Математика и её приложения: ЖИМО. 2011. Вып. 1 (8). С. 29 – 38.

УДК 004.056.5

В. М. Деундяк[1], А. В. Лукин[2]

Об одной комбинаторной задаче из теории проекционных методов решения уравнений дискретной свертки

Ключевые слова: проекционные методы, дискретные свертки, локальный метод.

В связи с разработкой проекционных методов для n-мерных дискретных сверток А. В. Козаком и И. Б. Симоненко определено двупараметрическое семейство базовых множеств $\mathfrak{M}(r, R)$. В настоящей работе разработан алгоритм построения конечного множества из этого семейства для $n = 2$.

Keywords: projection methods, discrete convolutions, local method.

Investigating projection methods for the solution of n-dimensional discrete convolution equations, A. V. Kozak and I. B. Simonenko presented two-parameter family $\mathfrak{M}(r, R)$ of basic sets. In this work, we investigate an algorithm of constructing of the finite set from $\mathfrak{M}(r, R)$ in the case $n = 2$.

1. Введение и постановка задачи

Теория проекционных методов для одномерных операторов Винера–Хопфа построена в [1]. В работе [2] А. В. Козак на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко (см. [4]) разработал теорию проекционных методов решения многомерных уравнений обобщенной континуальной свертки. В частности, в [2] показано, что если A — обратимый оператор многомерной обобщенной континуальной свертки, то для содержащего начало координат открытого ограниченного подмножества $M(\subset \mathbb{R}^n)$ с C^1-гладкой границей можно построить систему множеств τM и к A применить проекционный метод по системе проекторов $P_{\tau M}$, где $P_{\tau M}$ — оператор умножения на характеристическую функцию области τM. В работе А. В. Козака и И. Б. Симоненко [3] получен аналог этого результата для многомерных дискретных сверток. Для этого в [3] введено семейство $\mathfrak{M}(r, R)$ подмножеств множества $\mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}^n$ — n-мерная дискретная решетка в $\mathbb{R}^n$, и показано, что вместо вышеописанной области M в качестве базового множества для проекционного метода можно выбирать элементы из $\mathfrak{M}(r, R)$.

Приведем определение $\mathfrak{M}(r, R)$. Через $\mathbf{B}(X, r)$ будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке $X(\in \mathbb{R}^n)$. Подмножество $\Pi \subset \mathbb{Z}^n$

[1]Южный федеральный университет; E-mail: `vlade@math.rsu.ru`.
[2]Южный федеральный университет; E-mail: `aleksandr.lukin@rambler.ru`.

будем называть каноническим дискретным полупространством, если множество Π и его дополнение замкнуты относительно сложения. Сдвиг канонического дискретного полупространства на целочисленный вектор будем называть дискретным полупространством. Пусть $r,\ R$ — положительные действительные числа. Через $\mathfrak{M}(r)$ обозначим семейство подмножеств $M \subset \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих условию: для любой точки $X \in \mathbb{R}^n$ существует дискретное полупространство или пространство Π такое, что

$$M \cap \mathbf{B}(X, r) = \Pi \cap \mathbf{B}(X, r). \tag{1}$$

Семейство множеств $M \in \mathfrak{M}(r)$, для которых выполняется условие

$$M \supset \mathbf{B}(0, R) \cap \mathbb{Z}^n,$$

обозначим через $\mathfrak{M}(r, R)$.

Для эффективного применения проекционных методов важно наличие алгоритмов построения конечных множеств, принадлежащих семейству $\mathfrak{M}(r, R)$. Однако в работе [3] для $n > 2$ существование конечных множеств из $\mathfrak{M}(r, R)$ не доказано, а для $n = 2$ в форме замечания указано, что в качестве конечного множества из $\mathfrak{M}(r, R)$ можно взять пересечение $\mathbb{Z}^2$ с достаточно большим выпуклым открытым многоугольником с целочисленными вершинами, все углы которого близки к π. В настоящей работе для $n = 2$ доказана теорема, устанавливающая связь параметра r с углами подобного многоугольника, и разработан алгоритм построения конечного множества из $\mathfrak{M}(r, R)$.

