Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 7 – 14.

УДК 517.977.5+681.3.06

Л. Н. Борисоглебская[1], С. М. Сергеев [2]

Моделирование динамических процессов в сетевых объектах с саморегулируемыми экономическими связями

Ключевые слова: моделирование многоуровневых сетевых объектов, оптимальное управление сетевыми объектами, динамическое программирование.

Широкое распространение сетевых промышленных предприятий и иных организаций, занимающих в настоящее время подавляющую долю производства, потребовало разработки действенных алгоритмов принятия решений. В работе излагается подход к созданию математической модели сети магазинов. Предлагается применение математических методов теории оптимального управления для выбора экономической политики внутри сетевой торговой структуры.

Keywords: modeling of multi-level network objects, network objects the optimal control, dynamic programming.

The wide circulation of the network industrial enterprises and other organizations occupying now an overwhelming share of manufacture, has demanded working out of effective algorithms of decision-making. This article deals with the problem of choosing the optimal control. Mathematical model makes it possible to study the processes in the economy of trade. Chosen method of dynamic programming have given the results can be used by managers of trading companies. These methods could also apply to chain restaurants and some service-oriented chain businesses.

1. Введение

В работе рассматривается математическая модель двухуровневой сети предприятий. Верхний уровень – это система сетевых объектов, находящихся под единым управляющим органом, осуществляющим ассоциативную форму предпринимательства и принимающим решения о распределении консолидированного бюджета между этими предприятиями. Нижний уровень – уровень сетевого предприятия – представляет собственно предприятие (одно из сети), подчиняющееся общему руководству и получающее средства, что соответствует делегированию финансовой ответственности (бюджетированию). Сетевое предприятие распределяет полученные средства в течение каждого этапа самостоятельно, по направлениям своей деятельности, с целью получить максимальную выгоду (математические модели таких сетевых систем рассматривались в [1]–[4]). На обоих уровнях выполняются следующие требования:

[1]С.-Петербургский торгово-экономический институт; E-mail: sergeev2@yandex.ru.
[2]С-Петербургский торгово-экономический институт; E-mail: sergeev2@yandex.ru.

© Борисоглебская Л. Н., Сергеев С. М., 2011

- планирование работы на определенные периоды, в конце которых производится оценка результатов,

- разделение периодов на ряд этапов, в конце каждого из которых производится оценка промежуточных результатов деятельности и на их основе принимаются дальнейшие решения.

На каждом из двух уровней сетевая торговая конструкция представляется как управляемая система, имеющая вектор состояния (комплекс основных показателей) и вектор управления (распределенные средства, вкладываемые в различные звенья системы). Задача управления сетевой конструкцией состоит в выборе управляющих воздействий, максимизирующих прибыль за весь определенный временной период [5]. При выборе методов построения управления учитывался дискретный характер процессов, поэтому применялся как дискретный принцип максимума Понтрягина, так и метод, основанный на анализе уравнений Беллмана, что позволило сравнить возможности их использования в данном классе задач [6, 7].

2. Модель первого уровня

Будем называть сетевую организацию предприятий системой и обозначим ее через S. Данная система обладает рядом показателей (характеристик), описывающих ее состояние. Множество состояний образуют фазовое пространство. Руководство (управляющий орган) сетью (системой S) путем принятия управленческих решений может управлять процессом состояний. Мероприятия, при посредстве которых руководство влияет на состояние системы, назовем управляющими воздействиями (управлением) и обозначим через U. Среди всех вариантов управления, разумеется, выбирают те, которые представляют наибольший интерес с точки зрения выбираемого критерия, определяемого функцией W:

$$W = W(U). \tag{1}$$

Задача управления и, в конечном итоге, менеджеров, принимающих решение о деятельности системы, сводится к поиску такого управления U^*, при котором функция $W(U)$ достигает максимального значения:

$$W^* = \max_U W(U). \tag{2}$$

При этом накладываются ограничения на область начальных состояний S_0 перед началом планового периода: $S_0 \subset \tilde{S}_0$, где $\tilde{S}_0$ – область фазового пространства, содержащая допустимые значения и ограничения на область конечных состояний S_K после окончания планового периода: $S_K \subset \tilde{S}_K$ ($\tilde{S}_K$ – область фазового пространства, содержащая допустимые значения конечного состояния системы). Рассматриваемый период разбит на n этапов, на каждом из которых рассчитывается критерии W_i $(i = \overline{1,n})$ и критерий заинтересованности W за весь период:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i. \tag{3}$$

Например, если критерием является прибыль сетевой организации, тогда значения прибыли на каждом этапе просто суммируются. Обозначим через U_i управление и состояние системы S_i на каждом этапе $(i = \overline{1,n})$. Пусть переход системы S из состояния S_{i-1} в состояние S_i можно характеризовать производственной функцией F, зависящей только от выбранного управления U_i и от предыдущего состояния:

$$S_i = F(S_{i-1}, U_i) \tag{4}$$

(в представлении (4) все входящие величины являются n-мерными переменными). Тогда, учитывая (3) и (4), представим функцию (1) в виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(S_{i-1}, U_i).$$

Задача управления системой S формулируется следующим образом: необходимо для начального состояния S_0 определить управления U_i^* $(i = \overline{1,n})$ так, чтобы через n этапов система S перешла в конечное состояние S_K, при этом достигалось максимальное значение функции $W(U)$.

