/22}\right)$. Эта оценка остаточного члена R_j связана со вторым членом асимптотики числа $N(\lambda)$ точек с целочисленными координатами в круге $x^2+y^2 \le \lambda$ при $\lambda \to +\infty$, выводится из оценки $N(\lambda) = \pi\lambda + O\left(\lambda^{7/22}\right)$ и не является окончательной. Наилучшая известная в настоящее время оценка $N(\lambda)$ найдена в [15] и имеет вид $N(\lambda) = \pi\lambda + O\left(\lambda^{23/73}(\ln\lambda)^{315/146}\right)$. Из этой оценки следует асимптотическая формула (4) с остаточным членом $R_j = o\left(j^{\alpha-50/73+\varepsilon}\right)$, где в качестве ε можно взять любое сколь угодно малое положительное число. Отсюда получаем, что для любого $\alpha > 96/73$ существует вещественное число δ, для которого выполняется асимптотическая формула $\lambda_j^\alpha(s) = C_1 j^\alpha + C_2 j^{\alpha-1/2} + o(j^\delta)$ при $j \to +\infty$, где $\alpha - 50/73 + \varepsilon < \delta < 2\alpha - 2$ и ε — достаточно малое положительное число. Так как, кроме того, P — линейный ограниченный оператор в $L^2(F)$ и выполнено условие

$$\{\lambda_j^\alpha(s) :\ j \in \mathbb{N}\} \subset \{Ak^\alpha + D :\ 0 \le k \in \mathbb{Z}\}, \tag{5}$$

где $A > 0$ и D — вещественные числа, то согласно теореме 5 работы [6] при любом $\alpha > 96/73$ выполняется предельное соотношение (3). ■

Пусть $K = [0,\, \pi]^2$ — квадрат в $\mathbb{R}^2$. Через $\sigma[g]$ обозначаем двойной тригонометрический ряд Фурье функции $g(x,\, y) \in L^1(K)$ по полной ортогональной на K системе функций $\{\cos mx \cos ny :\ m, n \ge 0\}$:

$$g(x,\, y) \sim \sum_{m,n\ge 0} \gamma_m \gamma_n a_{mn}(g) \cos mx \cos ny,$$

где

$$a_{mn}(g) = \frac{4}{\pi^2} \iint\limits_K g(x,y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy$$

— коэффициенты Фурье функции $g(x,\, y)$ по этой системе.

Через $S(g;\, x,\, y) = S^{\text{круг}}(g; x, y)$ и $S^{\text{прям}}(g;\, x,\, y)$ обозначаем пределы соответственно круговых и прямоугольных частичных сумм двойного ряда Фурье $\sigma[g]$, а именно,

$$S(g;\, x,\, y) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\begin{cases} m^2+n^2\le\lambda \\ m,n\ge 0 \end{cases}} \gamma_m\gamma_n a_{mn}(g) \cos mx \cos ny, \tag{6}$$

$$S^{\text{прям}}(g;\, x,\, y) = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{m,n=0}^{M,N} \gamma_m\gamma_n a_{mn}(g) \cos mx \cos ny, \tag{7}$$

где в (6) $(x,\, y) \in D[g]$, а в (7) $(x,\, y) \in D^{\text{прям}}[g]$; $D[g] = D^{\text{круг}}[g]$ и $D^{\text{прям}}[g]$ — множества[2] соответственно “круговой” и “прямоугольной” сходимости двойного ряда Фурье $\sigma[g]$.

Пусть

$$Q = \{g \in L^\infty(K) :\ g(x,\, y) = g(y,\, x) \text{ п. в. на } K\} = \\ = \{g \in L^\infty(K) :\ a_{mn}(g) = a_{nm}(g) \text{ при всех } m,\, n \ge 0\},$$

$Q_0(s)$ — множество всех $g \in Q$, для которых существует конечный предел

$$G(g;\, s) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda} \nu_{mn}(i_1) a_{2m+i_1,2n+i_1}(g). \tag{8}$$

Суммирование по $\lambda_{mn}(s) \le \lambda$ в (8) и далее означает суммирование по всем $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, для которых $i_2(1-i_1) \le n \le m-i_3$ и $(m+i_1/2)^2+(n+i_1/2)^2 \le \lambda$.