2. Геометрическая теорема

Пусть $A,\ B,\ S(\in \mathbb{R}^2)$ — произвольные, не совпадающие между собой точки. Введем необходимые обозначения. Символом AB обозначим отрезок, соединяющий точки A и B; символом $l(A, B)$ — прямую, проходящую через точки A и B; символом $\vec{l}(A, B)$ — луч с началом в точке A, проходящий через точку B. Под $|AB|$ будем понимать длину отрезка AB. Пусть $\angle ASB$ — угол с вершиной в точке S, который получается при повороте от луча $\vec{l}(S, A)$ к лучу $\vec{l}(S, B)$ в положительном направлении. Обозначим через $|\angle ASB|$ величину угла $\angle ASB$. Будем обозначать через $\angle \mathring{A}BC$, $\angle AB\mathring{C}$, $\angle \mathring{A}B\mathring{C}$ следующие множества:

$$\angle \mathring{A}BC \overset{\text{def}}{=} \angle ABC \setminus \vec{l}(B, A); \quad \angle AB\mathring{C} \overset{\text{def}}{=} \angle ABC \setminus \vec{l}(B, C);$$

$$\angle \mathring{A}B\mathring{C} \overset{\text{def}}{=} \angle ABC \setminus (\vec{l}(B, A) \cup \vec{l}(B, C)).$$

Пусть $A,\ B(\in \mathbb{R}^2),\ S(\in \mathbb{Z}^2)$ — произвольные, не совпадающие между собой точки. Дискретным углом $\angle ASB_{\mathbb{Z}}$ назовем множество

$$\angle ASB_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def}}{=} \angle ASB \cap \mathbb{Z}^2.$$

Будем обозначать через $\angle\mathring{A}BC_{\mathbb{Z}}$, $\angle AB\mathring{C}_{\mathbb{Z}}$, $\angle\mathring{A}B\mathring{C}_{\mathbb{Z}}$ следующие множества:

$$\angle\mathring{A}BC_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def}}{=} \angle\mathring{A}BC\cap\mathbb{Z}^2, \quad \angle AB\mathring{C}_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def}}{=} \angle AB\mathring{C}\cap\mathbb{Z}^2, \quad \angle\mathring{A}B\mathring{C}_{\mathbb{Z}} \overset{\text{def}}{=} \angle\mathring{A}B\mathring{C}\cap\mathbb{Z}^2.$$

В дальнейшем будем рассматривать углы, величины которых принадлежат интервалу $(0, 2\pi)$.

Теорема. *Зафиксируем произвольное действительное число $r(> 1)$ и точки $S \in \mathbb{Z}^2$, A, B, $D \in \mathbf{B}(S,r)\cap\mathbb{Z}^2$ так, что $B \notin l(S,A)$, точка D симметрична точке B относительно S, и выполняется условие*

$$\frac{\pi}{2} \leqslant |\angle ASB| < \pi.$$

Положим

$$r' = \frac{r}{\sin\varkappa/2}, \tag{2}$$

где $\varkappa = |\angle ASB|$. Если выполняется условие

$$\mathbf{B}(S,r') \cap \angle\mathring{D}S\mathring{A}_{\mathbb{Z}} = \varnothing, \tag{3}$$

то для любой точки $X \in \mathbb{R}^2$ существует дискретное полупространство или пространство Π такое, что

$$\angle ASB_{\mathbb{Z}} \cap \mathbf{B}(X,r) = \Pi \cap \mathbf{B}(X,r). \tag{4}$$

Доказательство. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на несколько непересекающихся подмножеств и докажем справедливость теоремы для произвольной точки каждого из этих множеств. Рассмотрим несколько этапов.

