Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 3 – 6.

УДК 512.543

Д. Н. Азаров[1], А. В. Розов[2]

Об аппроксимируемости конечными p-группами разрешимых линейных групп

Ключевые слова: аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость конечными π-группами, разрешимая группа, нильпотентная группа, линейная группа, коммутант группы.

Доказана нильпотентность коммутанта разрешимой линейной группы, аппроксимируемой конечными p-группами для двух различных значений простого числа p.

Keywords: residually finite p-group, residually finite π-group, soluble group, nilpotent group, linear group, group commutant.

We prove the commutant's nilpotence for soluble linear group that is a residually finite p-group for two different prime p.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от единицы. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматриваются также аппроксимируемость конечными p-группами, где p – простое число, и аппроксимируемость конечными π-группами, где π – некоторое множество простых чисел.

Напомним, что группа G называется полициклической, если в ней существует субнормальный ряд с циклическими факторами.

Хорошо известно, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Эта теорема была доказана Гиршем в 1952 г. [6].

Более сложным является вопрос об аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп. Этот вопрос исследован полностью только для некоторых классов полициклических групп, в частности, для конечно порожденных нильпотентных групп и для сверхразрешимых групп [2, 5]. В общем случае доказаны некоторые необходимые условия аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп. Так, в 1965 г. К. Сексенбаев доказал, что если полициклическая группа аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p, то она нильпотентна [4].

[1]Ивановский государственный университет; E-mail: `azarovdn@mail.ru`.
[2]Ивановский государственный университет; E-mail: `post-box023@mail.ru`.

В работе Д. Н. Азарова и Ю. В. Комельковой [1] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Если полициклическая группа G аппроксимируема конечными p-группами для двух различных значений простого числа p, то коммутант группы G нильпотентен.*

В настоящей статье мы обобщаем эту теорему с полициклических групп на линейные разрешимые группы. Нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Если линейная разрешимая группа G аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, где π_1 и π_2 — непересекающиеся множества простых чисел, то коммутант группы G нильпотентен. В частности, если линейная разрешимая группа G аппроксимируема конечными p-группами для двух различных значений простого числа p, то коммутант группы G нильпотентен.*

Напомним, что группа G называется разрешимой, если в ней существует субнормальный ряд с абелевыми факторами. Очевидно, что любая полициклическая группа является разрешимой. Напомним также, что группа G называется линейной, если она вложима в матричную группу над некоторым полем. Линейность полициклических групп была доказана в 1967 году Ауслендером и Суоном. Они доказали, что любая полициклическая группа изоморфна некоторой подгруппе группы целочисленных матриц.

Заметим, что для произвольной разрешимой группы G заключение теоремы 2 уже неверно. В самом деле, в 1957 г. Грюнбергом [5] доказано, что свободные разрешимые группы аппроксимируемы конечными p-группами для каждого простого числа p, но с другой стороны, коммутант свободной разрешимой группы не обязан быть нильпотентным.

Таким образом, условие линейности, накладываемое на группу G в теореме 2, существенно.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Предложение 1. *Пусть нормальная подгруппа H группы G удовлетворяет тождеству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ и является максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G с этим тождеством. Если для некоторого множества π простых чисел группа G аппроксимируема конечными π-группами, то фактор-группа G/H также аппроксимируема конечными π-группами.*

Это предложение, даже в более общем виде, доказано в работе Д. Н. Азарова и А. Е. Поспеевой [3].

Предложение 2. *Пусть группа G аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, где π_1 и π_2 — непересекающиеся множества простых чисел. Если G содержит подгруппу конечного индекса с тождеством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, то она сама удовлетворяет этому тождеству. В частности, если группа G почти абелева, то она абелева.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечного индекса группы G с тождеством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Без ограничения общности можно считать, что H нормальна в G.

Поскольку индекс подгруппы H конечен, то в G существует конечное число подгрупп, содержащих H. Поэтому в G существует нормальная подгруппа F конечного индекса, содержащая H, удовлетворяющая тождеству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ и являющаяся максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G с тождеством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Отсюда и из того, что G аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, по предложению 1 получаем, что фактор-группа G/F также аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами. Отсюда и из того, что группа G/F конечна, следует, что она является одновременно конечной π_1-группой и конечной π_2-группой. А поскольку множества π_1 и π_2 не пересекаются, группа G/F является единичной, то есть $G = F$. При этом группа F, а значит и G, удовлетворяет тождеству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. ∎

С помощью леммы Куратовского–Цорна несложно доказывается следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ — произвольное групповое тождество. И пусть G — произвольная группа. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа H, являющаяся максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G с тождеством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Более того, любая нормальная подгруппа N группы G с тождеством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ содержится в некоторой нормальной подгруппе F группы G, являющейся максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G, удовлетворяющих тождеству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.*

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующий хорошо известный результат, принадлежащий А. И. Мальцеву.

Предложение 4. *Пусть G — разрешимая линейная группа. Тогда G — расширение нильпотентной группы с помощью абелевой и затем с помощью конечной. Иными словами, в группе G существует нормальный ряд*

$$1 \leq N \leq H \leq G,$$

где N — нильпотентная группа, H/N — абелева группа, G/H — конечная группа.

Доказательство этого предложения можно найти, например, в работе [7, п. 3.1.8].

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — линейная разрешимая группа, аппроксимируемая конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, где π_1 и π_2 — непересекающиеся множества простых чисел. Тогда по предложению 4 в G существует нормальный ряд $1 \leq N \leq H \leq G$, где N — нильпотентная группа, H/N — абелева группа, G/H — конечная группа.

Так как N нильпотентна, то существует натуральное число n такое, что группа N удовлетворяет тождеству $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — простой коммутатор веса n. Тогда по предложению 3 N содержится в некоторой нормальной подгруппе F группы G, являющейся максимальной среди всех нормальных подгрупп группы G, удовлетворяющих тождеству $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Отсюда и из того, что G аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, по предложению 1 следует, что фактор-группа G/F также аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами.

Заметим, что G/N — почти абелева группа, поскольку она содержит абелеву подгруппу H/N конечного индекса. Поэтому любой гомоморфный образ группы G/N также является почти абелевой группой. В частности, фактор-группа G/F почти абелева. Отсюда и из того, что G/F аппроксимируема конечными π_1-группами и конечными π_2-группами, по предложению 2 следует, что G/F абелева. Поэтому коммутант G' группы G содержится в F и, следовательно, удовлетворяет тождеству $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Это означает, что G' — нильпотентная группа.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н., Комелькова Ю. В.* Об аппроксимируемости полициклических групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2008. – Вып. 6. – С. 17–22.
2. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 1999. – Вып. 2. – С. 8–9.
3. *Азаров Д. Н., Поспеева Е. А.* Об отделимости максимальных подгрупп с тождеством // Вестник молодых ученых ИвГУ. – 2006. – Вып. 6. – С. 135–136.
4. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп //Алгебра и логика. – 1965. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 79–83.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1957. – Vol. 7. – P. 29–62.
6. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. – 1952. – Vol. 27. – P. 81–85.
7. *Lennox J. C., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. – Oxford: Clarendon Press, 2004. – 342 p.

Поступила в редакцию 26.11.2011.