Пусть $p(x,\, y) \in L^\infty(F)$, $\hat{p}(x,\, y) \equiv p(x+y,\, y-x)$ для любой точки $(x,\, y)$ треугольника $F_1 = \{(x,\, y) :\ 0 \le x \le y \le \pi - x\}$, $\tilde{p}(x,\, y)$ — продолжение $p(x,\, y)$ с F на K, симметричное относительно диагонали l_3, т. е. $\tilde{p}(x,\, y) = p(x,\, y)$ на F и $\tilde{p}(x,\, y) = p(y,\, x)$ на $K \setminus F$; $p^*(x,\, y)$ — продолжение $\hat{p}(x,\, y)$ с F_1 на K, симметричное относительно диагоналей l_3 и $l_4 = \{(t,\, \pi - t) :\ 0 \le t \le \pi\}$, т. е.

$$p^*(x,\, y) = p^*(y,\, x) = p^*(\pi - x,\, \pi - y) = p^*(\pi - y,\, \pi - x)$$

для всех $(x,\, y) \in K$ и $p^*(x,\, y) = \hat{p}(x,\, y)$ на F_1. Через $\breve{p}(x,\, y)$ обозначаем четное 2π-периодическое по x, четное 2π-периодическое по y продолжение функции $\tilde{p}(x,\, y)$ с квадрата K на всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что $\tilde{p} \in Q$, $p^* \in Q$, $\breve{p} \in Q$.

[2]подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$.

Сформулируем основные результаты в виде трех теорем, в каждой из которых приводятся формулы регуляризованных следов двух типов: при $l = 0$ и при $l = 1$.

При $p(x, y) \in L^\infty(F)$, $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$ и $l \in \{0, 1\}$ полагаем $h = (-1)^{i_2+i_3} \cdot 2l$, $p_{l;s} = (\tilde{p} + hp^*)/4$. Очевидно, что $p_{l;s} \in Q$.

Теорема 1. *Пусть $p(x, y)$ — комплекснозначная измеримая существенно ограниченная на треугольнике F функция, $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$, $l \in \{0, 1\}$, $m' = m + i_1/2$, $n' = n + i_1/2$, $p_{l;s} \in Q_0(s)$. Тогда:*

1) *если $\alpha > 1$, то найдется неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\begin{cases} (m+i_1/2)^2+(n+i_1/2)^2\le\omega_k \\ i_2(1-i_1)\le n\le m-i_3 \end{cases}} \mathcal{B}_{mn}(p, s, \alpha) = G(p_{l;s}; s), \tag{9}$$

где

$$\mathcal{B}_{mn}(p, s, \alpha) = \mu_{mn}^{(\alpha)}(p, s) - \left[\left(m + \frac{i_1}{2}\right)^2 + \left(n + \frac{i_1}{2}\right)^2\right]^\alpha -$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\iint\limits_F p(x, y)\,\bigl[2 + (-1)^{i_2}(\cos 2m'x + \cos 2n'y + \cos 2m'y + \cos 2n'x) +$$
$$+ (-1)^{i_3} 8(1 - l)\cos(m'x - q)\cos(n'y - q)\cos(m'y - q)\cos(n'x - q)\bigr]\,dx\,dy +$$
$$+ (-1)^{i_3+1}\frac{4l}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\iint\limits_{F_1} p(x + y, y - x)\times$$
$$\times \bigl(\cos 2m'x\cos 2n'x + \cos 2m'y\cos 2n'y\bigr)\,dx\,dy; \tag{10}$$

2) *если $\alpha > 96/73$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\begin{cases} (m+i_1/2)^2+(n+i_1/2)^2\le\lambda \\ i_2(1-i_1)\le n\le m-i_3 \end{cases}} \mathcal{B}_{mn}(p, s, \alpha) = G(p_{l;s}; s), \tag{11}$$

где $\mathcal{B}_{mn}(p, s, \alpha)$ вычисляется по формуле (10).