Этап 1. Построим множество $\angle EGF$ и докажем для него справедливость теоремы. Зафиксируем точку C симметрично точке A относительно S. Пусть точка $G \in \angle\mathring{A}S\mathring{B}$. Через $\rho(G, l(S,B))$ обозначим расстояние от точки G до прямой $l(S,B)$. Зафиксируем точку $G \in \angle\mathring{A}S\mathring{B}$ так, что справедливы равенства

$$\rho(G, l(S,B)) = \rho(G, l(S,A)) = r'.$$

Проведем через точку G прямую, параллельную $l(S,B)$. Обозначим через J точку пересечения этой прямой с $l(S,A)$. Проведем через точку G прямую, параллельную $l(S,A)$. Обозначим через I точку пересечения этой прямой с $l(S,B)$. Зафиксируем точку E так, что выполняются условия

$$E \in \angle\mathring{A}S\mathring{B} \cap l(I,G), \ |IE| > |IG|.$$

Зафиксируем точку F так, что выполняются условия

$$F \in \angle\mathring{A}S\mathring{B} \cap l(J,G), \ |JF| > |JG|.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\rho(l(G,F), l(S,B)) = \rho(l(G,E), l(S,A)) = r', \tag{5}$$

где через $\rho(l(G,F),l(S,B))$ обозначено расстояние между параллельными прямыми $l(G,F)$, $l(S,B)$.

Докажем справедливость теоремы для построенного угла $\angle EGF$. Из данных в условии теоремы ограничений на величину угла $\angle ASB$ и равенства (2) ясно, что имеет место двойное неравенство

$$r < r' < \infty. \tag{6}$$

Учитывая равенство (5), получаем соотношение

$$\forall\ X \in \angle EGF:\ \mathbf{B}(X,r) \cap \angle ASB = \mathbf{B}(X,r).$$

Следовательно, для любой точки $X \in \angle EGF$ можно положить $\Pi = \mathbb{Z}^2$.

Этап 2. Построим множество $\angle UNV$ и докажем для него теорему. Зафиксируем точку $N \in \angle\mathring{C}S\mathring{D}$ так, что справедливо равенство

$$\rho(N,l(S,D)) = \rho(N,l(S,C)) = r'.$$

Проведем через точку N прямую, параллельную $l(S,C)$. Обозначим через V точку пересечения этой прямой с $l(S,D)$. Проведем через точку N прямую, параллельную $l(S,D)$. Обозначим через U точку пересечения этой прямой с $l(S,C)$. Таким образом, справедливо равенство

$$\rho(l(N,U),l(S,B)) = \rho(l(N,V),l(S,A)) = r'. \tag{7}$$

Обозначим через K точку пересечения прямых $l(G,E)$ и $l(N,U)$. Обозначим через L точку пересечения прямых $l(F,G)$ и $l(N,V)$.

Докажем справедливость теоремы для угла $\angle UNV$. Из равенства (7) и неравенства (6) следуют соотношения:

$$\forall\ X \in \angle UNV:\ \mathbf{B}(X,r) \cap \angle ASB = \varnothing,$$

$$\forall\ X \in \angle KUN:\ \mathbf{B}(X,r) \subset \angle\mathring{B}S\mathring{D}, \quad \forall\ X \in \angle NVL:\ \mathbf{B}(X,r) \subset \angle\mathring{C}S\mathring{A}.$$

Из приведенных соотношений следует, что если точка $X \in \angle KUN$, то можно положить $\Pi = \angle DSB_{\mathbb{Z}}$, если точка $X \in \angle NVL$, то положим $\Pi = \angle ASC_{\mathbb{Z}}$. При этом будут справедливы равенства:

$$\forall\ X \in \angle KUN:\ \mathbf{B}(X,r) \cap \angle DSB_{\mathbb{Z}} = \varnothing,$$

$$\forall\ X \in \angle NVL:\ \mathbf{B}(X,r) \cap \angle ASC_{\mathbb{Z}} = \varnothing.$$

Следовательно, для множества $\angle UNV$ условие теоремы выполняется.