Приведем пример конструкции сетевых объектов с заданной производственной функцией $F(Z, U)$. Рассмотрим сеть, состоящую из m объектов с саморегулируемыми связями. Это могут быть, например, крупные торговые комплексы, имеющие складские, производственные подразделения, а также сложную внутреннюю инфраструктуру – сетевые площадки. В своей деятельности они подчиняются единому руководству (центру), которое располагает определенным количеством средств Z и может распределять их между отдельными сетевыми площадками:

$$Z = \sum_{k=1}^{m} Z_k, \tag{5}$$

где Z_k $(i = \overline{1,m})$ – объем средств выделенных k-й площадке. Планирование деятельности сети осуществляется на период, состоящей из n этапов. Средства торговым площадкам предоставляются сроком на один этап (квартал, полгода, год). По истечении этапа по всем площадкам подсчитывается прибыль Z_i $(i = \overline{1,m})$ от вложенных средств. Пусть в начале планирования известно количество средств Z_0. На первом этапе необходимо распределить их по площадкам так, чтобы выполнялось условие (5). При этом k-й площадке будет выделено Z_{0k} средств. Получим m-мерный вектор $\bar{Z}_0 = (Z_{01}, Z_{02}, \ldots, Z_{0m})$. Имеет место ресурсный баланс первого этапа:

$$Z_0 = \langle \bar{Z}_0, \bar{U}_1 \rangle, \quad \sum_{k=1}^{m} U_{1k} = 1; \tag{6}$$

здесь $\bar{U}_1 = (U_{11}, \ldots, U_{1m})$ – управляющий вектор первого этапа, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов; доходная часть $\bar{Z}_1 = (Z_{11}, Z_{12}, \ldots, Z_{1m})$ первого этапа определяется соотношением $\bar{Z}_1 = F(\bar{Z}_0, \bar{U}_1)$. Новых средств в сеть не поступает и на следующем этапе вкладываются средства, имеющиеся к окончанию предыдущего этапа. В начале второго этапа распределится сумма $Z_1 = \sum\limits_{k=1}^{m} Z_{1k}$ и определится новый управляющий вектор $\bar{U}_2 = (U_{21}, \ldots, U_{2m})$ и т. д. Получим рекуррентные соотношения для баланса и доходной части:

$$Z_{l+1} = \langle \bar{Z}_l, \bar{U}_l \rangle, \ \sum_{k=1}^{m} U_{lk} = 1, \ \ \bar{Z}_{l+1} = F(\bar{Z}_l, \bar{U}_l),$$

причем элементы управляющих векторов $\bar{U}_l$ $(l = \overline{1, n})$ расположены на стандартном m-симплексе. Требуется найти способ управления ресурсами, т. е. определить компоненты векторов $\bar{U}_l$ $(l = \overline{1, n})$. Критерии выбора и условия могут быть различными:

(a) доход вкладывается в производство полностью, при этом определяется максимум суммы оставшихся средств и прибыли;

(b) доход вкладывается в реализацию полностью, при этом определяется максимум только прибыли;

(c) доход, получаемый на каждом этапе, вкладывается в реализацию не полностью, а частично, определяется максимум только прибыли.

Для случая (a) имеем рекуррентные соотношения, включающие в себя производственную функцию F и функцию прибыли Φ:

$$\begin{aligned} Z_{ik} &= f_k(Z_{i-1,k}) + \phi_k(Z_{i-1,k}), \\ W &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [f_k(Z_{ik}) + \phi_k(Z_{ik})], \end{aligned} \tag{7}$$

(здесь f_k, ϕ_k – компоненты функций F и Φ соответственно).

В случае (c) рекуррентные соотношения аналогичны (7). В результате определяется набор управляющих векторов $\bar{U}_l$ $(l = \overline{1, n})$, для которого определяется максимальное значение функции $W(U)$; таким образом, в конце каждого периода центр получает рекомендации по такому перераспределению средств между сетевыми площадками, чтобы уровень заинтересованности был максимален.

3. Модель второго уровня

Задача формулируется следующим образом: для заданного начального состояния системы S необходимо определить набор векторов управления так, чтобы через фиксированное число этапов система S перешла в заданное состояние и при этом значение критерия заинтересованности было максимальным. При внешней схожести задачи двух уровней требуют различного подхода к их решению.