Если при каком-либо $l \in \{0, 1\}$ $p_{l;s} \notin Q_0(s)$, то при этом значении l предел в левой части (11) либо не существует, либо бесконечен.

Пусть $l_5 = \{(\pi - t, t) : 0 \le t \le \pi/2\}$, $X_0 = \{(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)\}$ есть множество всех вершин треугольника F, $X_1 = l_3 \cup l_5$, $X_2 = l_1 \cup l_2$, $X_3 = \partial F \cup l_5$; $X_{j\,0} = X_j$ при $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $X_{01} = X_0$, $X_{11} = X_{31} = X_3$, $X_{21} = \partial F$. Для $g \in Q$, $X \subset \mathbb{R}^2$ и $d \in \{\text{круг}, \text{прям}\}$ пишем $g \in Q^d[X]$, если при $d = \text{круг}$ круговые, а при $d = \text{прям}$ прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье $\sigma[g]$ равномерно сходятся на множестве X.

Через $C^\gamma(G)$ обозначаем класс Гельдера порядка $\gamma > 0$ в области G пространства $\mathbb{R}^2$ (см. [4]); аналогично определяются классы Гельдера $C^\gamma(\overline{G})$ для замкнутой области $\overline{G} = G \cup \partial G$. Полагаем $w = (1 - i_1)(i_2 + i_3 + i_2 i_3)$, $p_{\text{ср}} = \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\iint\limits_F p(x,\, y)\, dxdy$ — среднее значение функции $p(x,\, y)$ на треугольнике F.

Теорема 2. *Пусть* $p(x,\, y) \in L^\infty(F)$, $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $l \in \{0, 1\}$, $\tau = 2n_0 + i_3$. *Если* $X_0 \subset D[\tilde{p}]$ *и* $\tilde{p} \in Q^d[X_{\tau l}]$, *то при* $\alpha > 1$ *справедлива формула следов* (9), *а при* $\alpha > 96/73$ — *более точная формула* (11), *причем в правых частях* (9) *и* (11) *величина* $G(p_{l\,;s};\, s)$ *записывается в виде*

$$
\begin{aligned}
G(p_{l,s};\, s) = \frac{1}{32}\big[&(1+2h)S(\tilde{p};\, 0,\, 0) + (-1)^{i_1} 2S(\tilde{p};\, \pi,\, 0) + \\
&+ (1 + (-1)^{i_1} 2h) S(\tilde{p};\, \pi,\, \pi)\big] - \\
&- \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi \Big[S^d((n_0 + hi_3)\tilde{p};\, t,\, 0) + S^d((n_0 + (-1)^{i_1} hi_3)\tilde{p};\, \pi,\, t) + \\
&+ S^d((i_3 + 2hn_0)\tilde{p};\, t,\, t) + (-1)^{i_1} S^d(i_3\tilde{p};\, t,\, \pi - t)\Big]\, dt + \frac{1}{8}(1+h)wp_{cp}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Если, кроме того, p *непрерывна на* $X_{\tau l}$, *т. е. для* $M \in X_{\tau l}$

$$
\lim_{F \ni M' \to M} p(M') = p(M),
$$

то

$$
\begin{aligned}
G(p_{l,s};\, s) = \frac{1}{32}\big[&(1+2h)S(\tilde{p};\, 0,\, 0) + (-1)^{i_1} 2S(\tilde{p};\, \pi,\, 0) + \\
&+ (1 + (-1)^{i_1} 2h) S(\tilde{p};\, \pi,\, \pi)\big] - \\
- \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi \big[&(n_0 + hi_3)p(t,\, 0) + (n_0 + (-1)^{i_1} hi_3)p(\pi,\, t) + (i_3 + 2hn_0)p(t,\, t) + \\
&+ (-1)^{i_1} i_3 p((\pi + t)/2,\, (\pi - t)/2)\big]\, dt + \frac{1}{8}(1+h)wp_{cp}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В частности, формула (13) *справедлива при любом* $l \in \{0, 1\}$, *если* $X_0 \subset D[\tilde{p}]$ *и* $p \in C^\gamma(F)$, $\gamma > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $p(x,\, y)$ — *непрерывная на треугольнике* F *функция,* $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. *Пусть выполнено любое из следующих условий:*

1) $\tilde{p} \in Q^{\text{круг}}[F]$;

2) $\sum\limits_{m,n \geq 0} |a_{mn}(\tilde{p})| < \infty$;

3) $p \in C^{1/2}(F)$;

4) $\partial p/\partial x$ *и* $\partial p/\partial y$ *непрерывны на* F.