Этап 3. Зафиксируем точку K' на прямой $l(N,U)$ симметрично точке U относительно K. Зафиксируем точку L' на прямой $l(N,V)$ симметрично точке V относительно L.

Рассмотрим множество $\angle\mathring{F}GK \cap \angle GK\mathring{K}'$. Из равенства (5) и неравенства (6) следует соотношение

$$\forall\ X \in \angle\mathring{F}GK \cap \angle GK\mathring{K}':\ \rho(X,l(S,A)) \geqslant r' > r.$$

Следовательно, для каждой точки $X \in \angle\mathring{F}GK \cap \angle GK\mathring{K}'$ можно положить $\Pi = \angle DSB_{\mathbb{Z}}$, при этом будет выполнено равенство (4).

Рассмотрим множество $\angle LG\mathring{E} \cap \angle\mathring{L}'LG$. Аналогично доказывается, что для любой точки этого множества можно положить $\Pi = \angle ASC_{\mathbb{Z}}$.

Этап 4. Рассмотрим четырехугольник

$$\Omega^1 = \angle IS\mathring{U} \cap \angle\mathring{S}U\mathring{K} \cap \angle\mathring{U}K\mathring{I} \cap \angle\mathring{K}IB.$$

Зафиксируем произвольную точку $X \in \Omega^1$ и построим дискретное полупространство Π такое, что справедливо равенство (4). Опишем алгоритм построения требуемого полупространства Π.

Алгоритм.

Вход: точка $X \in \mathbb{R}^2$, угол $\angle BSC$, действительное число $r(> 1)$.

Выход: полупространство Π, удовлетворяющее условию (4); точки $Z(\in \mathbb{R}^2)$, $Z'(\in \mathbb{R}^2)$, определяющие полупространство Π.

Шаг 1. Если выполняется условие

$$\mathbf{B}(X, r) \cap \angle\mathring{B}S\mathring{C}_{\mathbb{Z}} \neq \varnothing, \tag{8}$$

то переходим на шаг 2, иначе переходим на шаг 4.

Шаг 2. Найдем точку $T(\in \mathbb{Z}^2)$ такую, что угол $\angle BST$ удовлетворяет условию

$$|\angle BST| = \min\left\{|\angle BSW|,\ W \in \mathbf{B}(X, r) \cap \angle\mathring{B}S\mathring{C}_{\mathbb{Z}}\right\}. \tag{9}$$

$\mathbf{B}(X, r) \cap \angle\mathring{B}S\mathring{C}_{\mathbb{Z}}$ — конечное дискретное множество, следовательно, если выполнено условие (8), то точка T существует. Вообще говоря, точка T может определяться неединственным образом. Если это так, то в качестве T возьмем любую точку, удовлетворяющую условию (9).

Шаг 3. Зафиксируем произвольное положительное число ε такое, что $\varepsilon < \rho(T, l(S, B))$. Такое число существует, поскольку из условия (9) следует справедливость неравенства $\rho(T, l(S, B)) > 0$. Проведем перпендикуляр из точки T к прямой $l(S, B)$. Выберем точку Z на этом перпендикуляре так, чтобы выполнялось равенство $\rho(Z, l(S, B)) = \varepsilon$. При таком способе выбора $Z \in \angle\mathring{B}S\mathring{C}$, но, вообще говоря, $Z \notin \mathbf{B}(X, r)$. Далее переходим к шагу 5.

Шаг 4. Возьмем произвольную точку $Z \in \angle\mathring{B}S\mathring{C}$.

Шаг 5. Строим точку Z', симметричную точке Z относительно S; положим $\Pi = \angle Z'SZ_{\mathbb{Z}}$.

Конец алгоритма.