Рассматриваемая здесь задача представляет собой многомерную нелинейную задачу оптимального управления. При ее решении были рассмотрены варианты использования дискретного принципа максимума Понтрягина для поиска оптимальной стратегии управления системой, а также на основе полученных результатов применялся метод динамического программирования Беллмана.

3.1. Для гомогенного процесса, состоящего из n этапов и вектора состояния $\bar{Z}_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots, Z_{im})$ $(i = \overline{1,n})$ необходимо выбирать последовательность векторов управления $\bar{U}_i = (U_{i1}, \ldots, U_{im})$ $(i = \overline{1,n})$, определенным способом характеризующую систему S.

Преобразование вектора состояния описывается рекуррентными соотношениями для производственной функции $F(Z, U)$:

$$\bar{Z}_i' = F(\bar{Z}_{i-1}, \bar{U}_i), \quad Z_{i-1} = \sum_{k=1}^{m} Z_{i-1,k}' \cdot U_{ik}, \tag{8}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{m} U_{ik} = 1$.

Введем дополнительную переменную состояния $Z_{i,m+1}$ $(i = \overline{1,n})$: $Z_{i,m+1} = \sum\limits_{p=1}^{i} \sum\limits_{k=1}^{m} Z_{pk}$. Ясно, что при этом удовлетворяются соотношения (4): переход системы S из состояния S_{i-1} в состояние S_i зависит только от выбранного управления $\bar{U}_i$ и от предыдущего состояния, т. к.

$$Z_{i,m+1} = Z_{i-1,m+1} + \sum_{k=1}^{m} F_k(\bar{Z}_{i-1}, \bar{U}_i). \tag{9}$$

Обозначив расширенный вектор состояния через $\bar{Z}_i^*$,

$$\bar{Z}_i^* = (Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots, Z_{im}, Z_{i,m+1}),$$

и дополнив систему (8) уравнением (9), получим, что определение оптимального управления сводится к задаче поиска максимума функции $W(U) = \sum\limits_{k=1}^{m+1} Z_{ik}^*(U)$. Компоненты Z_{ik}^* вектора состояния $\bar{Z}_i^*$ положительны, вектор $\bar{Z}_i^*$ принадлежит симплексу, ограниченному гиперплоскостью, которая отсекает по осям координат отрезки, равные $\sum_{k=1}^{m+1} Z_{ik}^*$ $(i = \overline{1,n})$. Процедура решения на основе принципа максимума Понтрягина заключается во введении $(m+1)$-мерного сопряженного вектора и функции Гамильтона H_i: $H_i = \langle \bar{\Lambda}_i^*, \bar{Z}_i^* \rangle$, где $\bar{\Lambda}_{i-1}^* = \dfrac{\partial H_i}{\partial Z_{i-1}}$, $\Lambda_{nk}^* = 1$. Требуемая последовательность управлений U_i^* определяется из условий $\dfrac{\partial H_i}{\partial U_i} = 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Заметим, что применение данного метода требует проверки выполнения условий: $H_i(U_i^*) = \max H_i(U_i)$. Последнее обусловлено тем, что условия оптимальности для дискретных процессов в общем случае имеют только локальный характер. На оптимальном управлении функция Гамильтона может иметь любое стационарное значение.

3.2. Рассмотрим формулу (3), связывающую значение общего критерия заинтересованности W со значениями этого критерия W_i $(i = \overline{1,n})$, полученными на каждом этапе рассчитываемого периода.

Введем обозначения для суммы критериев за этапы, начиная с i-го. Пусть $W_i(U) = \sum_{j=i}^{n} W_j(U)$ $(i = \overline{1,n})$. Для состояния S_{n-1} системы S из условия принадлежности области допустимых значений определяется оптимальное управление U_n^* на последнем этапе:

$$W_n(U_n^*) = W_n^*(S_{n-1}) = \max_{U_n} \ [W_n(S_{n-1}, U_n)],$$

очевидно $U_n^* \equiv U_n^*(S_{n-1})$. Согласно принципа динамического программирования перейдем к следующему шагу и найдем управление для $(n-1)$-го этапа. Из (4) следует, что $S_{n-1} = F(S_{n-2}, U_{n-1})$, и на двух последних шагах получаем

$$W_{n-1}(U_{n-1}) = W_{n-1}(S_{n-2}, U_{n-1}) + W_n^*[F(S_{n-2}, U_{n-1})],$$

откуда и определяется управление $U_{n-1}^* \equiv U_{n-1}^*(S_{n-2})$ для произвольного состояния системы S_{n-2}, учитывая принадлежность области допустимых значений: $W_{n-1}^*(U_{n-1}^*) = \max_{U_{n-1}} [W_{n-1}(U_{n-1})]$. Аналогично рассуждая, получаем для i-го этапа соотношения вида:

$$W_{n-1}(U_i) = W_i(S_{i-1}, U_i) + W_{i+1}^*[F(S_{i-1}, U_i)],$$

откуда определяется управление $U_i^* \equiv U_i^*(S_{i-1})$, учитывая условие $W_i^*(U_i^*) = \max_{U_i} [W_i(U_i)]$. Таким образом, для известного состояния S_0 на первом этапе получено управление $U_1^* \equiv U_1^*(S_0)$ и искомое значение W_1^*:

$$W_1^* = W_1^*(U_1^*) = \max_{U_1} \ [W_1(S_0, U_1) + W_2^* \left(F(S_0, U_1)\right)].$$

В результате построена цепочка векторов $\bar{U}_i^*$ $(i = \overline{1,n})$, на которой функция $W(U)$ достигает максимального значения.

4. Стохастическая модель

Характеристики сетевых объектов (комплексов) зачастую являются случайными величинами [3]. Изложенные в п. 3 результаты относятся к детерминированным задачам управления. Их применение обосновано в том случае, если управляемая система допускает усреднение характеристик состояния. Если рассматривать введенную в п. 3 отдельную сетевую площадку, представляющую собой самостоятельную структуру, то показатели каждого из подразделений несут элемент случайности. Для верхнего уровня центра эти показатели суммируются и здесь можно говорить об усреднении общих значений [5]. Задача моделирования на уровне отдельного сетевого объекта глобальной сети будет иметь явно выраженный стохастический характер. Кроме того, могут сильнее проявляться и другие циклы, отличные от сезонных.

5. Заключение

Рассмотренные в настоящей работе вопросы во многом соотносятся с задачами формирования планов периодического бюджетирования. Обычно в процессе их разработки и реализации вопросов связанных с консолидированным бюджетом сетевые компании сталкиваются с большим количеством трудностей и проблем [1, 2, 4]. Действительно, заранее трудно предугадать показатели за достаточно большой горизонт планирования. В связи с чем используемые принципы бюджетирования делятся на периодическое и скользящее. При периодическом бюджетировании, как правило, период равен одному году. Скользящее бюджетирование предусматривает деление периода планирования на несколько этапов, по истечении которых бюджетные планы сетевого объекта передвигаются на эту же часть вперёд. Проблема периодического бюджетирования в основном определяется высоким уровнем нестабильности бизнес-среды а также изменяющимися потребительскими предпочтениями. В итоге бюджет, составляемый один раз в год, существенно теряет свою актуальность, что вызывается кумулятивным характером всевозможных отклонений фактических значений от запланированных [6, 7]. В рамках традиционного периодического бюджетирования используются два действенных подхода, следование которым позволит частично справиться с этой проблемой. Во-первых, сетевая организация может прибегнуть к составлению нескольких вариантов бюджетных сценариев, оставив самые вероятные. Во-вторых, уже после принятия определённого бюджета на год те или иные отклонения могут быть устранены путём внесения корректировок. При выработке решения перехода от периодического бюджетирования к скользящему необходимо учитывать, что использование сетевой организацией скользящего бюджетирования должно предваряться детальной работой по его формированию, анализу и возможности внесения корректировок. Полученные в настоящей работе теоретические результаты применимы как для периодического, так и для скользящего вариантов работы. И в том и в другом случае у разработчиков появляется инструмент прогнозирования финансовых результатов, основанный на математических методах анализа.

Список литературы

1. *Сергеев С. М.* О моделировании опережающих показателей торгово-экономических процессов // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XX». – Воронеж: ВорГУ, 2009. – С. 121–123.
2. *Сергеев С. М.* Вычислительные аспекты при решении задач управления системами с распределенными параметрами на графе // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI». – Воронеж: ВорГУ, 2010. – С. 134–135.
3. *Сергеев С. М., Щеглова А. Н.* Моделирование транспортных перевозок в условиях временных ограничений // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI». – Воронеж: ВорГУ, 2010. – С. 136.
4. *Сергеев С. М.* Применение интерактивных форм в ряде прикладных задач. – Санкт-Петербург, Изд-во СПбГТЭИ, 2010. – 187 с.
5. *Сергеев С. М., Паничева М. А.* Аппроксимация линий спроса рядами Фурье в задаче прогнозирования торговой деятельности // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXII». – Воронеж: ВорГУ, 2011. – С. 171–173.
6. *Сергеев С. М.* Математические аспекты определения основных торговых параметров // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: Труды IV международной конференции. – Воронеж: ВорГУ, 2011. – С. 267–268.
7. *Сергеев С. М.* Математическое моделирование сети торговых предприятий // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: Труды IV международной конференции. – Воронеж: ВорГУ, 2011. – С. 268–269.

Поступила в редакцию 25.12.2011.