Тогда при любом $l \in \{0,\, 1\}$ *при* $\alpha > 1$ *справедлива формула следов* (9), *а при* $\alpha > 96/73$ *— формула* (11), *причем правые части* (9) *и* (11) *записываются в виде*

$$G(p_{l;s};\, s) = \frac{1}{32}\left[(1+2h)p(0,\,0) + (-1)^{i_1}2p(\pi,\,0) + (1+(-1)^{i_1}2h)p(\pi,\,\pi)\right] -$$
$$-\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi \left[(n_0+hi_3)p(t,\,0) + (n_0+(-1)^{i_1}hi_3)p(\pi,\,t) + (i_3+2hn_0)p(t,\,t) + \right.$$
$$\left. +(-1)^{i_1}i_3 p((\pi+t)/2,\,(\pi-t)/2)\right]dt + \frac{1}{8}(1+h)wp_{cp}. \qquad (14)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\alpha > 96/73$. Тогда согласно лемме 3, каковы бы ни были $s \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$ и измеримая существенно ограниченная на F функция $p(x,\, y)$, для оператора $\tilde{T}_s(p;\, \alpha)$ справедлива формула следов (3), которую, ввиду очевидного тождества

$$u_{mn}^2(x,\, y;\, s) = \frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\left[2 + (-1)^{i_2}(\cos 2m'x + \cos 2n'y + \cos 2m'y + \right.$$
$$+ \cos 2n'x) + \cos 2m'x\cos 2n'y + \cos 2m'y\cos 2n'x +$$
$$\left. +(-1)^{i_3}8\cos(m'x-q)\cos(n'y-q)\cos(m'y-q)\cos(n'x-q)\right] \qquad (15)$$

можно записать в виде

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\Big\{\mu_{mn}^{(\alpha)}(p,\, s) - \lambda_{mn}^{\alpha}(s) -$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\iint\limits_F p(x,\, y)\left[2 + (-1)^{i_2}(\cos 2m'x + \cos 2n'y + \cos 2m'y + \right.$$
$$+ \cos 2n'x) + \cos 2m'x\cos 2n'y + \cos 2m'y\cos 2n'x +$$
$$\left. +(-1)^{i_3}8\cos(m'x-q)\cos(n'y-q)\cos(m'y-q)\cos(n'x-q)\right]dxdy\Big\} = 0. \qquad (16)$$

Из (16) с учетом (10) следует, что предел в левой части (11) при $l = 0$ существует и конечен в том и только том случае, когда существует и конечен

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\iint\limits_F p(x,y)(\cos 2m'x\cos 2n'y +$$
$$+ \cos 2m'y\cos 2n'x)\, dxdy, \qquad (17)$$

причем значения этих пределов совпадают.

Поскольку $\tilde{p} \in Q$, а для любой функции $g \in Q$ при всех $m,\, n \ge 0$

$$a_{mn}(g) = \frac{4}{\pi^2}\iint\limits_F g(x,\, y)(\cos mx\cos ny + \cos my\cos nx)dx\, dy, \qquad (18)$$

то

$$\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\iint\limits_F p(x,\,y)(\cos 2m'x\cos 2n'y+$$
$$+\cos 2m'y\cos 2n'x)\,dxdy=\frac{1}{4}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\nu_{mn}(i_1)a_{2m',2n'}(\tilde p),\quad (19)$$

и предел (17) при $l=0$ существует и конечен в том и только том случае, когда $\tilde p(x,\,y)\in Q_0(s)$; при этом значение предела (17) равно $G(\tilde p;\,s)/4$. Таким образом, при $l=0$ утверждение 2) теоремы доказано.