Далее покажем, что для построенного полупространства Π выполняется равенство (4). Из конструкции алгоритма следует, что построенное полупространство Π представимо в виде

$$\Pi = \angle\mathring{B}SZ_{\mathbb{Z}} \cup \angle ASB_{\mathbb{Z}} \cup \angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}. \tag{10}$$

При этом дискретные углы, входящие в это объединение, попарно не пересекаются. Если удастся показать справедливость следующих двух условий:

$$\mathbf{B}(X, r) \cap \angle\mathring{B}SZ_{\mathbb{Z}} = \varnothing, \tag{11}$$

$$\mathbf{B}(X,r)\cap\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}=\varnothing, \tag{12}$$

то тем самым будет доказано равенство (4).

Докажем равенство (11). Если условие (8) не выполнено, то справедливость этого равенства очевидна, так как имеет место вложение

$$\mathbf{B}(X,r)\cap\angle\mathring{B}SZ_{\mathbb{Z}}\subset\mathbf{B}(X,r)\cap\angle\mathring{B}S\mathring{C}_{\mathbb{Z}}.$$

Предположим, что условие (8) выполнено. Докажем справедливость равенства (11) от противного. Пусть выполнено условие

$$\mathbf{B}(X,r)\cap\angle\mathring{B}SZ_{\mathbb{Z}}\neq\varnothing,$$

тогда найдется точка $Y\in\mathbf{B}(X,r)\cap\angle\mathring{B}SZ_{\mathbb{Z}}$, при этом справедливо неравенство $|\angle BSY|\leqslant|\angle BSZ|$. Из алгоритма построения точки Z следует неравенство $|\angle BSZ|<|\angle BST|$, где T — точка, построенная на шаге 2 алгоритма. Значит, справедливо неравенство $|\angle BSY|<|\angle BST|$, но это противоречит условию (9) минимальности угла, определяемого точкой T. Таким образом, справедливость равенства (11) доказана.

Докажем справедливость (12) от противного. Предположим, что

$$\mathbf{B}(X,r)\cap\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}\neq\varnothing. \tag{13}$$

Тогда существует точка $Y\in\mathbf{B}(X,r)\cap\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}$. Из неравенства (6) и алгоритма построения точки Z' вытекают вложения $\mathbf{B}(S,r)\subset\mathbf{B}(S,r')$, $\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}\subset\angle\mathring{D}S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}$. Из этих вложений и условия (3) следует равенство

$$\mathbf{B}(S,r)\cap\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}=\varnothing. \tag{14}$$

Таким образом, точка $Y\in\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}\setminus\mathbf{B}(S,r')$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение:

$$\forall\ X_1\in\angle\mathring{B}S\mathring{C},\quad\forall\ X_2\in\angle\mathring{D}S\mathring{A}\setminus\mathbf{B}(S,r'):\ |X_1X_2|>r'.$$

Из этого утверждения следует неравенство $|XY|>r$, которое противоречит тому, что $Y\in\mathbf{B}(X,r)$. Следовательно, предположение (13) было ложным, и равенство (12) доказано. Из представления (10) и уже доказанных равенств (11)–(12) следует справедливость равенства (4) теоремы.

Рассмотрим четырехугольник

$$\Omega^2=\angle\mathring{V}SJ\cap\angle SJ\mathring{L}\cap\angle\mathring{J}L\mathring{V}\cap\angle\mathring{L}V\mathring{S}.$$

Абсолютно аналогично доказывается, что равенство (4) выполняется для любой точки этого четырехугольника.

Этап 5. Рассмотрим четырехугольник

$$\Omega^3=\angle\mathring{J}S\mathring{I}\cap\angle\mathring{S}I\mathring{G}\cap\angle\mathring{I}G\mathring{J}\cap\angle\mathring{G}J\mathring{S}.$$

Разобьем его на несколько подмножеств и докажем теорему для каждого из них. Обозначим через $\mathbf{K}(S,r')$ окружность круга $\mathbf{B}(S,r')$. Обозначим через P точку пересечения окружности $\mathbf{K}(S,r')$ и луча $\vec{l}(S,B)$, через Q — точку пересечения окружности $\mathbf{K}(S,r')$ и луча $\vec{l}(S,C)$, через P' — точку пересечения окружности $\mathbf{K}(S,r')$ и луча $\vec{l}(S,D)$, через Q' — точку пересечения окружности $\mathbf{K}(S,r')$ и луча $\vec{l}(S,A)$. Точки P и I, Q и U, P' и V, Q' и J совпадают, если угол $\angle ASB$ — прямой. Введем несколько обозначений:

$$\Phi_1 = \mathbf{B}(P,r) \cap \Omega^3, \quad \Phi_2 = \mathbf{B}(Q',r) \cap \Omega^3, \quad \Phi_3 = \Omega^3 \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2).$$

Из построения точек P и Q' и соотношения (2) следует равенство

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing. \tag{15}$$

Из конструкции множеств Φ_1, Φ_2, Φ_3 ясно, что Ω^3 представимо в виде

$$\Omega^3 = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3, \tag{16}$$

причем из определения множества Φ_3 и предыдущего равенства следует, что множества, входящие в это объединение, попарно не пересекаются. Построим требуемое в теореме полупространство Π для произвольной точки каждого из множеств Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Рассмотрим множество Φ_1. Зафиксируем произвольную точку $X \in \Phi_1$ и построим полупространство Π, удовлетворяющее условию (4). Применяя алгоритм, описанный на этапе 4, строим точки $Z \in \angle \mathring{B}S\mathring{C}$, $Z' \in \angle \mathring{D}S\mathring{A}$ и полупространство $\Pi = \angle Z'SZ_{\mathbb{Z}}$. Из конструкции алгоритма ясно, что разбиение (10) оказывается верным. Необходимо доказать равенства (11) и (12). Доказательство равенства (11) полностью аналогично доказательству соответствующего случая, проведенному на этапе 4. Доказательство равенства (12) проведем от противного.

Предположим, что справедливо условие (13), тогда существует точка $Y \in \mathbf{B}(X,r) \cap \angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}$. Из (6) и алгоритма построения точки Z' вытекают вложения $\mathbf{B}(S,r) \subset \mathbf{B}(S,r')$, $\angle Z'S\mathring{A}_{\mathbb{Z}} \subset \angle \mathring{D}S\mathring{A}_{\mathbb{Z}}$. Из этих вложений и условия (3) следует равенство (14). Из равенства (15) следует утверждение

$$\forall\ X \in \Phi_1 \ \ \forall\ Y \in \angle Z'S\mathring{A} \setminus \mathbf{B}(S,r') : \ |XY| > r.$$

Это противоречит тому, что точка $Y \in \mathbf{B}(X,r)$. Следовательно, выполняется равенство (12). Таким образом, равенство (4) установлено для произвольной точки множества Φ_1. Аналогично доказывается требуемое равенство для произвольной точки множества Φ_2. Похожими рассуждениями требуемое в теореме полупространство Π строится для произвольной точки множества Φ_3. Таким образом, из разбиения (16) следует существование требуемого в теореме полупространства для каждой точки множества Ω^3.

Этап 6. Рассмотрим четырехугольник

$$\Omega^4 = \angle USV \cap \angle SV\mathring{N} \cap \angle \mathring{V}N\mathring{U} \cap \angle \mathring{N}US,$$

разобьем его на три попарно непересекающихся подмножества

$$\Phi'_1 = \mathbf{B}(Q,r) \cap \Omega_4, \ \Phi'_2 = \mathbf{B}(P',r) \cap \Omega_4, \ \Phi'_3 = \Omega^4 \setminus (\Phi'_1 \cup \Phi'_2).$$

Аналогично этапу 5 для произвольной точки каждого из этих подмножеств строится полупространство Π, удовлетворяющее условию теоремы.