Далее, с помощью линейной замены переменных интегрирования в следующем ниже двойном интеграле по формулам $x=u+v$, $y=v-u$ с последующим переобозначением переменных находим

$$\frac{8}{\pi^2}\iint\limits_F p(x,\,y)\cos(m'x-q)\cos(n'y-q)\cos(m'y-q)\cos(n'x-q)dx\,dy=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\iint\limits_{F_1} p(x+y,\,y-x)(\cos 2m'x\cos 2n'x+\cos 2m'y\cos 2n'y)dx\,dy+$$
$$+(-1)^{i_2}\frac{4}{\pi^2}\iint\limits_{F_1} p(x+y,\,y-x)(\cos 2m'x\cos 2n'y+\cos 2m'y\cos 2n'x)dx\,dy.$$
$$(20)$$

Из (16), (20), равенства

$$\frac{4}{\pi^2}\iint\limits_{F_1} p(x+y,\,y-x)(\cos 2m'x\cos 2n'y+\cos 2m'y\cos 2n'x)dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}a_{2m',2n'}(p^*),\quad (21)$$

(17) и (19) следует, что предел в левой части (11) при $l=1$ существует и конечен тогда и только тогда, когда существует и конечен

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\frac{1}{\pi^2}\nu_{mn}(i_1)\left\{\iint\limits_F p(x,y)(\cos 2m'x\cos 2n'y+\right.$$
$$+\cos 2m'y\cos 2n'x)dx\,dy+(-1)^{i_2+i_3}\times$$
$$\left.\times 4\iint\limits_{F_1} p(x+y,y-x)(\cos 2m'x\cos 2n'y+\cos 2m'y\cos 2n'x)dx\,dy\right\}=$$
$$=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\nu_{mn}(i_1)a_{2m',2n'}(p_{1;s}),\quad (22)$$

и эти пределы совпадают. Таким образом, утверждение 2) теоремы справедливо и при $l = 1$.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда согласно утверждению 1) леммы 3 для некоторой неограниченной возрастающей последовательности положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива формула следов (2). Отсюда, так же, как при доказательстве утверждения 2) настоящей теоремы, следует, что предел в левой части формулы (9) при $\mathcal{B}_{mn}(p,\, s,\, \alpha)$ из (10) существует и конечен в том и только том случае, когда существует и конечен

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_{mn}(s)\le\omega_k} \nu_{mn}(i_1) a_{2m+i_1,2n+i_1}(p_{\,l;s}). \tag{23}$$

Если при каком-либо $l \in \{0,\, 1\}$ $p_{\,l;s} \in Q_0(s)$, то согласно (8) получаем, что предел (23) существует, конечен и равен $G(p_{\,l;s}\,;s)$. Поэтому при каждом таком значении l справедлива формула следов (9). Теорема доказана.

Согласно теореме 1 для доказательства теорем 2 и 3 достаточно проверить справедливость равенств (12)–(14) при условиях, указанных в теоремах 2 и 3.

Доказательство теоремы 2. Пусть $l = 0$, $X_0 \subset D[\tilde p]$ и, кроме того, при $\tau \ne 0$ и каком-либо $d \in \{\text{круг, прям}\}$ имеем $\tilde p \in Q^{\,d}[X_{\tau 0}]$. Тогда на основе предложений 1 и 2 статьи [12] и равенства $p_{\,0;s} = \tilde p/4$ получаем, что $p_{\,0;s} \in Q_0(s)$ и формула (12) справедлива при $l = 0$.