Итак, мы разбили плоскость $\mathbb{R}^2$ на несколько попарно непересекающихся подмножеств:

$$\mathbb{R}^2 = \angle EGF \cup \angle UNV \cup (\angle \mathring{F}GK \cap \angle GK\mathring{K}') \cup (\angle LG\mathring{E} \cap \angle \mathring{L}'LG) \cup \bigcup_{i=1}^{4} \Omega^i,$$

и доказали справедливость заключения теоремы для произвольной точки каждого из этих подмножеств. Таким образом, теорема доказана. ■

3. Алгоритмическое построение базового множества

Зафиксируем на плоскости $\mathbb{R}^2$ декартову систему координат xOy и порожденное ей дискретное пространство $\mathbb{Z}^2$. Пусть $A_0 = O$, X_0 — произвольная точка на положительной полуоси оси Ox, Y_0 — произвольная точка на положительной полуоси оси Oy. Пусть $Q(\in \mathbb{Z}^2)$ — произвольная точка. Через $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}(Q, r)$ будем обозначать следующее множество:

$$\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}(Q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(Q, r) \cap \mathbb{Z}^2.$$

Опишем алгоритм построения элемента семейства $\mathfrak{M}(r)$ (см. (1)) для значений параметра $r > \sqrt{2}$.

Алгоритм 1.

Вход: $r(> \sqrt{2})$ — фиксированное действительное число.

Выход: множество $M \in \mathfrak{M}(r)$, замкнутая ломаная $A_0A_1 \dots A_lA_0$, ограничивающая множество M.

Шаг 1. Положим

$$\varkappa = \min\{|\angle PA_0Q| \ : \ P,\ Q(\neq P) \in \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}(A_0, r)\}; \quad r' = \frac{r}{\sin \varkappa/2}.$$

Зафиксируем произвольную целочисленную точку $Q \in \angle X_0A_0Y_0$ так, что

$$|\angle X_0A_0Q| = \frac{\pi}{4}.$$

Шаг 2. На луче $\vec{l}(A_0, X_0)$ строим отрезок A_0A_1 такой, что

$$|A_0A_1| = [r'] + 1,$$

где $[r']$ — целая часть числа r'.

Шаг 3. Положим $k = 1$. Выполняем следующую процедуру до тех пор, пока очередной построенный отрезок A_pA_{p+1} не будет лежать на прямой, параллельной лучу $\vec{l}(A_0, Q)$. Получим ломаную $A_0A_1A_2 \dots A_pA_{p+1}$.

Процедура.

Вход: натуральное число k, действительное число $r'(>\sqrt{2})$, целочисленные точки $A_{k-1},\ A_k$.

Выход: целочисленная точка A_{k+1}.

Шаг I. Зафиксируем на луче $\vec{l}(A_{k-1}, A_k)$ произвольную целочисленную точку X_k так, что $|A_{k-1}A_k| < |A_{k-1}X_k|$. Рассмотрим перпендикуляр к прямой $l(A_{k-1}, A_k)$ в точке A_k, построенный в полуплоскости $\angle X_k A_k A_{k-1}$. Зафиксируем на этом перпендикуляре произвольную точку $Y_k(\notin l(A_{k-1}, A_k))$. Определим множество

$$\Phi_k = \angle X_k A_k Y_k \cap \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}(A_k, r').$$

Шаг II. Найдем точку G_k, для которой выполняется условие

$$|\angle X_k A_k G_k| = \min\{|\angle X_k A_k P| \mid P \in \Phi_k \setminus l(A_k, X_k)\}.$$

Замечание. Точка G_k может быть, вообще говоря, неединственной. Если это так, то в качестве G_k возьмем любую точку, для которой выполняется требуемое условие.

Шаг III. Для вектора $\overrightarrow{A_kG_k}$ запускаем итерационный процесс:

$$i := 1; \quad \overrightarrow{A_kG_k^1} := \overrightarrow{A_kG_k};$$

while $|A_kG_k^i| < r'$ *do*

$$i := i+1; \quad \overrightarrow{A_kG_k^i} := \overrightarrow{A_kG_k^{i-1}} + \overrightarrow{A_kG_k};$$

end while.

Шаг IV. Пусть $\tilde{i}$ — номер, на котором остановился итерационный процесс. Положим $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} := 2\overrightarrow{A_kG_k^{\tilde{i}}}$.

Конец процедуры.

Шаг 4. Пусть целочисленная точка M — середина отрезка A_pA_{p+1}. Построим в точке M прямую, перпендикулярную отрезку A_pA_{p+1}, и симметрично отразим каждую точку ломаной $A_0A_1A_2\dots A_pA_{p+1}$ относительно этой прямой. Получим ломаную $A_0A_1A_2\dots A_pA_{p+1}\dots A_{2p+1}$.

Шаг 5. Пусть вектор $\overrightarrow{OA}_{2p+1}$ имеет в системе координат xOy координаты (ξ, η). Преобразуем ломаную $A_0A_1A_2\dots A_{2p+1}$ путем сдвига каждой ее точки на вектор с координатами $(0, -\eta)$.

Шаг 6. Симметрично отразим ломаную $A_0A_1A_2\dots A_{2p+1}$ относительно оси Oy, а затем относительно оси Ox. В результате получим искомую замкнутую ломаную $A_0A_1\dots A_lA_0$, где $l = 8p+3$. Конечное подмножество $\mathbb{Z}^2$, ограниченное ломаной $A_0A_1\dots A_lA_0$, есть искомое множество M.

Конец алгоритма 1.

Опишем алгоритм, преобразующий множество M так, что полученное на выходе этого алгоритма множество принадлежит семейству $\mathfrak{M}(r, R)$.

Алгоритм 2.

Вход: множество M и ломаная $A_0A_1\dots A_lA_0$, полученные на выходе алгоритма 1; $R(>0)$ — фиксированное действительное число.

Выход: множество $\tilde{M}\in\mathfrak{M}(r,R)$.

Шаг 1. Если справедливо вложение $\mathbf{B}(O,R)\subset M$, то положим $\tilde{M}=M$, алгоритм завершен; иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим $p=1$; $A_0^pA_1^p\dots A_l^pA_0^p=A_0A_1\dots A_lA_0$; $M^p=M$. Пусть (x_i^p,y_i^p) — координаты точки A_i^p. Запускаем итерационный процесс:

$$i:=-1;$$

while $i<l$ *do*

$$i:=i+1;\quad x_i^{p+1}:=2x_i^p;\quad y_i^{p+1}:=2y_i^p;\quad A_i^{p+1}:=(x_i^{p+1},y_i^{p+1});$$

end while.

Получаем множество M^{p+1}, ограниченное ломаной $A_0^{p+1}A_1^{p+1}\dots A_l^{p+1}A_0^{p+1}$.

Шаг 3. Если справедливо вложение $\mathbf{B}(O,R)\subset M^{p+1}$, то положим $\tilde{M}=M^{p+1}$, алгоритм завершен; иначе положим $p:=p+1$, переходим к шагу 2.

Конец алгоритма 2.

Для любых действительных чисел $R>0$ и $r>\sqrt{2}$ построенное алгоритмами 1 и 2 дискретное множество $\tilde{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}(r,R)$. Обоснование корректности построенных алгоритмов и доказательство этого утверждения публикуются отдельно. Отметим, что практический интерес представляет ситуация, когда r велико [3], хотя алгоритмы нетрудно адаптировать к случаю $0<r\leqslant\sqrt{2}$.

Список литературы

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 212, № 6. – С. 1287–1289.
3. *Козак А. В., Симоненко И. Б.* Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках // Сибирский математический журнал. – 1980. – Т. XXI, № 2, С. 119–127.
4. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. – Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР, 2007. – 120 с.

Поступила в редакцию 1.12.2011.