Пусть теперь $l = 1$, $X_0 \subset D[\tilde p]$ и при $\tau \ne 0$ $\tilde p \in Q^{\,d}[X_{\tau 1}]$, откуда, в частности, следует $\tilde p \in Q^{\,d}[X_{\tau 0}]$. Применяя утверждение 2) предложения 4 из [12] находим, что $p^* \in Q_0(s)$ и справедлива формула

$$G(p^*;\, s) = \frac{1}{2}[S(\tilde p;\, 0,\, 0) + (-1)^{i_1} S(\tilde p;\, \pi,\, \pi)] -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} [S^d(i_3\tilde p;\, t,\, 0) + (-1)^{i_1} S^d(i_3\tilde p;\, \pi,\, t) + 2S^d(n_0\tilde p;\, t,\, t)]dt + \frac{1}{2} w p_{cp}. \tag{24}$$

Так как, очевидно, $p_{\,0;s} \in Q_0(s)$, то из равенства $p_{\,1;s} = p_{\,0;s} + (-1)^{i_1+i_2}\frac{1}{2}p^*$ следует $G(p_{\,1;s};s) = G(p_{\,0;s};\, s) + (-1)^{i_1+i_2}\frac{1}{2}G(p^*;\, s)$. Применяя формулу (12) при $l = 0$ и (24), получаем формулу (12) при $l = 1$.

Пусть $(n_0,\, i_3) \ne (0,\, 0)$, т. е. $\tau \ne 0$, и пусть $\tilde p \in Q^{\,d}[l_1]$ при некотором $d \in \{\text{круг, прям}\}$, а p непрерывна на l_1. Тогда, поступая так же, как при выводе формулы (30) работы [10], показываем, что

$$\int\limits_0^{\pi} S^d(\tilde p;\, \pi,\, t)dt = \int\limits_0^{\pi} \tilde p(\pi,\, t)dt.$$

Аналогично при $\tau \ne 0$, $\tilde p \in Q^{\,d}[l_2]$ и p непрерывной на l_2 находим

$$\int\limits_0^{\pi} S^d(\tilde p;\, t,\, 0)\, dt = \int\limits_0^{\pi} \tilde p(t,\, 0)dt.$$

Пусть $\tau \neq 0$, $\tilde{p} \in Q^{\,d}[l_3]$ и p непрерывна на l_3. Тогда $\tilde{p}$ также непрерывна на l_3 и, согласно [3] (с. 456)

$$\lim_{M,N\to\infty} \sum_{m,n=0}^{M,N} \left(1 - \frac{m}{M+1}\right)\left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \gamma_m\gamma_n a_{mn}(\tilde{p}) \cos mt \cos nt = p(t,\, t)$$

равномерно по $t \in [0,\, \pi]$. Интегрируя в этом предельном соотношении по t в пределах от 0 до π, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right)^2 \gamma_n a_{nn}(\tilde{p}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(t,\, t)dt. \tag{25}$$

Так как, кроме того,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_{nn}(\tilde{p}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi S^d(\tilde{p};\, t,\, t)dt,$$

то из регулярности метода суммирования Рисса $(R,\, n,\, 2)$ ([13], с. 145–146) находим

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n\le\lambda} \left(1 - \frac{n}{\lambda}\right)^2 \gamma_n a_{nn}(\tilde{p}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi S^d(\tilde{p}; t, t)\, dt. \tag{26}$$

Из (25) и (26) получаем

$$\int_0^\pi S^d(\tilde{p};\, t,\, t)\, dt = \int_0^\pi p(t,\, t)dt.$$

Если $i_3 = 1$, $\tilde{p} \in Q^d[X_5]$ и p непрерывна на X_5, то $\tilde{p} \in Q^{\,d}[X_4]$, $\tilde{p}$ непрерывна на X_4; повторяя рассуждения из предыдущего абзаца, находим

$$\int_0^\pi S^d(\tilde{p};\, t,\, \pi - t)dt = \int_0^\pi \tilde{p}(t,\, \pi - t)dt,$$

откуда с учетом симметрии функций $\tilde{p}(x,\, y)$ и $S^d(\tilde{p};\, x,\, y)$ относительно l_3 получаем

$$\int_0^\pi S^d(\tilde{p};\, t,\, \pi - t)dt = \int_0^\pi p((\pi + t)/2,\, (\pi - t)/2)dt.$$

Таким образом, если p непрерывна на $X_{\tau l}$, то справедлива формула (13).

Пусть теперь $X_0 \subset D[\tilde{p}]$ и $p \in C^\gamma(F)$, $\gamma > 0$. Тогда, применяя теорему 2 из [9], получаем $\tilde{p} \in C^\gamma(K)$ и $\breve{p} \in C^\gamma(\mathbb{R}^2)$. Согласно теореме 10.24 из [4] имеем $\breve{p} \in Q^{\text{прям}}[\mathbb{R}^2]$. Следовательно, $\tilde{p} \in Q^{\text{прям}}[K]$ и, так как при любых s и l $X_{\tau l} \subset K$, то $\tilde{p} \in Q^{\text{прям}}[X_{\tau l}]$. Отсюда с учетом непрерывности p получаем формулу (13).

Доказательство теоремы 3. При выполнении условия 1) в силу теоремы 2 $p_{l;s} \in Q_0(s)$, и справедлива формула (13). Так как $S(\tilde{p};\, x,\, y) = p(x,\, y)$ всюду на F, в частности, на X_0, то из (13) следует (14).

Очевидно, что 2) $\Rightarrow$ 1). Проверим, что 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Из 4) следует, что $p \in C^1(F)$, поэтому ввиду вложения $C^1(F) \subset C^{1/2}(F)$ выполняется условие 3). Далее, если выполнено условие 3), то согласно теореме 2 из [9] имеем $\tilde{p} \in C^{1/2}(K)$ и $\breve{p} \in C^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Но тогда, применяя теорему 10.22 из [4] находим, что $\breve{p} \in Q^{\text{круг}}[\mathbb{R}^2]$ и $\tilde{p} \in Q^{\text{круг}}[F]$, т. е. выполняется условие 1).

Теорема доказана.

Отметим, что при $\alpha > 3/2$ все результаты настоящей работы, за исключением утверждений теоремы 3, связанных с ее условиями 3) и 4), получены ранее для всех $s \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$ в [8] (в случае задачи Дирихле см. также [2], а в случае задачи Неймана — [7]). При этом абстрактная формула следов (3) выводилась в [8] при любом $\alpha > 3/2$ на основе абстрактной формулы Гельфанда–Левитана [1] и условия (5).

Список литературы

1. *Дубровский В. В.* К абстрактной формуле Гельфанда–Левитана // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46. – № 3. – С. 187–188.
2. *Дубровский В. В., Томина И. В.* О регуляризованном следе для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 12. – С. 2177–2179.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.
4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
5. *Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е.* Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Доклады РАН. – 2000. – Т. 373. – № 1. – С. 26–28.
6. *Томин Н. Г.* О некоторых формулах первого регуляризованного следа для дискретных операторов // Математические заметки. – 2001. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 109–122.
7. *Томина И. В.* Регуляризованный след степени оператора Лапласа на прямоугольном равнобедренном треугольнике в случае задачи Неймана // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 177–178.
8. *Томина И. В.* Конкретные формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике в случае смешанных граничных условий. – Иваново: ИГЭУ, 1994. – 59 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2751-В94 Деп.
9. *Томина И. В.* О симметричном и антисимметричном продолжениях функций двух переменных // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2000. – Вып. 3. – С. 103–108.
10. *Томина И. В.* Конкретизация формул регуляризованных следов степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике в случае смешанных граничных задач // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2002. – Вып. 5. – С. 91–100.

11. *Томина И. В.* Об одном способе построения ортонормированных полных систем на прямоугольном равнобедренном треугольнике // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об–ва. – 2004. – Вып. 1. – С. 119–122.

12. *Томина И. В.* О некоторых величинах, связанных со смешанными граничными задачами для оператора Лапласа на треугольнике // Вестник Иван. гос. энергетического ун-та. – 2005. – Вып. 4. – С. 110–113.

13. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

14. *Шестопал А. Ф.* Геометрия оператора Лапласа. – Киев: Выща школа, 1991. – 159 с.

15. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points. II // Proc. London Math. Soc. — 1993. — V. 66. — P. 279-301.

Поступила в редакцию 07.06.2010.